NEW YORK ACADEMY OF SCIENCES 1818
PER MARIA PER TERRAS
Library
4957

ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

N.Y. Academy
Of Sciences

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE SECONDA

VOL. I.

NAPOLI
TIP. DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
DIRETTA DA MICHELE DE RUBERTIS

1888

SOCII DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Presidente — DE MARTINI ANTONIO
Vice-Presidente — PADELLETTI DINO
Segretario — FERGOLA EMANUELE
Tesoriere — ALBINI GIUSEPPE

SOCII ORDINARII

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

Socii residenti

1. Scacchi Arcangelo; 24 settembre 1861.

2. De Martini Antonio; 24 settembre 1861.

3. Nicolucci Giustiniano, 24 settembre 1861.

4. Costa Achille; 24 settembre 1861.

5. Palmieri Luigi; 19 novembre 1861.

6. Pasquale Giuseppe Antonio; 2 marzo 1867.

7. Albini Giuseppe; 13 giugno 1868.

8. Govi Gilberto; 12 luglio 1879.

9. Trinchese Salvatore; 3 luglio 1880.

10. Oglialoro-Todaro Agostino; 12 agosto 1882.

11. Licopoli Gaetano; 7 luglio 1883.

12. Bassani Francesco; 10 dicembre 1887.

Socii non residenti

13. Meneghini Giuseppe; 10 aprile 1869.

14. Cannizzaro Stanislao, 10 febbraio 1872.

15. Cantoni Giovanni; 8 maggio 1880.

16. De Zigno Achille; 6 dicembre 1884.

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Socii residenti

17. De Gasparis Annibale; 24 settembre 1861.

18. Battaglini Giuseppe; 19 novembre 1861.

19. Fergola Emanuele; 19 novembre 1861.

20. Padelletti Dino; 11 febbraio 1882.

21. Capelli Alfredo; 20 marzo 1887.

22. . . . . .

Socii non residenti

23. Brioschi Francesco; 3 maggio 1864.

24. Cremona Luigi; 12 febbraio 1881.

SOCII STRANIERI

1. Cayley Arturo; 3 maggio 1864.
2. Sylvester Giacomo Giuseppe; 3 maggio 1864.
3. Bunsen Roberto; 9 aprile 1870.
4. Helmholtz Ermanno; 9 aprile 1870.
5. Owen Riccardo; 9 aprile 1870.
6. Hermite Carlo; 9 aprile 1881.
7. Dana Giacomo Dwigt; 6 dicembre 1884.
8. Chevreul Michele Eugenio; 12 giugno 1886.

SOCII CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Stoppani Antonio; 3 marzo 1863.
2. Palmeri Paride; 10 dicembre 1870.
3. Seguenza Giuseppe; 12 ottobre 1872.
4. Gemmellaro Gaetano Giorgio; 8 dicembre 1877.
5. Caruel Teodoro; 8 maggio 1880.
6. Villari Emilio; 8 maggio 1880.
7. Wlacovich Paolo; 8 maggio 1880.

8. Comes Orazio; 10 novembre 1883.

9. Paternò Emanuele; 10 novembre 1883.

10. Capellini Giovanni; 14 febbraio 1885.

11. Pacinotti Antonio; 14 febbraio 1885.

12. . . . . .

13. . . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

---

14. Betti Enrico; 13 gennaio 1863.

15. Genocchi Angelo; 9 maggio 1865.

16. Rubini Raffaele; 9 maggio 1865.

17. Schiaparelli Giovanni; 12 febbraio 1876.

18. Beltrami Eugenio; 1° dicembre 1877.

19. D'Ovidio Enrico; 12 febbraio 1881.

20. Salvatore-Dino Nicola; 12 febbraio 1881.

Indice delle Memorie

CAPELLI A. — *Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie* . . N.° 1

COSTA A. — *Notizie ed osservazioni sulla Geo-Fauna Sarda* (Memoria seconda) . N.° 2

VILLARI E. — *Ricerche microscopiche sulle tracce delle scintille elettriche incise sul vetro, e sui diametri delle scintille istesse* (con tre tavole) . . . . . N.° 3

PALMIERI L. e OGLIALORO A. — *Sul terremoto dell'isola d'Ischia della sera del 28 luglio 1883* (con una tavola) . . . . . N.° 4

SCACCHI A. — *Sopra un frammento di antica roccia vulcanica inviluppato nella lava vesuviana del 1872* (con una tavola) . . . . . N.° 5

FERGOLA E. — *Sulla latitudine del Reale Osservatorio di Capodimonte* . . . . . N.° 6

KANTOR S. — *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques* . . . . . N.° 7

SCACCHI A. — *Nuove ricerche sulle forme cristalline dei paratartrati acidi di ammonio e di potassio* (con una tavola). . . . . N.° 8

COSTA A. — *Notizie ed osservazioni sulla Geo-Fauna Sarda* (Memoria terza) . . . N.° 9

COSTA A. — *Miscellanea Entomologica* (con una tavola). . . . . N.° 10

LICOPOLI G. — *Sull'anatomia e fisiologia del frutto nell'*Anona reticulata, *L., e nell'*Asimina triloba, *Dun.* (con una tavola) . . . . . N.° 11

PASQUALE G. A. — *Cenni sulla Flora di Assab* . . . . . N.° 12

COSTA A. — *Notizie ed osservazioni sulla Geo-Fauna Sarda* (Memoria quarta) . . . N.° 13

BALSAMO F. — *Sulla storia naturale delle Alghe d'acqua dolce del Comune di Napoli* (con due tavole) . . . . . N.° 14

APPENDICE

MALERBA P. — *Sulla natura e costituzione chimica dei grassi delle castagne comuni e su di una sostanza nuova in essi scoperta* . . . . . N.° 1

MAROTTA A. — *Studi sulla struttura dell'Amnios del gatto* (con tre tavole) . . . . . N.° 2

RHO F. — *Studi sullo sviluppo della* Chromodoris elegans (con due tavole) . . . . N.° 3

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCA DELLE OPERAZIONI INVARIANTIVE FRA PIÙ SERIE DI VARIABILI PERMUTABILI CON OGNI ALTRA OPERAZIONE INVARIANTIVA FRA LE STESSE SERIE

MEMORIA

del Socio Ordinario ALFREDO CAPELLI

presentata nella tornata del dì 14 gennaio 1888.

Date più serie di variabili

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 , x_2 , \ldots , x_\mu \\ y &\equiv y_1 , y_2 , \ldots , y_\mu \\ z &\equiv z_1 , z_2 , \ldots , z_\mu \\ &\ldots\ldots , \end{aligned}$$

ci proponiamo la ricerca di quelle operazioni

$$\Delta = \mathrm{J}\,(\mathrm{D}_{xx} , \mathrm{D}_{xy} , \mathrm{D}_{yx} , \mathrm{D}_{xz} , \ldots) ,$$

dove J è simbolo di aggregato razionale intero a coefficienti costanti, e in generale

$$\mathrm{D}_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots + q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} ,$$

che godono delle proprietà di essere *permutabili* con ogni altra operazione di questa stessa natura, formata cogli stessi gruppi di variabili. In una Nota presentata recentemente a quest'Accademia *), abbiamo esaurito tale ricerca per il caso di due sole

*) *Determinazione delle operazioni invariantive fra due serie di variabili permutabili con ogni altra operazione della stessa specie* (*Rendiconto,* 3 Dicembre 1887).

serie x, y di variabili; senonchè il metodo, del tutto speciale a tale caso, di cui ci siamo serviti in quella Nota, difficilmente potrebbe estendersi ad un numero maggiore di serie di variabili. Colla presente Memoria verremo pertanto ad esporre nuovi metodi che ci permetteranno di proseguire nella stessa ricerca per il caso di tre o più serie di variabili. Nel primo paragrafo tratteremo il caso di tre serie di variabili con un primo metodo, il quale, abbastanza semplice per questo caso, riuscirebbe in seguito forse troppo complicato. Onde col secondo paragrafo riprenderemo la questione con un secondo metodo applicabile indistintamente ad un numero qualsivoglia di serie di variabili.

I.

1. Incominciando dal caso di tre serie x, y, z di variabili, limiteremo innanzi tutto il problema a determinare quali siano le operazioni fra queste variabili permutabili con ogni altra fra le stesse variablli, le quali (analogamente alle due operazioni che nella Nota sopra citata abbiamo dimostrato risolvere il problema pel caso di due sole serie *), godono della proprietà di contenere in ogni termine della loro espressione una sola derivazione, al più, rispetto ad ognuna delle tre serie di variabili. Per un noto teorema fondamentale **), ogni cosiffatta operazione sarà necessariamente una funzione lineare a coefficienti costanti delle 15 operazioni seguenti:

$$(a)\begin{cases} D_{xy}\,.\,D_{yz}\,.\,D_{zx}\,, \\ D_{yx}\,.\,D_{xz}\,.\,D_{zy}\,, \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} D_{xx}\,.\,D_{yz}\,.\,D_{zy}\,, \\ D_{yy}\,.\,D_{xz}\,.\,D_{zx}\,, \\ D_{zz}\,.\,D_{xy}\,.\,D_{yx}\,, \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} D_{yz}\,.\,D_{zy}\,, \\ D_{xz}\,.\,D_{zx}\,, \\ D_{xy}\,.\,D_{yx}\,, \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} D_{xx}\,.\,D_{yy}\,.\,D_{zz}\,, \quad D_{xx}\,.\,D_{yy}\,, \quad D_{xx}\,.\,D_{zz}\,, \quad D_{yy}\,.\,D_{zz} \\ \qquad\qquad D_{xx}\,, \quad D_{yy}\,, \quad D_{zz}\,. \end{cases}$$

Poichè le operazioni comprese in ognuno dei gruppi (a), (b), (c) si deducono da una di esse mediante permutazioni fra le lettere x, y, z, le quali non possono alterare un'operazione Θ che goda della proprietà voluta di permutabilità [giacchè si è altrove dimostrato ***) che una siffatta operazione è sempre *simmetrica* nelle x, y, z], è facile vedere primieramente che in luogo delle tre operazioni (a) basterà considerare la loro somma. E poichè questa somma differisce dalla nota operazione

$$\begin{gathered} H_{x,y,z} \equiv H_3 \equiv D_{xy}\,D_{yz}\,D_{zx} + D_{yx}\,D_{xz}\,D_{zy} - \\ - D_{xx}\,D_{yz}\,D_{zy} - D_{yy}\,D_{xz}\,D_{zx} - D_{zz}\,D_{xy}\,D_{yx} \\ - D_{yz}\,D_{zy} - D_{xz}\,D_{zx} + D_{xx}\,D_{yy}\,D_{zz} + D_{xx}\,D_{zz} + 2\,D_{yy}\,D_{zz} + 2\,D_{zz} \end{gathered}$$

*) Cioè le due operazioni

$$K = D_{xx} + D_{yy}$$

ed

$$H_{xy} = D_{yy}\,D_{xx} + D_{xx} - D_{yx}\,D_{xy}\,.$$

**) *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche*, § I. (*Memorie delle R. Acc. dei Lincei*, vol. XII).

***) *Sopra la permutabilità delle operazioni invariantive* (Rendiconti della R. Acc. di Napoli, 1886).

permutabile con ogni operazione fra le x, y, z, soltanto per terminini che rappresentano operazioni dei gruppi successivi (b), (c), (d), così è chiaro che basterà considerare in luogo del gruppo (a) la sola operazione H_3.

Per simil ragione in luogo delle tre operazioni del gruppo (b) basterà prendere la loro somma. Ma le tre operazioni fra due serie di variabili

$$-H_{yz} = D_{yz} D_{zy} - D_{yy} D_{zz} - D_{zz} = -H_{zy}$$
$$-H_{xz} = D_{xz} D_{zx} - D_{xx} D_{zz} - D_{zz} = -H_{zx}$$
$$-H_{xy} = D_{xy} D_{yx} - D_{xx} D_{yy} - D_{yy} = -H_{yx} ,$$

ciascuna delle quali è permutabile con ogni altra operazione fra gli stessi due gruppi di variabili, moltiplicate risp. *a sinistra* per D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}, e sommate ci dànno un'operazione

$$L = D_{xx} H_{yz} + D_{yy} H_{xz} + D_{zz} H_{yx} \tag{2}$$

che differisce dalla somma delle (b) soltanto per operazioni del gruppo (d). Si potrà dunque al gruppo (b) sostituire l'operazione L.

E finalmente si vede, assolutamente allo stesso modo, che, in luogo delle operazioni (c), basterà considerare l'unica operazione

$$H_2 = H_{yz} + H_{xz} + H_{yx} . \tag{3}$$

Pertanto l'operazione Θ, che gode della proprietà voluta, sarà compresa necessariamente nella forma

$$\Theta = \alpha . H_3 + \beta . H_2 + \gamma . L + f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) , \tag{4}$$

dove α, β, γ sono coefficienti costanti ed f esprime una funzione intera a coefficienti del pari costanti.

2. Ciò posto, passiamo a dimostrare che l'operazione H_2, da noi introdotta ora, è già permutabile, al pari della H_3 con ogni operazione fra le x, y, z. A tale oggetto incominciamo dallo stabilire in che differiscano fra loro i due prodotti $D_{xy} . H_{xz}$ ed $H_{xz} . D_{xy}$.

Potendosi anche scrivere H_{xz} sotto la forma

$$H_{xz} = -D_{zx} D_{xz} + D_{zz} D_{xx} + D_{xx}$$

che si deduce dalla precedente collo scambio di x in z, si ha

$$D_{xy} H_{xz} = D_{zz} D_{xy} D_{xx} + D_{xy} D_{xx} - D_{xy} D_{zx} D_{xz} =$$
$$= (D_{zz} + 1) D_{xy} D_{xx} - D_{xy} D_{zx} D_{xz} ;$$

e poichè

$$D_{xy} D_{xx} = D_{xx} D_{xy} + D_{xy} \quad , \quad D_{xy} D_{zx} = D_{zx} D_{xy} + D_{zy} ,$$

si ha anche sostituendo

$$D_{xy} H_{xz} = \{ D_{zz} D_{xx} + D_{xx} - D_{zx} D_{xz} \} D_{xy} + D_{zz} D_{xy} - D_{zy} D_{xz} + D_{xy} ,$$

onde

$$D_{xy} H_{xz} - H_{xz} D_{xy} = D_{zz} D_{xy} - D_{zy} D_{xz} + D_{xy} ,$$

il che può anche scriversi

$$(5) \qquad D_{xy} H_{xz} - H_{xz} D_{xy} = D_{zz} D_{xy} - D_{xz} D_{zy} .$$

Similmente si trova

$$D_{yx} H_{xz} = D_{yx} D_{zz} D_{xx} + D_{yx} D_{xx} - D_{zx} D_{yx} D_{xz} =$$
$$= (D_{zz} + 1)(D_{xx} D_{yx} - D_{yx}) - D_{zx} (D_{xz} D_{yx} - D_{yz}) =$$
$$= \{ D_{zz} D_{xx} + D_{xx} - D_{zx} D_{xz} \} D_{yx} - D_{zz} D_{yx} - D_{yx} + D_{zx} D_{yz} ,$$

onde

$$D_{yx} H_{xz} - H_{xz} D_{yx} = D_{zx} D_{yz} - D_{zz} D_{yx} - D_{yx}$$

e anche

$$(6) \qquad D_{yx} H_{xz} - H_{xz} D_{yx} = D_{yz} D_{zx} - D_{zz} D_{yx} .$$

3. Se nella (5) scambiamo fra loro le lettere x ed y, otteniamo

$$D_{yx} H_{yz} - H_{yz} D_{yx} = D_{zz} D_{yx} - D_{yz} D_{zx} ,$$

onde sommando membro a membro con la (6)

$$D_{yx} H_{xz} - H_{xz} D_{yx} + D_{yx} H_{yz} - H_{yz} D_{yx} = 0 ,$$

cioè anche

$$(7) \qquad D_{yx} (H_{xz} + H_{yz}) = (H_{xz} + H_{yz}) D_{yx} ;$$

e scambiando fra loro x ed y

$$D_{xy} (H_{xz} + H_{yz}) = (H_{xz} + H_{yz}) D_{xy} ,$$

onde sommando con l' identità

$$(8) \qquad D_{xy} H_{xy} = H_{xy} D_{xy} ,$$

si ottiene

$$D_{xy} (H_{xy} + H_{yz} + H_{xz}) = (H_{xy} + H_{yz} + H_{xz}) D_{xy} ,$$

cioè appunto

$$(9) \qquad D_{xy} H_2 = H_2 D_{xy} ,$$

come si era asserito. Infatti, poichè la H_2 è simmetrica nelle x, y, z, segue senz' altro di qui che essa sarà del pari permutabile con le altre operazioni elementari D_{yx}, D_{yz}, . . ., fra le x, y, z.

4. Venendo ora all'operazione L, si ha

$$D_{xy} \,.\, L = D_{xy} D_{xx} H_{yz} + D_{xy} D_{yy} H_{xz} + D_{zz} D_{xy} H_{yx} =$$
$$= D_{xx} D_{xy} H_{yz} + D_{yy} D_{xy} H_{xz} + D_{zz} D_{xy} H_{yx} +$$
$$+ D_{xy} H_{yz} - D_{xy} H_{xz} ,$$

onde, sottraendo dall'eguaglianza

$$L \,.\, D_{xy} = D_{xx} H_{yz} D_{xy} + D_{yy} H_{xz} D_{xy} + D_{zz} H_{yx} D_{xy} ,$$

si ottiene, a cagione della (8),

$$D_{xy} \,.\, L - L \,.\, D_{xy} =$$
$$= D_{xx} (D_{xy} H_{yz} - H_{yz} D_{xy}) + D_{yy} (D_{xy} H_{xz} - H_{xz} D_{xy}) + D_{xy} (H_{yz} - H_{xz}) \,^{*}.$$

Ma dalle (5) e (6) si deduce

$$(10) \qquad D_{xy} H_{yz} - H_{yz} D_{xy} = - (D_{xy} H_{xz} - H_{xz} D_{xy}) = D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy} ,$$

onde

$$(11) \qquad D_{xy} \,.\, L - L \,.\, D_{xy} = (D_{xx} - D_{yy}) (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) + D_{xy} (H_{yz} - H_{xz}) .$$

A questa formola fa riscontro quest'altra

$$(11)' \qquad D_{xy} \,.\, L - L \,.\, D_{xy} = (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) (D_{xx} - D_{yy}) + (H_{yz} - H_{xz}) D_{xy} ,$$

che si può dedurre dalla (10) come segue: Poichè

$$(D_{xx} - D_{yy}) (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) = (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) (D_{xx} - D_{yy} - 2) ,$$

la (10) può scriversi

$$D_{xy} \,.\, L - L \,.\, D_{xy} = (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) (D_{xx} - D_{yy})$$
$$- 2 (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) + D_{xy} (H_{yz} - H_{xz}) .$$

Ma dalle (10) si ha

$$- 2 (D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) = - D_{xy} H_{yz} + H_{yz} D_{xy} + D_{xy} H_{xz} - H_{xz} D_{xy} ,$$

il che sostituito nella eguaglianza precedente, la riduce appunto alla forma (11)'.

5. Ritornando ora alla espressione (4) dell'operazione Θ, ed esprimendo che essa deve essere permutabile con D_{xy}, che già si è dimostrato essere permutabile con H_3 ed H_2, si avrà la condizione

$$D_{xy} \,.\, \left\{ \gamma \,.\, L + f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) \right\} = \left\{ \gamma \,.\, L + f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) \right\} .\, D_{xy} ,$$

* Si potrebbe anche scrivere

$$D_{xy} L - L D_{xy} = D_{xy} H_{yz} D_{xx} - D_{xx} H_{yz} D_{xy} + D_{xy} H_{xz} D_{yy} - D_{yy} H_{xz} D_{xy} .$$

cioè per la (11)

$$\gamma \cdot \left\{ (D_{xx} - D_{yy})(D_{xz} D_{zy} - D_{zz} D_{xy}) + D_{xy}(H_{yz} - H_{xz}) \right\} =$$

$$= f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) \cdot D_{xy} - D_{xy} \cdot f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) =$$

$$= D_{xy} \left\{ f(D_{xx} - 1, D_{yy} + 1, D_{zz}) - f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) \right\},$$

la quale identità, per i teoremi fondamentali sulle operazioni, non può sussistere che per $\gamma = 0$ e per

$$f(D_{xx} - 1, D_{yy} + 1, D_{zz}) - f(D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}) = 0 .$$

Indicando con ξ, η, ζ tre variabili indipendenti, la funzione $f(\xi, \eta, \zeta)$ dovrà dunque soddisfare alla condizione

$$f(\xi - 1, \eta + 1, \zeta) = f(\xi, \eta, \zeta);$$

e similmente, partendo dalla permutabilità di Θ con D_{yz} e D_{zx}, si dimostrerà dover soddisfare alle condizioni

$$f(\xi, \eta - 1, \zeta + 1) = f(\xi, \eta, \zeta)$$

$$f(\xi + 1, \eta, \zeta - 1) = f(\xi, \eta, \zeta),$$

onde si conclude facilmente

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi + \eta + \zeta) .$$

Introducendo dunque l'operazione

$$H_1 = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz},$$

che è evidentemente permutabile con ogni operazione fra le x, y, z, si trova come espressione generale di Θ

$$\Theta = \alpha \cdot H_3 + \beta H_2 + \varphi(H_1),$$

e considerando che Θ si è supposto di grado non superiore al primo nelle derivazioni rispetto ad ogni serie di variabili

$$\Theta = \alpha \cdot H_3 + \beta \cdot H_2 + \varepsilon \cdot H_1,$$

dove α, β, ε sono tre coefficienti costanti, che restano del tutto arbitrari, poichè le tre operazioni

$$H_1 = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}$$

$$H_2 = H_{xy} + D_{yz} + H_{zx}$$

$$H_3 = H_{xyz}$$

sono già permutabili, ognuna di per sè, con qualsiasi operazione fra le x, y, z.

II.

1. Per generalizzare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente, consideriamo ora un numero qualunque n di serie di variabili $x, y, z, t, \ldots, u, \ldots, v$. È noto che fra le serie di variabili $x, y, z, t, \ldots, u$ si ha primieramente l'operazione $H_{x,y,z,\ldots,u}$ che può definirsi per mezzo di variabili *ausiliarie* (cioè non contenute nelle funzioni alle quali deve applicarsi l'operazione) con

$$H_{xyz\ldots u} = \begin{vmatrix} D_{\xi x} & D_{\xi y} & \ldots & D_{\xi u} \\ D_{\eta x} & D_{\eta y} & \ldots & D_{\eta u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{\omega x} & D_{\omega y} & \ldots & D_{\omega u} \end{vmatrix} D_{x\xi} D_{y\eta} D_{z\zeta} \ldots D_{u\omega} ,$$

la quale è permutabile con ogni operazione fra le $x, y, z, \ldots, u$ *).

Se invece si consideri l'operazione $H_{yz\ldots u}$ fra le sole $y, z, \ldots, u$, questa non sarà permutabile con D_{xy}, come non lo è l'operazione $H_{xz\ldots u}$ fra le sole $x, z, \ldots, u$. Ma se si prenda la loro somma

$$H_{yzt\ldots u} + H_{xzt\ldots u} ,$$

possiamo dimostrare che la nuova operazione così composta riuscirà ancor permutabile con D_{xy}.

Partendo infatti dalle espressioni formate colle variabili ausiliarie

$$H_{yzt\ldots u} = \left\{ \sum \pm D_{\eta y} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . D_{y\eta} D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega}$$

ed

$$H_{xzt\ldots u} = \left\{ \sum \pm D_{\xi x} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . D_{x\xi} D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega} ,$$

si può scrivere

$$D_{xy} . (H_{yzt\ldots u} + H_{xzt\ldots u}) =$$

$$= \left\{ \sum \pm D_{\eta y} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . (D_{y\eta} D_{xy} - D_{x\eta}) . D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega}$$

$$(1) \qquad + \begin{vmatrix} D_{\xi x} D_{xy} + D_{\xi y} & D_{\xi z} & D_{\xi t} \ldots D_{\xi u} \\ D_{\zeta x} D_{xy} + D_{\zeta y} & D_{\zeta z} & D_{\zeta t} \ldots D_{\zeta u} \\ D_{\tau x} D_{xy} + D_{\tau y} & D_{\tau z} & D_{\tau t} \ldots D_{\tau u} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{\omega x} D_{xy} + D_{\omega y} & D_{\omega z} & D_{\omega t} \ldots D_{\omega u} \end{vmatrix} D_{x\xi} D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega} .$$

*) V. *Fondamenti etc.*, *l. c.*, § III. Per l'espressione diretta di $H_{xyz\ldots u}$ in funzione delle D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, $D_{yx}, \ldots$, vedi il § III di questa stessa Memoria. Finalmente è da notarsi anche l'espressione

$$H_{xy\ldots u} = \sum_i (x_{i_1} y_{i_2} \ldots u_{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial u_{i_k}} \right),$$

dove la sommatoria nel secondo membro va estesa ai $\binom{\mu}{k}$ sistemi di indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ che si possono formare coi μ indici $1, 2, 3, \ldots, \mu$ che servono a designare le differenti variabili di una stessa serie.

Ma è facile riconoscere che si ha, scambiando fra loro, come è sempre lecito, le variabili ausiliarie da eliminarsi ξ ed η,

$$\left\{ \sum \pm D_{\eta y} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . D_{x\eta} D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega} =$$

$$= \left\{ \sum \pm D_{\xi y} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . D_{x\xi} D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega} ,$$

dove il determinante del secondo membro altro non è che uno dei due determinanti nei quali si decompone (corrispondentemente alla decomposizione in due parti fatta negli elementi della prima colonna) il secondo dei due determinanti che si trovano nel secondo membro di (1). Perciò la (1) si riduce a

$$D_{xy} . (H_{yzt \ldots u} + H_{xzt \ldots u}) =$$

$$= \left\{ \sum \pm D_{\eta y} D_{\zeta z} D_{\tau t} \ldots D_{\omega u} \right\} . D_{y\eta} D_{xy} . D_{z\zeta} D_{t\tau} \ldots D_{u\omega} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\xi x} D_{xy} & D_{\xi z} & D_{\xi t} \ldots D_{\xi u} \\ D_{\zeta x} D_{xy} & D_{\zeta z} & D_{\zeta t} \ldots D_{\zeta u} \\ D_{\tau x} D_{xy} & D_{\tau z} & D_{\tau t} \ldots D_{\tau u} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{\omega x} D_{xy} & D_{\omega z} & D_{\omega t} \ldots D_{\omega u} \end{vmatrix} D_{x\xi} D_{z\zeta} D_{\tau t} \ldots D_{u\omega}$$

cioè appunto ci dà

$$D_{xy} . (H_{yzt \ldots u} + H_{xzt \ldots u}) = (H_{yzt \ldots u} + H_{xzt \ldots u}) D_{xy} .$$

2. Se ora formiamo l'operazione

$$H_k = \sum_k H_{xyz \ldots u} ,$$

dove la sommatoria del secondo membro va estesa a tutti i gruppi di k lettere x, y, z, .., u, che si possono formare con le n lettere x, y, z, .., v rappresentanti le n serie di variabili, è facile riconoscere che l'operazione H_k sarà permutabile con ogni altra operazione fra le stesse n serie di variabili $x, y, z, \ldots, v$. Sia infatti D_{pq} un'operazione elementare qualunque (p diverso da q) fra le n serie $x, y, z, \ldots, v$. Quei termini della sommatoria che non dipendono nè da p nè da q, ovvero contengono *simultaneamente* p e q sono permutabili, come sappiamo, ciascuno di per sè, con D_{pq}. Quanto ai rimanenti termini, essi potranno evidentemente aggrupparsi in tante coppie della forma

$$H_{pzt \ldots u} + H_{qzt \ldots u} ,$$

ed allora ogni coppia sarà permutabile a D_{pq} in virtù di quanto si è dimostrato all'art. precedente. Perciò l'intera operazione H_k sarà permutabile a D_{pq}. Essa è poi evidentemente permutabile alle operazioni della forma D_{pq}, poichè lo è già evidentemente ogni suo singolo termine; onde essa sarà permutabile, secondo l'asserto, con ogni operazione fra le n serie date.

Si vede dunque che fra le n serie di variabili $x, y, z, t, \ldots, v$ si hanno così n operazioni, ciascuna delle quali è permutabile a tutte le altre operazioni fra le stesse serie, cioè le n operazioni (oltre all'operazione $H_0 = 1$)

$$H_1 = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} + \ldots + D_{vv}$$

$$H_2 = H_{xy} + H_{xz} + H_{yz} + \ldots + H_{uv}$$

$$H_3 = H_{xyz} + H_{xyt} + H_{xyv} + \ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$H_n = H_{xyz \ldots v},$$

le quali è facile riconoscere essere fra loro *linearmente indipendenti* per mezzo dei criteri generali, da noi stabiliti altrove *), relativamente alle identità che possono aver luogo fra le operazioni. Supposto infatti, se è possibile, che sussistesse una relazione e coefficienti costanti della forma

$$\alpha_\lambda \cdot H_\lambda + \alpha_{\lambda-1} \cdot H_{\lambda-1} + \ldots + \alpha_2 \cdot H_2 + \alpha_1 \cdot H_1 + \alpha_0 = 0 ,$$

considerando che nel primo membro i termini di grado più alto nelle operazioni elementari $D_{xx}, D_{xy}, \ldots$, sono tutti compresi in H **), se ne dedurrebbe agevolmente, in base a quei criterii, dover essere $\alpha_\lambda = 0$. Dall'identità residua

$$\alpha_{\lambda-1} \cdot H_{\lambda-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot H_1 + \alpha_0 = 0 ,$$

si dedurrebbe quindi similmente $\alpha_{\lambda-1} = 0$, e così di seguito.

3. Ciò posto, ci proponiamo ora di dimostrare che *l'operazione più generale (di grado non superiore al primo rispetto ad ogni indice di derivazione), che indicheremo con* Q, *permutabile con ogni altra operazione fra le stesse* n *serie* x, y, z, t, ..., v, *altro non è che una combinazione lineare*

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \ldots + \alpha_n H_n ,$$

a coefficienti costanti, delle n *operazioni speciali sopra trovate.*

A tale oggetto cominciamo dall'osservare che, introducendo n serie di variabili ausiliarie $\xi, \eta, \zeta, \tau, \ldots, \omega$, e sostituendo, nel senso noto di operare sempre su funzioni indipendenti dalle $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$, in luogo di D_{xp} il prodotto equivalente $D_{\xi p} D_{x\xi}$, in luogo di D_{yq} l'equivalente $D_{\eta q} D_{y\eta}$ ecc., e quindi permutando opportunamente col noto metodo, in ogni termine di Q l'ordine delle operazioni elementari, si potrà scrivere Q sotto la forma

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n ,$$

*) *Sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive* (Rendiconto della R. Acc. di Napoli. Giugno 1887).

**) Cfr. anche l'espressione della H in funzione diretta delle $D_{xx}, D_{xy}, \ldots$ citata al § III. di questa Memoria.

dove Q_0 è una costante, e dove in generale Q_k è della forma

$$(2) \qquad Q_k = \sum_{x, y, \ldots, s} \Delta \cdot D_{x\xi} D_{y\eta} D_{z\zeta} \ldots {}_{s\sigma},$$

il segno sommatorio dovendo estendersi a tutte le combinazioni possibili di k lettere $x, y, \ldots, s$ scelte fra le n lettere $x, y, z, \ldots, v$, e Δ indicando un'operazione composta di soli elementi della forma

$$D_{\xi p}, D_{\eta q}, D_{\zeta r}, \ldots (p, q, r, \ldots \equiv x, y, z \ldots).$$

Poichè la Q dev'essere simmetrica, come sappiamo *), nelle $x, y, z, \ldots, v$, così evidentemente ci è lecito ritenere il medesimo per ognuna delle n operazioni $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Ed ora ci proponiamo di far vedere che queste ultime devono coincidere, fatta astrazione da un fattore costante, rispettivamente con le operazioni sopra definite $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

4. Invero, supponiamo ciò già dimostrato per le prime $k-1$, cioè che si abbia

$$Q_1 = a_1 \cdot H_1, \; Q_2 = a_2 \cdot H_2, \ldots, Q_{k-1} = a_{k-1} H_{k-1},$$

dove le a sono coefficienti costanti. Se poniamo

$$Q - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_{k-1} = Q',$$

è chiaro che l'operazione

$$Q' = Q_k + Q_{k+1} + \ldots + Q_n$$

sarà del pari permutabile con ogni operazione fra le $x, y, z, \ldots, v$, poichè delle operazioni $Q, H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$, mediante le quali essa si esprime, la prima lo è per ipotesi, e le altre lo sono in virtù di quanto si è già dimostrato.

Ciò posto, consideriamo la funzione intera monomia di k variabili

$$f = x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 \ldots s_k.$$

Per la permutabilità di Q' si avrà

$$D_{xy} Q' \cdot f = Q' D_{xy} \cdot f,$$

ossia

$$D_{xy} Q_k \cdot f + D_{xy} Q_{k+1} \cdot f + \ldots + D_{xy} Q_n \cdot f =$$
$$= Q_k D_{xy} \cdot f + Q_{k+1} D_{xy} \cdot f + \ldots + Q_n D_{xy} \cdot f.$$

Ma per la forma delle derivazioni contenute nelle Q, si ha evidentemente

$$Q_{k+1} f = Q_{k+2} f = \ldots = Q_n f = 0,$$

*) *Sopra la permutabilità ecc.*, l. c.

poichè f non dipende che da sole k serie di variabili, ed *a fortiori* si ha

$$Q_k D_{xy} \cdot f = 0 \ , \ Q_{k+1} D_{xy} \cdot f = Q_{k+2} D_{xy} \cdot f = \ldots = Q_n D_{xy} \cdot f = 0 \ ,$$

poichè D_{xy}, f non dipende che da sole $k-1$ serie di variabili $y, z, \ldots, s$. Si ha dunque come conseguenza della relazione (3)

$$D_{xy} Q_k \cdot f = 0 \ . \tag{4}$$

Poniamo ora per brevità

$$\begin{array}{l}
D_{\xi x} = \theta_1 \ , D_{\xi y} = \theta_2 \ , D_{\xi z} = \theta_3 \ , \ldots , D_{\xi s} = \theta_k \\
D_{\eta x} = \vartheta_1 \ , D_{\eta y} = \vartheta_2 \ , D_{\eta z} = \vartheta_3 \ , \ldots , D_{\eta s} = \vartheta_k \\
D_{\zeta x} = \delta_1 \ , D_{\zeta y} = \delta_2 \ , D_{\zeta z} = \delta_3 \ , \ldots , D_{\zeta s} = \delta_k \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_{\sigma x} = \psi_1 \ , D_{\sigma y} = \psi_2 \ , D_{\sigma z} = \psi_3 \ , \ldots , D_{\sigma s} = \psi_k \ ,
\end{array}$$

e sia

$$Q'_k = \varphi(\theta_1, \theta_3, \ldots ; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots ; \ldots) \cdot D_{x\xi} D_{y\eta} \ldots D_{s\sigma} \tag{5}$$

quello fra gli $\binom{n}{k}$ termini di Q_k, compresi sotto la sommatoria (2), che dipende dalle k serie $x, y, z, \ldots, s$; cosicchè φ sarà una funzione razionale intera di primo grado delle k^2 lettere

$$\begin{array}{l}
\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_k \\
\vartheta_1 , \vartheta_2 , \ldots , \vartheta_k \\
\ldots\ldots\ldots \\
\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots , \sigma_k
\end{array}$$

omogenea rispetto alle k lettere di ogni linea orizzontale, e rispetto alle k lettere di ogni linea verticale. Per essere Q_k, come già si è notato, simmetrica nelle $x, y, \ldots v$, la sua parte Q'_k potrà evidentemente ritenersi simmetrica nelle k lettere $x, y, \ldots, s$, e potrà ritenersi che le altre parti di Q_k si ottengano da questa, sostituendo successivamente alla combinazione delle k lettere $x, y, \ldots, s$ una qualunque delle rimanenti $\binom{n}{k} - 1$ combinazioni delle n lettere date. Intanto, si ha evidentemente

$$Q_k f = Q'_k f \ ,$$

onde per le (4)

$$D_{xy} Q'_k \cdot f = 0 \ .$$

Poichè ora

$$D_{x\xi} D_{y\eta} D_{z\zeta} \ldots D_{s\sigma} \cdot f = \xi_1 \eta_2 \zeta_3 \ldots \sigma_k$$

è facile riconoscere che sarà

$$\begin{aligned}
Q'_k \cdot f &= \varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k ; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k ; \ldots) \cdot \{ \xi_1 \eta_2 \zeta_3 \ldots \sigma_k \} = \\
&= \varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots, s_1 ; x_2, y_2, z_2, \ldots, s_2 ; \ldots) \ ,
\end{aligned}$$

onde dovrà essere identicamente

$$D_{xy} \cdot \varphi(x_1, y_1, \ldots, s_1; x_2, y_2, \ldots, s_2; \ldots) = 0 .$$

Similmente si dimostrerebbe dover essere

$$D_{xz} \cdot \varphi(x_1, y_1, \ldots, s_1; x_2, y_2, \ldots, s_2; \ldots) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_{xs} \cdot \varphi(x_1, y_1, \ldots, s_1; x_2, y_2, \ldots, s_2; \ldots) = 0 ;$$

onde, per un teorema ben noto, considerando che φ è di primo grado in ciascuna delle lettere $x, y, z, \ldots$, come anche in ciascuno degli indici $1, 2, 3, \ldots$, si conclude dover essere

$$\varphi(x_1, y_1, \ldots, s_1; x_2, y_2, \ldots, s_2; \ldots) = A \cdot \sum \pm x_1 y_2 \ldots s_k ,$$

dove A è un fattore costante; quindi

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots; \ldots) = A \cdot \sum \pm \theta_1 \vartheta_2 \ldots \psi_k ,$$

onde per la (5)

$$Q'_k = A \cdot \left\{ \sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\sigma s} \right\} \cdot D_{x\xi} D_{y\eta} \ldots D_{s\sigma} ,$$

cioè precisamente

$$Q'_k = A \cdot H_{xy \ldots s} .$$

Di quì segue ora, per quanto si è osservato sopra circa la simmetria di Q_k,

$$Q_k = A \cdot \sum H_{xy \ldots s} ,$$

dove la sommatoria dovrà estendersi a tutte le $\binom{n}{k}$ combinazioni delle n lettere x, $y, \ldots, v$ prese k a k, cioè si ha appunto

$$Q_k = A \cdot H_k ,$$

come si doveva dimostrare, volendo stabilire per via induttiva quanto si era asserito. I teorema resta così dimostrato.

III.

1. Abbiamo dimostrato altrove *) che l'operazione $H_{xyz\ldots v}$, da noi designata nel § prec. con H_n, viene espressa mediante le n^2 operazioni elementari D_{xx}, D_{xy}, ... dal determinante

$$H_n = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & \ldots & D_{xv} \\ D_{yx} & D_{yy}+1 & D_{yz} & \ldots & D_{yv} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz}+2 & \ldots & D_{zv} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \ldots & \cdot\cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & D_{vz} & \ldots & D_{vv}+(n-1) \end{vmatrix}$$

da svilupparsi in modo che gli n fattori operativi, di cui si compone ogni termine dello sviluppo, si seguano da destra a sinistra nello stesso ordine secondo il quale si trovano scritti nelle rispettive colonne del determinante di cui fanno parte, contate del pari da destra verso sinistra. Consideriamo ora l'operazione analoga più generale

$$(1) \qquad H_n(\rho) = \begin{vmatrix} D_{xx}+\rho & D_{xy} & D_{xz} & D_{xv} \\ D_{yx} & D_{yy}+1+\rho & D_{yz} & D_{yv} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz}+2+\rho & D_{zv} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & D_{vz} & D_{vv}+(n-1)+\rho \end{vmatrix},$$

in cui ρ è un parametro da determinarsi ad arbitrio, cosicchè sarà in particolare per $\rho = 0$

$$H_n(0) = H_n .$$

Ci proponiamo di dimostrare che l'operazione $H_n(\rho)$ è *permutabile con ogni operazione fra le* x, y, ..., v *comunque si fissi il valore del parametro* ρ.

2. A tale oggetto comincieremo dal dimostrare che se l'operazione $H_n(\rho)$ è permutabile con ogni altra fra le $x, y, \ldots, v$, anche l'operazione $H_n(\rho+1)$ lo sarà del pari. E poichè $H_n(\rho+1)$ è evidentemente permutabile alle operazioni $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$ ad indici eguali, basterà dimostrare che essa è permutabile ad ogni operazione elementare D_{pq}, in cui p e q siano due serie diverse di variabili scelte comunque fra le $x, y, \ldots, v$.

Se indichiamo per brevità con $(x, y, \ldots, v)$ il determinante

$$\sum \pm x_1 y_2 \ldots v_n$$

il quale è annullato da ogni operazione D_{pq} ad indici distinti, e con f una funzione arbitraria delle serie di variabili $x, y, \ldots, v$, si ha evidentemente

$$(2) \qquad H_n(\rho) \cdot \{(xy\ldots v) \cdot f\} = (xy\ldots v) \cdot H_n(\rho+1) \cdot f ,$$

*) *Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation* Ω *auf gewöhnliche Polar-Operationen* (Mathematische Annalen, Band XXIX. Leipzig 1887).

onde anche, sostituendo in luogo della funzione arbitraria f la funzione $D_{pq} f$,

$$(3)\qquad \begin{aligned}(x\,y\ldots v)\,.\,H_n(\rho+1)\,.\,D_{pq}\,.\,f &= H_n(\rho)\left\{(x\,y\ldots v)\,.\,D_{pq}\,f\right\}=\\ &= H_n(\rho)\,.\,D_{pq}\,.\left\{(x\,y\ldots v)\,f\right\}.\end{aligned}$$

Ma, essendo per ipotesi $H_n(\rho)$ permutabile a D_{pq}, si può scrivere

$$H_n(\rho)\,.\,D_{pq}\left\{(x\,y\ldots v)\,f\right\} = D_{pq}\,.\,H_n(\rho)\left\{(x\,y\ldots v)\,f\right\}$$

ed anche, applicando nuovamente la (2),

$$\begin{aligned}H_n(\rho)\,.\,D_{pq}\left\{(x\,y\ldots v)\,f\right\} &= D_{pq}\left\{(x\,y\ldots v)\,.\,(H_n\,\rho+1)\,f\right\}\\ &= (x\,y\ldots v)\,.\,D_{pq}\,.\,H_n(\rho+1)\,.\,f\,.\end{aligned}$$

Sostituendo ora questo risultato nella (3), si ha

$$(x\,y\ldots v)\,.\,H_n(\rho+1)\,.\,D_{pq}\,.\,f = (x\,y\ldots v)\,.\,D_{pq}\,.\,H_n(\rho+1)\,.\,f$$

o anche

$$(x\,y\ldots v)\,.\left\{[H_n(\rho+1)\,.\,D_{pq} - D_{pq}\,H_n(\rho+1)]\,f\right\} = 0\,.$$

Poichè ora il fattore $(x\,y\ldots v)$ non è evidentemente nullo, dovrà esserlo il secondo fattore del primo membro, cioè si avrà, essendo f funzione arbitraria,

$$H_n(\rho+1)\,.\,D_{pq} = D_{pq}\,.\,H_n(\rho+1),$$

con che resta stabilito che anche l'operazione $H_n(\rho+1)$ sarà permutabile con ogni altra operazione fra le $x, y, \ldots, v$.

3. Poichè ora l'operazione $H_n(0) = H_{xy\ldots v}$ è effettivamente permutabile, come sappiamo, con ogni altra fra le $x, y, \ldots, v$, ne consegue, in virtù del lemma ora dimostrato, che lo sarà del pari l'operazione $H_n(1)$; quindi, sempre in virtù dello stesso lemma, lo saranno tutte le operazioni $H_n(2)$, $H_n(3)$, ... L'operazione generale $H_n(\rho)$ godrà dunque di tale permutabilità per tutti i valori interi e positivi di ρ, e quindi, per un noto principio algebrico, essendo $H_n(\rho)$ del grado limitato n rispetto a ρ, dovrà godere della stessa permutabilità per ogni valore di ρ, come appunto volevasi dimostrare.

Ed invero, applicando la nota formola d'interpolazione di Lagrange, ogni operazione $H_n(\rho)$ si potrà esprimere in funzione lineare a coefficienti costanti di $n+1$ fra esse, per esempio in funzione delle $n+1$ operazioni

$$1\ ,\ H_n(0)\ .\ H_n(1), \ldots, H_n(n-1),$$

che si ottengono dando a ρ i valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

4. Sia

$$H_n(\rho) = \rho^n + \rho^{n-1}.\,K_1 + \rho^{n-2}.\,K_2 + \ldots + \rho\,.\,K_{n-1} + K_n$$

lo sviluppo di $H_n(\rho)$ secondo le potenze discendenti di ρ. I coefficienti $K_1, K_2, \ldots K_n$ saranno altrettante operazioni fra le $x, y, \ldots, v$, l'ultima delle quali coinciderà evi-

dentemente con H_n. Poichè ora $H_n(\rho)$ si è dimostrato dover essere permutabile con ogni operazione fra le $x, y, \ldots, v$, indipendentemente dal valore di ρ, è chiaro che di questa permutabilità dovrà godere ognuna delle n operazioni

$$(5) \qquad K_1, K_2, \ldots, K_n = H_n$$

che si presentano come coefficienti del precedente sviluppo. Queste operazioni, come immediatamente risulta dall'ispezione del determinante (1), sono risp. nelle n^2 operazioni elementari D_{xx}, $D_{xy}, \ldots$, del grado complessivo $1, 2, \ldots, n$ e sono fra di loro linearmente indipendenti. Si vede dunque che il sistema delle operazioni (5), od il suo equivalente (4), dovrà equivalere linearmente al sistema delle n operazioni

$$(6) \qquad H_1, H_2, \ldots, H_n$$

trovate al paragrafo prec.; poichè, per quanto si è stabilito in quel paragrafo, ognuna delle operazioni (5), essendo permutabile a tutte le operazioni fra le $x, y, \ldots, v$, dovrà potersi esprimere in funzione lineare a coefficienti costanti delle (6). E quindi, reciprocamente, ognuna delle (6) dovrà esprimersi similmente in funzione delle n operazioni (5). *Abbiamo così nelle* (4), (5) *e* (6) *risp. tre differenti modi di costruire il sistema fondamentale delle operazioni permutabili con tutte le operazioni fra le* x, y, ..., v.

5. Supponiamo ora per semplicità $\mu = n$, cioè che ognuna delle n serie $x, y, \ldots, v$ contenga n sole variabili, e consideriamo l'operazione di Cayley

$$(7) \qquad \Omega = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_3} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n}$$

la quale, come è noto, è permutabile con tutte le operazioni elementari D_{pq} formate con due serie p, q scelte comunque fra le $x, y, \ldots, v$, *purchè distinte fra loro*. Che se invece di Ω si consideri l'operazione

$$(xy \ldots v) \,.\, \Omega,$$

essa sarà permutabile con *ogni* operazione composta comunque colle $D_{xx}, D_{xy}, \ldots$. Della stessa permutabilità godrà quindi anche, come immediatamente si riconosce, l'operazione

$$(8) \qquad Q_n = (xy \ldots v)^h \,.\, \Omega^h$$

e noi ci proponiamo ora di dimostrare come questa operazione si possa effettivamente esprimere per mezzo delle n operazioni di uno dei sistemi fondamentali a cui siamo pervenuti negli articoli precedenti.

Cominciamo dal notare che per $h = 1$ si ha, come è noto,

$$Q_1 = (xy \ldots v) \,.\, \Omega = H_n = H_n(0),$$

onde, per $h = 2$, si può scrivere

$$Q_2 = (xy \ldots v) \,.\, H_n(0) \,.\, \Omega \,,$$

ed applicando la formola generale (2)

$$Q_2 = H_n(-1) \,.\, (xy \ldots v) \,.\, \Omega = H_n(-1) \,.\, H_n(0) \,.$$

Ed ora per $h = 3$, si potrà scrivere

$$Q_3 = (xy \ldots v) \,.\, Q_2 \,.\, \Omega = (xy \ldots v) \,.\, H_n(-1) \,.\, H_n(0) \,.\, \Omega \,,$$

ed applicando di nuovo la (2)

$$Q_3 = H_n(-2)\, H_n(-1) \,.\, (xy \ldots v)\, \Omega \,,$$

ossia

$$Q_3 = H_n(-2) \,.\, H_n(-1) \,.\, H_n(0) \,.$$

Così procedendo, si troverà, qualunque sia l'intero positivo h,

$$(9) \qquad Q_h = (xy \ldots v)^h \,.\, \Omega^h = H_n(-h+1) \,.\, H_n(-h+2) \ldots H_n(-1)\, H_n(0) \,,$$

dove ora ciascuna delle h operazioni del secondo membro si potrà sempre esprimere, come già si è notato (art. 3), in funzione lineare a coefficienti costanti delle n operazioni fondamentali

$$H_n(n-1) \,,\, H_n(n-2) \quad , \quad H_n(2) \,,\, H_n(1) \,,\, H_n(0) \,,$$

ovvero delle n operazioni dei sistemi equivalenti (5) o (6).

6. Dalla formola generale (2) si deduce, qualunque siano le funzioni cui si applichino i primi ed i secondi membri,

$$(10) \qquad \begin{aligned} H_n(\rho+1) \,.\, &= (xy \ldots v)^{-1} \,.\, H_n(\rho) \,.\, (xy \ldots v) \,. \\ H_n(\rho) \,.\, &= (xy \ldots v)^{-1} \,.\, H_n(\rho-1) \,.\, (xy \ldots v) \,. \\ H_n(\rho-1) \,.\, &= (xy \ldots v)^{-1} \,.\, H_n(\rho-2) \,.\, (xy \ldots v) \,. \,, \end{aligned}$$

onde, sostituendo successivamente le espressioni così trovate nelle precedenti, si perviene alla formola generale

$$(11) \qquad H_n(\rho+h) \,.\, = (xy \ldots v)^{-h}\, H_n(\rho) \,.\, (xy \ldots v)^h \,,$$

dalla quale si ha, in particolare, per $\rho = 0$

$$(12) \qquad H_n(h) = (xy \ldots v)^{-h} \,.\, H_n(0)\, (xy \ldots v)^h \,.$$

Dalla (11) si deduce anche, poichè il primo membro resta inalterato per lo scambio di ρ con h, la formola notevole

$$(13) \qquad (xy \ldots v)^{-h} \,.\, H_n(\rho) \,.\, (xy \ldots v)^h = (xy \ldots v)^{-\rho} \,.\, H_n(h) \,.\, (xy \ldots v)^\rho \,,$$

che sussiste, al pari della (12), qualunque siano i valori dei due numeri reali h e ρ.

Notiamo altresì che la (11), applicata k volte di seguito ad una stessa funzione, ci dà la formola più generale

$$(14) \qquad [H_n(\rho+h)]^h. = (xy\ldots v)^{-h}.[H_u(\rho)]^h.(xy\ldots v)^h.$$

7. Dalle (10) segue evidentemente, considerando le prime i fra esse,

$$H_n(\rho+1)\,H_n(\rho)\ldots H_n(\rho-i).=(xy\ldots)^{-1}.\,H_n(\rho)\,H_n(\rho-1)\ldots H_n(\rho-i-1).(xy\ldots v),$$

onde applicando questa formola h volte di seguito,

$$(15) \qquad \begin{aligned} &H_n(\rho+h)\,H_n(\rho+h-1)\ldots H_n(\rho+h-i).= \\ &=(xy\ldots v).^{-h}\,H_n(\rho).H_n(\rho-1)\ldots H_n(\rho-i).(xy\ldots v)^h; \end{aligned}$$

ed anche questa formola sussisterà poi qualunque siano i valori reali di ρ ed h.

Facendo nella (15) $\rho=0$ ed $i=h-1$, nell'ipotesi che h sia un intero positivo, e confrontando quindi colla (9), si deduce

$$H_n(1).H_n(2)\ldots H_n(h).=(xy\ldots v)^{-h}.\,Q_h.(xy\ldots v)^h,$$

od anche

$$(16) \qquad H_n(1).H_n(2)\ldots H_n(h).=\Omega^h.(xy\ldots v)^h.$$

Da quest'ultima formola e dalla (9) ricaviamo dunque per $\Omega^h.f$ le due espressioni seguenti:

$$(17)\ \Omega^h f=\frac{H_n(-h+1)\ldots H_n(-2)H_n(-1).H_n(0).f}{(xy\ldots v)^h}=H_n(1).H_n(2)\ldots H_n(h).\left\{\frac{f}{(xy\ldots v)^h}\right\}.$$

Finita di stampare il dì 25 febbrajo 1888.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIE ED OSSERVAZIONI SULLA GEO-FAUNA SARDA

MEMORIA SECONDA

Risultamento di ricerche fatte in Sardegna nella primavera del 1882

del Socio Ordinario ACHILLE COSTA

presentata nell' Adunanza del dì 10 aprile 1883

Nello esporre il risultamento delle ricerche zoologiche fatte nella Sardegna nel settembre dell'anno 1881, dichiaravo che sebbene, non ostante la stagione molto inoltrata, io fossi rimasto più che soddisfatto del frutto ottenuto dalle mie indagini, pure per questa ragione medesima mi era nato vivo il desiderio di perlustrare quell' isola in stagione più propizia, sia per la certezza di trovare innanzi di me un campo assai più ubertoso, sia per poter istituire un esteso confronto tra le cose offertemi da que' luoghi in due stagioni molto tra loro distanti.

Il concorso dell'onorevole Ministro della Istruzione Pubblica, Baccelli, che seppe come sempre apprezzare l' importanza di siffatti studii, non che l' altro di questa Accademia mi misero al caso di poter effettuare completamente il progetto che avevo concepito. Dappoichè ho potuto passare in Sardegna ben due mesi e mezzo, cioè dalla metà di aprile al termine di giugno: e vi avrei ancora passato il luglio, se la sessione degli esami universitarii non mi avesse costretto a trovarmi al mio posto nella cennata epoca.

Durante que'due mesi e mezzo non solo ho riveduto in condizioni ben diverse la maggior parte de'luoghi già visitati in settembre, ma ho potuto perlustrarne molti altri, che allora per brevità di tempo non potetti vedere.

Come nel settembre, così ora sono rimasto ben soddisfatto del frutto ottenuto dalle mie ricerche, circoscritte sempre alla Fauna terrestre. E pria di entrare a dire di queste, piacemi notare come da esse sia rimasto pienamente dimostrato quel che la prima volta avevo preveduto, che cioè le ricerche del settembre, sebbene fatte in generale in stagione troppo inoltrata, per questa ragione stessa avrebbero potuto riuscire interessanti. In fatti, molte cose rinvenute in quell'epoca, non le ho vedute nell'altra, non ostante avessi ri-

cercati i medesimi luoghi. Nè intendo parlare di quelle specie rarissime, il cui rinvenimento può dirsi eventuale: come ad esempio il *Dicondylus dromedarius*, il *Cerapterocerus latevittatus* e simili, ma di specie che vi eran comuni, e la cui mancanza debbesi attribuire unicamente alla stagione.

Un' altra circostanza ha molto influito su' risultamenti delle ricerche per gli animali di talune classi. Con le piogge invernali si formano qua e là piccoli pantani, i quali poi nella primavera prosciugansi completamente. Pertanto nelle acque di tali pantani albergano miriadi di minuti Crostacei, che nella primavera inoltrata, e più ancora nella state, col disseccamento delle acque muoiono o rimangono nel fango consolidato in vita latente. Sicchè l'investigatore che percorre la Sardegna in queste stagioni non trova alcun indizio della loro esistenza. Ed in questo anno le piogge essendo cadute soltanto dal mese di marzo in poi, io ho avuto la ventura di trovarli tuttavia colmi, e quindi di poter fare buona raccolta di tali animaletti.

Dal sommario rapporto lettovi nell' adunanza del 14 ottobre dello scorso anno avete già una idea delle cose principali che le ricerche della primavera mi hanno fruttato. Ma lo studio posteriore più minuto fatto del materiale raccolto, molte altre cose di non poca importanza mi ha rivelate. Sul qual proposito dirò che a dileguare molti dubbii che dallo studio su' libri mi avanzavano, mi recai espressamente nel settembre in parecchie città d'Italia onde consultar collezioni e riscontrare qualche opera qui mancante. Così in Firenze ho potuto con molto vantaggio consultare la collezione di Ditteri del Rondani, che il prof. Targioni mise gentilmente a mia disposizione, oltre ad altre collezioni di quel Museo. In Torino conferendo col distinto Coleotterologo Conte Baudi di Selve, che si è pure occupato de' Coleotteri della Sardegna, ho colmate varie lacune relative a determinazione di specie. E nella stessa città ho riveduto ancora una volta le collezioni della Sardegna fatte dal Genè, siccome con molto vantaggio ò osservata la collezione d'Imenotteri dell' ingegnere prof. Giovanni Gribodo. Da ultimo, in Milano ho potuto vedere le belle collezioni di Lepidotteri de' fratelli Turati e l'altra d'Imenotteri del signor Paolo Magretti. Tali mezzi àn contribuito non poco a che il lavoro che oggi presento sia risultato meno imperfetto. Con tutto ciò non posso dire che il materiale raccolto sia stato tutto definito. Sopratutto per talune famiglie molte cose rimangono indeterminate. Ma non potendo per ora superare le difficoltà che si frappongono, anzi che ritardare indefinitamente la pubblicazione del lavoro, preferisco presentarlo con le indicate lacune, che potranno essere colmate in appresso, siccome ora in un' appendice colmerò una parte di quelle rimaste nella prima memoria.

Non ostante queste nuove ricerche molto sono lontano dalla condizione di scrivere il Prodromo della Geo-Fauna Sarda. Nulladimeno per qualche classe credo che manchi assai poco, e per le altre, se non verrò contrariato ne' miei proponimenti, mi auguro, ripetendo ancora le ricerche, poterlo per lo meno abbozzare.

In questa seconda memoria terrò il metodo stesso tenuto nella prima. Però nel ragguaglio del viaggio sarò brevissimo lorquando si tratta dei luoghi de' quali si è già fatto parola nel primo lavoro, diffondendomi soltanto negli altri per la prima volta visitati.

Terminerò col dire che anche questa volta ò avuto a rimanere oltremodo soddisfatto della ospitalità e cortesia de' Sardi. Nel corso della relazione del viaggio si troveranno indicati i nomi di que' signori i quali o con la ospitalità, ovvero con agevolazioni di notizie, guide e cose simili ànno contribuito a rendere più facile il mio cómpito. Se ne abbiano qui i miei ringraziamenti. Ed una parola di riconoscenza debbo esprimere pure ai Reali Carabinieri, i quali mi sono stati gentilissimi in que' paesi in cui ho dovuto ricorrere ad essi sia per personale sicurezza, sia per alloggio.

PARTE PRIMA

Relazione del viaggio

Mese di Aprile

14. Partito da Napoli alle ore 2 pom., il dì seguente alle 6 e mezzo p. m. discesi in Cagliari, dirigendomi all' albergo stesso della Scala di Ferro.

16. Mi propongo fare qualche ricerca nelle adiacenze dell' Anfiteatro. Il cielo, lorchè mi misi in cammino, era appena nuvoloso: però non ancora ero giunto sul posto, che la pioggia cominciò a cadere, e crescendo sempre mi costrinse a cercare un ricovero. Ciò non ostante, diminuita appena, trassi innanzi, sì che la giornata non andasse del tutto perduta. Cominciando da presso le mura della città vedevasi oltremodo abbondante la *Chrysomyia formosa*. Su' fiori del *Chrysanthemum coronarium* erano apparsi ed in buon numero varii minuti Malacodermi, fra quali molte specie più o meno particolari della Sardegna, quali sono il *Dasytes algiricus*, i *Dolichosoma protensum* e *filum*, l'*Haplocnemus pectinicornis*, la *Danacaea piceicornis* e l'*ambigua*, l'*Attalus erythroderus*, il *Charopus saginatus*, il *Troglops brevis*, ecc. Su' fiori dello *Smyrnium olus atrum* che cominciava a fiorire si agiravano taluni Imenotteri, ma di specie ordinarie. Sotto le pietre non era raro il *Porcellio spatulatus*, del quale nel settembre avevo rinvenuto un individuo solo, ma che non mi giungeva sconosciuto, poichè lo possedevo già di Sicilia.

17. Ricerco in altra parte delle adiacenze della città, posta in collina, e detta acconciamente *Bellaria*, nella quale vi rimanevano estese aje incolte rivestite di prato naturale. Sebbene il cielo fosse in gran parte sereno, pure il vento impetuoso oltre a recare molestia, rendeva la caccia difficile, sopratutto quella degl' Imenotteri e de' Ditteri. Dei primi era abbondante in taluni siti l'*Andrena holomelana*. Di Ortotteri trovavansi qua e là individui adulti d' ambo i sessi di una specie di *Odontura*, la più precoce di tutte le Locuste, che non avevo incontrata nel settembre e sulla cui determinazione specifica ritornerò nella terza parte.

18. Fiancheggiando a sinistra la ferrovia che mena ad Elmas, rimanendo cioè tra questa e lo Stagno di Cagliari, giungo al luogo detto *Fangario*. Pochi passi oltre la stazione era abbondantissima, quanto in nessun altro posto rividi, sopra la *Betula vulgaris*

la *Cassida vittata*. Presso le sponde dello stagno non era rara tra canneti la *Opomala cylindrica*, che pare in quella stagione cominciasse a raggiungere lo stato perfetto, poichè poche immagini si alternavano con molte ninfe e larve. Tra le radici delle canne stesse od altre piante palustri era abbondantissima la *Myrmica scabrinodis;* però soli neutri. Nelle medesime condizioni non mancavano minuti Carabicini e Stafilini, tra i primi dei quali il meno frequente era la *Drypta dentata*. Nella ricca prateria naturale che ricopriva il lungo fossato predominanti, sempre sopra i Crisantemi, erano i Malacodermi superiormente cennati, ai quali però si aggiunsero ancora specie meno comuni o rare, come il *Telephorus praecox*, di cui può dirsi che erano gli ultimi individui superstiti, poichè è specie che comincia ad apparire nella prima metà di marzo, nè in seguito ne rinvenni alcun altro; la *Ragonycha chlorotica*, il *Malacogaster Passerini* ♂. Non mancarono buone specie di Imenotteri e Ditteri.

19. Percorro la pianura del Campidano, giungendo allo Stagno di Quarto, detto altrimenti Molentargius; sulle cui sponde avrei voluto trattenermi a fare ricerche, ma il vento fortissimo e freddo assiderava in guisa, da non permettere il restare. Tra le specie interessanti raccolte noterò un microlepidottero non ancora potuto determinare.

Nelle mura di cinta della via formate di terra battuta erano frequentissimi i nidi della Migale, detta da quei naturali *Argìa*.

20. Tra le contrade che mi ero proposto visitare eravi quella di Pula. E quantunque le condizioni atmosferiche proseguissero a mostrarsi avverse, pure mi decido a recarmivi. Noleggio quindi una vettura da tenere a mia disposizione, e mi dirigo a quella volta. Mi fermo a far le prime ricerche nella pianura detta *Giorgino*. Presso la spiaggia erano frequenti l' *Erodius siculus* e la *Pimelia grossa*, ed entro la sabbia a piè degli giunchi ed altre piante i soliti coleotteri arenicoli, come l'*Ammobius rufus*, l'*Anemia sardoa*, ecc. In un attiguo campo sabbioso ma popolato di *Cystus* potetti raccogliere varii buoni Imenotteri, fra quali m' interessò principalmente una piccola e graziosa *Osmia*, che aveva il suo nido entro quella sabbia, sicchè con un po' di fermata potetti raccoglierne parecchi individui. Esso presentava un abito che accennava a carattere africano, e concepii fin da quel momento il dubbio che fosse specie non ancora descritta, dubbio che confermai in seguito a riscontro delle diverse opere che posseggo. Trovandomi a Torino vidi nella collezione del Gribodo la stessa specie pervenutagli dall' Algeria, parimente indeterminata: sicchè in seguito a nuove ed infruttuose indagini fatte mi decisi a darle un nome *(Osmia igneopurpurea)* coi caratteri più distintivi, ai quali farò ora seguire la descrizione più estesa.

Proseguendo il cammino, passo alla contrada detta *Piano di mezzo*, ove scorre ancora un rivolo di acqua. E qui ricercando mi si presentò per la prima volta quella minutissima *Blatta*, la più piccola di quante se ne conoscono di Europa, e che è stata descritta dal Serville col nome di *Bl. sardea*. Varie altre specie interessanti rinvenni, che si rileveranno dal catalogo che segue. Desideravo vedere la collina di Santa Barbara, indicatami come buona località entomologica. La carrozza giunge fino ad un sito denominato S. Geronimo e volgarmente *San Girone*. Di là ascendo a piedi la piccola collina fino al

gruppo di case, spettanti a famiglie di Cagliari, che vanno là a passare la stagione estiva onde evitare le influenze miasmatiche della città. Le condizioni di vegetazione son tali, da far giudicare realmente quel luogo assai interessante per le ricerche entomologiche. E forse tale sarà in altra stagione: essendovi Cisti, Lentischi, giovani Corbezzoli e qua e là torreggiante la *Ferula nodiflora*, che trovavasi allora appunto in fiore. Io però rimasi deluso, non avendovi rinvenuto cosa alcuna d'importante. Non voglio pertanto lasciare senza ricordo un tratto di cortesia ricevuto dal sig. Angelo Imeroni, il quale trovandosi appunto in una di quelle case e vedendomi giungere grondante sudore, m' invitò a riposare un pochino, offrendomi del vino squisito e facendomi gentili esibizioni.

L' ora essendo inoltrata e Pula ancora distante, mi determinai di approfittare della ospitalità, statami indicata in Cagliari, della famiglia del Marchese di Nizza, che trovavasi per ventura in una sua vastissima tenuta in contrada detta Orri. Mi diressi quindi a quella volta, e debbo dire che l' accoglienza ricevuta fu superiore alla prevenzione che me se n' era data, non ostante nessuna commendatizia avessi loro recata. Essendovi ancor luce, si girò per l' attigua campagna.

21. Levatomi di buon' ora mi occupo a far caccia d'Imenotteri Apiarii, che venivano agirandosi intorno ai fiori di svariate piante da ornamento del giardino posto innanzi la casa. Di là passai quindi alla adiacente campagna coperta in buona parte da' *Cistus* sopramenzionati, e ad un piccolo pantano che è nella stessa. Nella prima vi raccolgo svariate specie non spregevoli di varii ordini. Fra Coleotteri notavasi l' abbondanza del *Baritychius squamosus*. La raccolta migliore fu in Imenotteri, fra quali vi rinvenni una buona specie di *Osmia*, probabilmente nuova, non ritrovata più in seguito. In quanto al pantano, le acque erano talmente putride, che appena vi albergavano il *Berosus luridus* e la *Corisa lugubris*. Era poi notevole la frequenza della *Euchelia jacobaeae*, che ho poi trovata ancora in altri luoghi.

All' una p. m. lascio Orri e proseguo il cammino in carrozza, giungendo alle 2 a Pula. L' è questo un piccolo paese vicino al mare, che non offre alcuno albergo, nè avevo cercato commendatizie per ospitalità privata, sapendo che il botteghiere Giovanni Melis avea una stanzuccia nella quale avrei potuto trovare il necessario ricovero. Di questa in fatti mi accontentai, comunque non offrisse altro che un letticciuolo, un rozzo tavolo e due sedie. Mi avviai immediatamente al fiume che scorre a poca distanza dal paese. Sulle sponde vedevansi frequenti i *Chlaenius auricollis* e *spoliatus*. Più presso le acque e sotto i piccoli sassi o tra le erbicciuole era oltremodo comune l'*Anisodactylus heros*. Di molluschi fluviatili poteansi raccogliere degli *Ancylus* attaccati alla parte immersa de' sassi. Sulle acque era abbondante l' *Hydrometra Costae*.

Nelle praterie adiacenti molte specie di piccoli Coleotteri. Fra gl' Imenotteri i *Cephus tabidus* e *pygmaeus* erano frequenti. Verso l' imbrunire potetti ancora raccogliere alcune specie di Microlepidotteri, che giacciono tuttavia indeterminati.

22. Ritorno alle acque e precisamente mi dirigo ad un piccolo pantano detto *Fosci*, ove dicevasi abbondare le *mamme d'anguille* ossia grossi coleotteri acquatici, con la lusinga di trovarvi il *Cybister africanus*. Eravi infatti copia di *Cybister*, ma era sempre il

comune *Roeselii.* Sulle sponde fra i detriti vegetali non era raro un Pselafideo de'più minuti della famiglia, che è probabilmente la *Bryaxis sardoa.* Sulla via ronzava frequente l'*Odynerus reniformis.* Nelle praterie rinvengo la *Baris viridisericea,* frequente l'*Anthrenus pimpinellae,* ecc.

All' una ritorno in paese, e presa una refezione alle 2 $^1/_2$ riparto, tirando diritto per Cagliari, ove giungo alle 5 $^1/_2$.

23. Giornata di lavoro per mettere in ordine gli oggetti raccolti nella descritta peregrinazione.

24. Destino questo giorno per visitare Decimoputzu, luogo interessante anch' esso pel fiume *Rio Manno* che vi scorre da presso. Sebbene vi si potesse accedere per ferrovia, pure preferii andarvi con carrozza, a fine di poter profittare de' luoghi che per avventura lungo il cammino si fossero mostrati meritevoli di ricerche: ed ebbi a trovarmene contento. Una prima sosta la feci in luogo detto *Bausteri,* ove in ampio campo pratoso potetti raccogliere varie buone specie. Era notevole tra l' altro l' abbondanza della *Trypeta syllibi*, che viveva su'cardi nel modo stesso con cui l' avevo trovata in calabria in consimile stagione.

Avvicinandomi ad Assemini, innanzi di entrare nel paese scorgo uno di quei pantani temporanei, non rari in Sardegna de' quali ò fatto parola nella prefazione, e fermatomi a perlustrarlo, rimasi soddisfatto dal rinvenirvi i diversi generi di Entomostraci de' quali nessuno esempio eramisi presentato nel settembre; sebbene rappresentati dalle rispettive specie comuni. Sotto la superficie poi di taluni sassi immersi erano raggruppati centinaia d' individui di una *Cythere.* Non vi mancavano Coleotteri. Il più abbondante era l'*Hydrobius oblongus.* Eravi ancora l'*Hydr. fuscipes,* il quale sembra assai poco diffuso in quell' isola, non avendolo trovato in alcuna altra acqua.

In Assemini mi fermo a far colazione presso un botteghiere, certo Giovanni Oessi, che appresi esser un già esercente la Chirurgia, e che abbandonata la professione erasi dedicato al negozio, sopratutto per lo smercio de' vini de' proprii fondi, tra quali fecemi gustare uno bianco di una rara squisitezza ed il migliore, dopo la vernaccia, che abbia bevuto in Sardegna.

Proseguendo il cammino, alle 12 fui a Decimoputzu. Qui ripartii le mie ricerche tra le praterie della pianura e le acque del Rio Manno che la traversa. Nelle prime sotto foglie cadute a piedi di piccoli Tamarici fui contento trovare parecchi individui del *Cossyphus insularis*, che in seguito non più rividi. E nelle stesse condizioni erano varie altre specie non spregevoli di Coleotteri, come l'*Asida Genei*, gli *Sphenophorus parumpunctatus* e *meridionalis.* Qualche cosa di più interessante rinvenni ne' prati, l'*Auletes pubescens*, che non ancora figurava tra le specie italiane.

Nelle acque poi rinvenni varii Coleotteri che m'interessarono, come il *Cybister africanus*, l' *Hydrophilus pistaceus*, specie ambedue che raccoglievo la prima volta.

In fine, mediante l' opera di appositi pescatori potetti riconoscere gli altri animali abitatori di quel fiume, cioè l'*Atherina fluviatilis,* la *Lebia calaritana*, il *Gasterosteus aculeatus*, la *Caridina Desmarestii,* l'*Unio Capigliolo.* Fra i quali mi tenne alcun poco oc-

cupato la *Caridina*, onde segnarne dal vivo i colori, sapendo come essi si cangino facilmente dopo la morte e divengano del tutto irriconoscibili dopo la immersione nell' alcool. E me ne son trovato contento; dappoichè, riscontrando le opere carcinologiche ho visto non esser con molta precisione descritti.

25. Altra contrada che m'interessava visitare era quella di Muravera con tutte le sue adiacenze. A raggiungere bene lo scopo mi determinai adottare il mezzo stesso usato per Pula e del quale erami trovato perfettamente contento; quello cioè di farlo con carrozza tenuta a mia disposizione. La mattina quindi di buon' ora lascio Cagliari. Traversando il territorio di Signa, visto un piccolo corso di acqua e molti sassi nella campagna adiacente, mi determinai fermarmi per fare qualche ricerca. Al primo sasso sollevato mi si presentò un bellissimo individuo della *Testacella Gestroi,* che stavasene col corpo spianato sì da simigliare ad una di quelle Doridi a corpo ampio e depresso, come l'*argus*. Svoltai quanti altri sassi erano in que' dintorni, ma nessun'altra ne rinvenni, nè in seguito l' ò più riveduta in altri luoghi. Le acque non mi offrirono specie notevoli.

Breve sosta si fece pure in luogo detto S. Leonardo; e qui vidi per la prima volta quel bellissimo dittero che è il *Chalcochiton holosericeus* speciale della Sardegna e che da quel momento incontrai in molti altri luoghi, in modo da poterlo dire diffuso per quasi tutta l'isola, sebbene non comunissimo. Con soddisfazione ancora raccolsi la mia *Sapyga rufipes* descritta già da molti anni sopra individui del Piemonte ricevuti da Ghiliani.

All' una p. m. si giunge alla cantoniera *Campuomu* (o *Campiomu*), ove i vetturini che fanno quel transito usano fermare due ore onde far riposare i cavalli. Profittando di quell' intervallo, mi occupai a fare ricerche presso le sponde di un piccolo fiume. Dapprima rovistando tra sassi e macerie trovo una forma di Oniscideo che mi giunse del tutto nuova e che presentavasi con fattezze non solite a vedersi negli ordinarii Oniscidei; e dallo studio fattone è risultato appartenere in fatti ad un genere distinto, che ò chiamato *Syntomagaster*, dandole lo specifico *dasypus* [1]). Esso vi era abbondante, sicchè potetti farne buona provigione d' individui. In fatto d' insetti non mancò qualche buona specie. Tra l'altro notavasi l'abbondanza di un Emittero, lo *Scolopostethus cognatus,* che nel continente non pare sia stato ancora trovato, e che nella stessa Sardegna non è facile incontrare. Nelle acque eranvi Ancili, Limnei, Fise, e varii Idrocantari.

Alle 3 si riprende cammino, ed alle 6 $^1/_2$ giungo a Muravera. Come a Pula, così a Muravera non vi ha un vero albergo. Però un tal Bartolomeo Maina, piemontese, che fa il botteghiere, tiene due stanzucce superiori con letti, per qualche commerciante che volesse ivi pernottare. In una di quelle quindi mi accomodai, venendomi da lui stesso preparato il vitto.

26. Levatomi di buonissima ora mi avvedo essere di rincontro alla casa che abitava un pantano che sembravami analogo a quello delle vicinanze d' Assemini, e però ne seguiva l' idea che avesse potuto anche questo contenere Crostacei. Fui quindi sollecito ad andarvi: e non rimasi deluso. Le grosse specie, come *Apus* e *Branchipus,* non vi erano: queste amano acque più pure, e quelle invece erano putride e fetide. Per compenso però vi erano a milioni i Crostacei minuti dei generi *Cythere*, *Daphne*, ecc.

[1]) Vedi: Rapporto preliminare e la parte terza.

Esaurita questa prima indagine, mi reco a Gibbas, distante circa un' ora di cammino in carrozza: luogo ove è uno de' tanti stabilimenti minerarii della Sardegna per lo scavo della galena, che là trovasi in strati sottoposti al suolo. A poca distanza dallo stabilimento vi à un pantano, intorno al quale fissai le mie ricerche; e ben presto riconobbi esser quello un posto di grande importanza, e che forse nessuno degli entomologi che han percorsa prima di me la Sardegna avea conosciuto. Infatti la prima specie che mi si presentò fu un carabicino, tutt'altro che piccolo, e che ignoravasi abitasse in Sardegna, qual'è il *Brachinus humeralis,* che non era neppur molto raro. E con esso erano il *Brac. exhalans* abbondantissimo, lo *psophia* e lo *sclopeta*, il *Chlaenius chrysocephalus.* Piacquemi ancora tra carabicini l'*Amara fervida*, che nel continente italiano pare non ancora siasi trovata.

Lasciato Gibbas, passo al Porto Corallo: ma le indagini in questo posto furono quasi interamente infruttuose; solo in un punto della spiaggia alquanto remoto ritrovo là nella sabbia la *Macropterna convexa,* l'*Ophthalmicus lineola*, qualche *Anthicus* e, vagante, la *Mutilla quadripunctata* che più m' interessò e che in seguito non ò più trovata.

27. Non ostante tempo piovoso, visito altra località ove esiste stabilimento minerario, il Monte Narba. Qui erano molte Ferule *(Ferula nodiflora)* già in fiore, le quali non erano deserte come le avevo trovate nella collina di Santa Barbara, ma invece popolate da parecchie specie d'insetti. Di Coleotteri predominavano la *Clythra ferulae* di Genè, che prediligeva i fiori, ed il *Lixus umbellatarum,* che se ne stava attaccato ai fusti: ambedue frequenti. Di Emitteri trovavasi anche abbondante un *Phytocoris,* che non vidi sopra altre piante. Quelli che contro la mia aspettativa, vidi difettare furono gl' Imenotteri ed i Ditteri: lo attribuii alla stagione non abbastanza inoltrata. Sopra i Cardi non era raro il *Larinus Genei.* Due altri Emitteri m' interessarono moltissimo perchè giungevanmi del tutto nuovi: il *Microtoma leucoderma,* discoperto primamente nella Spagna dal Rambur, che lo descrisse col nome di *Pachymerus carbonarius;* ed un piccolissimo *Harpactor,* di cui potetti raccogliere due soli individui adulti, altri essendo tuttavia allo stato di larva. Tale *Harpactor* pare sia nuova specie, affine all'*H. lividigaster*, M. R. della Francia meridionale e della Corsica. Non meno importante fu una Cicadaria Fulguridea che vivea tra prati e non rarissima, avendo potuto in breve tempo raccogliere quattro individui. Non mancò qualche individuo della *Aphlebia sardoa*, la *Porthetis marmorata.* Sotto i sassi trovavasi qualche Scolopendra a corpo violaceo livido con le mandibole aranciate quale suol'essere nell'età giovanile la *Scol. dalmatica.*

Alle 2 p. m., sopravvenuta di nuovo una pioggia impetuosa, dovetti desistere e restituirmi a Muravera. Però nelle ore più tarde esco di nuovo a piedi. In una pianura sparsa di piccoli pantani rividi il *Brachinus humeralis* insieme ad altri carabicini; e nelle acque abbondante l'*Agabus bipunctatus.*

Mi estesi fino alle sponde sabbiose del Flumendosa, ma nulla vi rinvenni fuori qualche *Sisyra fuscata.* Il vento freddo assiderante mi costrinse a ritornare in paese.

28. Eromi proposto perlustrare un' altra di quelle adiacenze, *Castiadas;* ma la perfidia delle intemperie mi obbligò a deporne il pensiero, e fare invece ritorno in Cagliari.

29. Il bisogno di dare assetto agli oggetti raccolti durante la descritta peregrinazione

mi costringe a rimanere in città. Passo soltanto qualche ora nel Gabinetto Zoologico dell' Università, nel quale avverto un miglioramento sensibile in rapporto a quel ch' era nel precedente settembre quanto all' ordinamento delle collezioni, il quale dimostrava chiaramente lo zelo ed attività del prof. Parona.

30. Continuo il lavoro, ed esco soltanto alcune ore per ritornare all' Anfiteatro. Di Lepidotteri posso raccogliere più individui della *Metoptria monogramma*, che non era punto rara. D'Imenotteri predominava l'*Anthidium septemdentatum*. Cominciai a vedere qualche individuo adulto della *Porthetis marmorata*.

Mese di Maggio.

1. Nel mattino dovetti ancora rimanere in Cagliari per soddisfare ad un incarico del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio prendendo parte ad una riunione presso la Prefettura destinata a proporre i mezzi pratici per impedire che la Fillossera penetrasse nell' Isola. Nelle ore pomeridiane passai ad Iglesias.

2. La prima località che volli ripercorrere fu la valle Canonica. M' interessava sopratutto rinvenire altri individui dello *Pseudoniscus neglectus*, a fine di meglio illustrarlo, ma non fu possibile. Più fortunato fui nella ricerca di Miriapodi, avendo rinvenuto più individui di quel *Glomeris* che nella prima memoria accennai senza poterne declinare la specie, perchè ne avevo un individuo solo trovato morto ed alterato. Ho potuto così riconoscere essere una specie assai elegante, che nel rapporto preliminare ho denominato *Gl. lunatosignata*. Anche qui ritrovai in identiche condizioni, ma meno abbondante, il *Syntomagaster*.

Nelle praterie rinvenni un individuo di una specie di *Blennocampa*. Era questo il primo Tentredineo che trovavo dopo le due specie di *Athalia* già trovate nel precedente settembre e comuni in tutta l' isola dalla primavera all' autunno. Il quale fatto vuol essere ricordato in quanto l'è ora constatata la grande scarsezza degl'Imenotteri di tale famiglia nella Sardegna. Dalla mia prima memoria rilevasi che in tutto il mese di settembre io non avevo trovato che le Atalie. Il signor Magretti nel dare un ragguaglio di taluni Imenotteri raccolti in quell' isola avvertiva siffatta scarsezza, facendo nondimeno notare poter essa addebitarsi alla brevità delle sue ricerche. Ora posso aggiungere che in due mesi e mezzo perlustrando luoghi moltissimi io non ho trovato che sei sole specie, ed anche in numero scarsissimo d' individui. La *Blennocampa* citata pertanto à pure l' importanza di essere specie nuova, che ho chiamata *formosella*.

Presso le sponde del fiume era sempre abbondantissima la *Lispe tentaculata*. Le acque nulla mi offrirono che non avessi già trovato nel settembre.

3. Mi determino visitare una contrada non ancora conosciuta, Domusnovas. Una vettura mi conduce al paese in un' ora. Essendo ancora presto per la colezione, mi trattengo un pezzo in un campo di Crisantemi, intorno a' cui fiori venivano a succhiare il nettare parecchi Apiarii. Erano più frequenti l'*Osmia tricornis*, l'*Anthophora senescens*, l'*Andrena umbellatarum*.

Rifucillato lo stomaco presso un bettoliere, mi avvio alla *grotta di S. Giovanni* o *della Duchessa,* che percorro, rischiarato da un fanale portato dalla guida, in dieci minuti; tunnel naturale imponente, che ben meritava di essere veduto, incontrandosene ben raramente de' simili: scavato nella roccia calcarea, ed ampio abbastanza per dar passaggio a carri. Uscito dalla grotta si trova un'angusta valle a spalliere boscose. Abbondantissimo era *l' Attagenus fallax*, che da quell'epoca continuai a vedere in quasi tutti i luoghi percorsi. Non era rara la *Monosteira unicostata;* piuttosto rara la *Xanthogramma ornata.* Sotto le pietre qualche individuo dell' *Oncocephalus notatus.*

4. Il cielo era coperto di dense nubi e minaccioso. Ciò non ostante mi avvio a Monteponi. Non tardò molto e l'acqua cominciò a cadere, proseguendo or più copiosa, ora meno. Non ostante, continuo fino allo stabilimento minerario. La caccia fu però scarsissima. Ricorderò la *Niphona picticornis* rinvenuta battendo le siepi di rovere, ed il minuto e grazioso *Cryptocephalus blandulus* sopra i lentischi.

5. Mi levo innanzi il far del giorno: osservo il cielo, era sereno. Col treno ferroviario delle 4, 35 parto per Silìqua, distante venticinque chilometri, che si percorrono in meno di un' ora. Essendo ancor presto per la caccia degl'insetti, comincio dalle ricerche nelle acque del fiume Rio Manno che scorre prossimamente alla stazione. Eranvi le solite specie di conchiglie, fra le quali notavasi per grandezza d'individui la *Cyclas lacustris.* Così pure nulla d'importante vi fu in coleotteri acquatici. Assai più fruttuose furono le ricerche presso le sponde sulla direzione del castello. Di coleotteri era estremamente abbondante la *Clytra centromaculata.* M' interessò moltissimo attrappare il maschio del *Gomphus* di cui raccolsi soltanto femmine nel settembre. Dallo esame ò potuto convincermi essere una specie molto distinta. Non rara era di Friganeidei una bella specie, che vedevo per la prima volta. Abbondante sulle piante palustri era la *Serenthia atricapilla.* E senza andar qui enumerando tutte le specie più o meno interessanti, dirò che in mezzo a' canneti rinvenni un Emittero Ligeideo che considerai come l' oggetto più interessante della giornata: e non m'ingannai. Esso di fatti appartiene al genere *Holocranum,* del quale si ha una sola specie descritta dal Kolenati col nome di *Cymus satureiae* sopra individui della Russia meridionale, fuori della quale regione solo il Puton dice averne veduto un individuo raccolto in Avignone. In quanto alla specie è probabile sia la stessa che quella di Russia: nondimeno, non avendo potuto consultare l'opera originale nella quale quella specie è descritta e figurata, mi riserbo su di essa il giudizio definitivo. In tutti i modi essa costituisce una novità per la Fauna della Sardegna e dell'Italia intera. Ricercando entro terra vi rinvenni il genere *Tropisoma* de' Miriapodi, che neppure era stato innanzi indicato esistente in quell' isola.

Entro le acque e tra le piante delle sponde era abbondantissima una *Succinea* che presentavasi con forma diversa da quella della *S. megalonyxia* trovata in altri fiumi. E dallo esame comparativo fattone con altre specie nella collezione della Marchesa Paulucci è risultato che in realtà esso è intermedia tra la *megalonyxia* e la *elegans.*

La sera ritornai ad Iglesias.

6. Era nel mio programma recarmi di nuovo al bosco di Marganai, di cui nel settembre

avevo riconosciuta tutta l'importanza. Però le condizioni atmosferiche continuando ad essere avverse, mi decisi mio malgrado rinunziare a questa gita. Invece passai ad Oristano.

7. La mattina continuava la pioggia: essendo però quasi cessata verso le undici, in compagnia del sig. Fortunato Tolu, che anche in questa mia dimora volle cortesemente esser con me in tutte le piccole escursioni, mi diressi alle sponde del Tirso.

Non potetti però rimanervi più d'un ora, chè l'acqua ritornò copiosa. Impiegai quel po' di tempo a fare qualche ricerca nell'acqua. La *Caridina Desmarestii* era ancora abbondantissima ed anche con femmine cariche di uova; però presentavasi con aspetto molto diverso da quello con cui l'aveva vista nel Rio Manno, sì che si sarebbe detta tutt'altra specie, non ostante nel fondo non fosse diversa.

8. Mi reco con Tolu al vicino paese Riola, presso il quale scorre anche il Tirso. Le ricerche nelle acque nulla mi offrirono, che non avessi già trovato in altri fiumi. Presso le sponde erano abbondanti la *Cicindela littoralis* e la *sardoa*, non che i consueti *Chlaenius auricollis, Agonum marginatum,* ecc. Sulla via incontravansi molti individui del *Geotrupes hiostius,* però quasi tutti già morti. Di Imenotteri m'interessò l'*Anthophora ferruginea,* che non pare sia stata innanzi trovata in Italia.

Mi si era parlato in Oristano da taluni proprietarî essere nelle vigne di quel tenimento apparsa una specie di scarafaggio a devastare le viti, da essi non mai osservata in altri anni. Trovandomi quindi in vicinanza di vigneti, volli perlustrarli per vedere se vi si trovasse. Ed in effetto vi era la *Labidostomis taxicornis,* la quale divorava le foglie dalle piccole e tenere alle più grandi. La quale specie anch'io vedevo per la prima volta danneggiare le viti.

9. Le sponde del Tirso vennero in questo giorno esplorate per parecchie ore e non percorrendone più che pochi metri di lunghezza. Là dove le sponde sono erbose, entro terra tra le radici delle stesse erbe annidavasi tal numero di forme svariate di Carabidei e Stafilinidei, che vi si avrebbero potuto passare anche più giorni con occupazione sempre proficua. E primo tra carabidei nominerò l'*Omophron variegatus,* originario della Spagna, di cui Genè il primo ottenne un individuo solo trovato presso Cabras, vuol dire poco lungi da Oristano [1]) e che da nessuno de' recenti entomologi era stato più visto. Anch'io per quanto avessi frugato, non potetti rinvenirne che un individuo solo, sicchè in quel momento giudicai essere realmente un insetto estremamente raro, opinione che modificai più tardi, come sarà detto in appresso. Fra gli Stafilinidei poi mi rallegrò moltissimo il rinvenimento di un *Pinophilus,* di cui avevo preveduta già la esistenza nell'isola per talune larve rinvenute in altri luoghi, le quali non lasciavano dubbio alla diagnosi essendo abbastanza caratteristiche. Il nominato genere in Europa era stato trovato soltanto in Sicilia. Però il sig. Ragusa mi assicurava che il *Pinophilus* della Sicilia non differisce punto da quello dell'Egitto. Se così fosse questo di Sardegna sarebbe assolutamente nuovo; dappoichè confrontato col *Pinoph. aegyptius,* di cui esistono nel Museo zoologico di questa Università individui raccolti da me stesso in Egitto, trovo differirne per la statura assai minore, per la forma e scultura del capo, e per altri caratteri. In tal caso la specie sarda

[1]) Anche Villa registra questa specie tra quelle trovate in Sardegna nel 1836, senza però indicare dove ed in quali condizioni.

andrebbe denominata *Pinoph. erythrostomus*. Delle specie poi non comuni delle due cennate famiglie possono citarsi il *Diachromus germanus*, che vi era abbondantissimo, il *Panagaeus cruxmaior*, raro per la Sardegna, il *Lionychus Sturmii*, l' *Olisthopus anomalus* non prima trovato in Sardegna, ma solo nella vicina Corsica, il *Lathrobium dividuum*, il *Bledius tricornis*, ecc. ecc. Innanzi di fare ritorno in città il sig. Tolu m'indicò un piccolissimo pantano poco discosto dal sito in cui ci trovavamo; ed in esso alla prima retata trovai con sorpresa il *Cybister africanus* e l' *Hydrous flavipes*. Sul *Populus alba* che è lungo la via era oltremodo abbondante la *Monosteira unicostata*.

Non posso por termine al ragguaglio della giornata senza menzionare di aver nel bel mattino osservata poggiata sopra una cima di rovero tra folto spineto una *Sesia* che giudicai il *Trochilium apiforme*. Fui fortunato a chiapparla, ma dispiaciuto a vederla fuggire per un'ampia laceratura causata dalle spine al velo.

10. Il sig. Sisinnio Falqui, di cui nella prima memoria ho già notato le gentilezze usatemi, aveami fin dal precedente settembre invogliato a recarmi a San Lussurgio (volg. *Santu Lussurgiu*) come località che sarebbe stata interessante per le mie investigazioni. Non avendo potuto recarmivi allora per la ristrettezza del tempo, mi determinai eseguire ora tale gita, resa possibile in quanto, non offrendo quel paese alloggio di sorta, lo stesso sig. Falqui mi procurava ospitalità presso il suo figlio Salvatore colà domiciliato. Alle 12 p. m. parto con carrozza. Si fa breve sosta a Tramatza e poi a Milis, il paese dei giardini e boschetti di aranci. Dopo Bonarcado, cominciando la salita di S. Lussurgio ne fo buona parte a piede, e raccolgo il *Saropogon axillaris*, che cominciava allora a comparire, e la *Anthrax tripunctata*, che non è molto frequente in Sardegna. Alle 5 giungo in paese, ove, come ho detto, vengo cordialmente ospitato dalla famiglia Falqui.

11. Il giorno innanzi nello andare al paese aveva osservata sulla destra una piccola valle percorsa nel fondo da un fiumicello *(Rio de Bau de mela)* che anima alcuni mulini, onde va denominata *valle dei mulini*, ricca di ombrellifere in fiore, che sembrata erami buon sito entomologico. A questa quindi destinai la prima giornata della mia dimora in S. Lussurgio, e non ne rimasi scontento. Quelle ombrellifere erano il richiamo di molti Imenotteri e Ditteri. Di questi ultimi erano oltremodo abbondanti il *Merodon clavipes* ed il *Tabanus ater*. La quale seconda specie io noto perchè legasi con una osservazione da me consacrata nella prima memoria relativa a' Tabani. Ivi è notato come questi ditteri non li avessi mai veduti nel settembre attaccare il bestiame, come è loro costumanza. E siccome poteva ciò dipendere dalla stagione troppo inoltrata, ho cercato nell' ultimo viaggio ripetere le osservazioni: dalle quali è risultato che la specie più comune è il citato *T. ater*, e ciò non ostante non un solo ne ho visto aggirarsi intorno a grossi quadrupedi domestici. Trovansi pure altre specie, ma meno frequenti, e sempre nelle campagne.—Nei prati erano frequenti lo *Stenus oculatus* e la *Rhagonycha chlorotica;* ma quel che più m'interessò fu un piccolo *Cephus*, che giungevami nuovo e che tale è pur risultato in seguito ad accurato esame. Di Lepidotteri merita di essere ricordata quella bellissima Geometra che è la *Rumia crataegata*. Presso le sponde del rivolo raccolgo la *Salda geminata*. Entro le acque erano abbondanti una specie di *Gammarus*, tutti individui in copula, e varie delle comuni specie di molluschi fluviali.

12. Ignaro del tutto della natura del territorio di S. Lussurgio cercai attingere notizie da quei del paese, onde determinare le altre mie peregrinazioni. Mi venne tra gli altri indicata la sorgente del Rio Manno, distante circa sei chilometri, di cui mi si fece una descrizione che m' invogliò a recarmivi. Uscii quindi di buon' ora in compagnia di una guida e mi diressi a quella volta. Ma grande fu la mia sorpresa quando, giunto sul posto detto *Baulìa*, mi trovai in un piccolo ripiano, nudo quasi del tutto, dal quale veniva fuori la polla di acqua che dicevasi Sorgente del Rio Manno, del quale sarà forse soltanto uno dei contribuenti. Non sponde erbose che avessero dato ricovero ad insetti, non insetti o molluschi entro l'acqua. Però lungo la via, che percorsi tutta a piedi, potetti fare una caccia discretamente interessante, sopratutto in Imenotteri. Nominerò ad esempio: l'*Andrena sardoa*, una distinta specie di *Stelis*, la *Chrysis angulata* non prima trovata in Italia, la *Chrysis sulcata*, i *Cephus nigripennis, idolon* ed *haemorrhoidalis*, dei quali il primo assai raro, gli altri due non molto, la *Chalcis pectinicornis*. Erano poi notevoli per la loro abbondanza due specie di *Dioxys* che fanno il loro nido nei piccoli cavi di roccia basaltica, detta dai naturali *pietra morta*, con la quale son costruite le mura a secco che cingono la strada. In quanto alle specie dirò che mentre una si riferisce perfettamente alla *D. pyrenaica*, un' altra ad addome interamente nero, non ò potuto riconoscerla in quelle descritte, e mi pare dovesse considerarsi come specie nuova.

13. Visito un altro sito distante ancora circa sette chilometri, detto *Bosco di S. Leonardo*, ove mi reco anche a piedi. Dell' antico bosco non rimanevano che poche querce sparse qua e là e molti tronchi prostrati al suolo e già decorticati, in guisa da non essere più ricovero d'insetti. Appena sotto le cortecce di qualcuna di esse rinvenni una specie di *Helops* non ancor definita e la *Trogosita mauritanica*. Sopra taluni *Vitex agnus castus* arborei era abbondantissima la *Monosteira unicostata*, lo che faceami riconoscere esser questa una specie polifaga, avendola già incontrata parimente abbondante sopra il *Populus alba*, come più sopra si è detto, e posteriormente ancora sopra altre piante. Lungo la via incontransi selve cedue di castagni. Trattenutomi un pezzo in esse, rinvengo due specie di Tentredinidei, cioè la *Selandria stramineipes* e l' *Emphytus calceatus*, che per le ragioni dette di sopra avevano una speciale importanza.

14. In mancanza di vetture, non volendo dimorare ulteriormente in S. Lussurgio, ritorno ad Oristano a cavallo. A Milis mi fermo alcune ore, le quali furono assai bene spese. In prossimità del paese trovo una piccola aia piantata a boraggine allora in fiore. In quel sito era un continuo andare e venire di Imenotteri Apiarii attirativi da quei fiori di cui sono assai avidi. Sicchè senza molta fatica potei fare abbondante raccolta di buone specie, sopratutto dei generi *Megachile* ed *Osmia*. M' interessò pure non poco il raccogliere un secondo individuo del *Pompilus meticulosus* da me descritto nella prima memoria; dappoichè con esso veniva a rafforzarsi la validità della specie riconoscendone la costanza dei caratteri. Anche di Icneumonidei vi fu qualche specie non ordinaria. Sulla nuda via non erano rari fra Ditteri il *Chalcochiton holosericeus* ed il *Saropogon axillaris*.

15. In compagnia del sig. Tolu vado a Cabras da me già conosciuto. Sopra giovani tamarici trovo molto abbondante l'Omottero di cui nel settembre aveva potuto rinvenire

due soli individui nei prati della medesima contrada, e che nella prima memoria ho indicato col nome di *Haplacha irrorata*. Sulla stessa pianta non era raro quel grazioso Eterottero denominato dal Mulsant *Capsus Forelii*, oltre il consueto *Nabis viridulus:* e di Coleotteri era comune lo *Stylosomus tamaricis*, e diversi *Nanophyes*. Nei prati presso lo stagno potetti raccogliere buoni individui del *Baris T-album* e qualche *Ophthalmicus Genei*, che allora cominciava a raggiungere lo stato perfetto, essendovi molte larve e ninfe, pochissime immagini. Di Imenotteri ricorderò una distinta specie di *Campoplex*. Sulla via ritrovo la *Mutilla capitata*. Eranvi varie *Ferula nodiflora;* ma quasi tutte coi frutti già maturi.

16. Il Tirso, come molti altri fiumi, è tanto svariato nella natura delle sue sponde, che meriterebbe esso solo parecchi giorni di esplorazioni. Non potendo però tutto percorrerlo, mi accontentai di perlustrarne altra porzione più lungi dalla città. Eravi in quella parte ampia sponda sabbiosa di recente rimasta a nudo per l' abbassarsi delle acque. Cominciando a ricercare mi venne innanzi un individuo dell' *Omophron variegatus*, della cui rarità ho già discorso superiormente. Conoscendo qual è la ordinaria ubicazione di tali carabicini previdi che doveva quella sabbia essere il vero nido di tale specie. Cominciando infatti a scavare, sbucavano individui da ogni punto. E ne era tale l' abbondanza, che in breve tempo avrebbe potuto riempirsene una cesta. Sicchè da coleottero rarissimo, adesso può dirsi comunissimo, soltanto per ora assai circoscritto nella sua ubicazione. È possibile che in prosieguo si trovino altri nidi; io però debbo dire che da quel momento ne ho fatto particolare ricerca nelle sponde sabbiose di tutti gli altri fiumi perlustrati: ma in nessun posto ne ho rinvenuti. La presenza degli *Omophron* mi richiamò alla mente un altro fatto. Nella provincia di Napoli in compagnia dell' *Omophron limbatus* ho trovato costantemente vivere il *Bledius verres*. Volli quindi vedere se anche con questa altra specie di *Omophron* convivesse il nominato piccolo Stafilino, che fu pure la prima volta discoperto in Sardegna da Genè. E dopo pochi istanti di ricerche anche il *Bledius verres* comparve in mezzo a quella sabbia. — Indipendentemente da altri buoni carabicini e Stafilini rinvenuti là dove le sponde cessavano di essere sabbiose e divenivano erbose, raccolsi in quel giorno l'*Anthicus venustus* Vill. non segnato qual inquilino della Sardegna, l'*Asilus siculus*, che compariva per la prima volta. E pare che le due specie più grandi di Assilli che rinvengonsi nell' isola, *barbarus* e *siculus* sieno meno precoci di altre. Infatti, anche il *barbarus*, che nel settembre avevo trovato frequente ovunque, in questa stagione non ancora vedevasi, e cominciai a trovarlo soltanto nel giugno. Di Imenotteri ricorderò la *Dryudella Spinolae*.

Le ore pomeridiane uscii dalla monotonia della scienza, passandole con l'amabilissima famiglia del Tolu, che gentilmente volle tenermi a pranzo.

17. Tra i paesi che sono intorno Oristano vi ha Fordongianus, rinomato per varie sorgive di acque termominerali. Essendovi buona strada rotabile, noleggio un piccolo legno per accedervi in compagnia di Tolu. Parto alle 7 ½ del mattino. Innanzi di giungere a Simaxis scorgo un campo incolto sparso della piccola *Thapsia garganica*, che trovavasi allora in piena fioritura, essendo pianta meno precoce della affine *Ferula nodiflora*, cui del

resto, meno la statura molto minore, apparentemente simiglia per gli ombrelli da'fiori gialli. In quel campo mi fermo, ed ebbi buona occupazione per un paio di ore. Que'fiori erano il richiamo di parecchi Imenotteri e Ditteri. Citerò fra i primi due belle e grandi specie di *Cryptus*, che mi giungevano nuove, e che non ancora ho potuto determinare. Rinvenni ancora con grande soddisfazione alcuni individui della *Astata* da me descritta col nome di *picea* [1]) sopra uno trovatone tra gl'Imenotteri sardi avuti in comunicazione dal Museo di Torino. Ed i novelli individui mi fecero avvertito che il color piceo del corpo era dovuto alla lunga azione della luce, mentre nel vivo esso è d'un nero intenso splendente, sicchè lo specifico nome impostole diviene un poco inesatto. Nondimeno lo conserverò, sia per non perder la data, sia per evitar confusione: solo ne modificherò la frase diagnostica, rendendola più esatta. Di Ditteri eranvi bellissimi individui delle *Stratiomys chamaeleon* e *longicornis*. Abbondantissimo era, de' Coleotteri, il *Mycterus pulverulentus* con individui giganteschi.

Ripreso cammino, poco oltre il Ponte S. Elena, andiamo nella vasta tenuta del Marchese D'Arcais, detta *Casina Floresiana*, nella quale ci fermiamo a consumare una lauta colazione, che il Tolu avea avuto il pensiero di portare da sua casa. Il qual sito faceami risovvenire esser appunto il proprietario quegli cui il Genè intitolava uno de' Coleotteri discoperti in Sardegna, la *Tentyria Floresii*.

All' una pomeridiana ci rimettiamo in via. Terminata la pianura del Campidano di Oristano, comincia la collina, traversata la quale si scende a Fordongianus (ove giungiamo alle 3 $^1/_2$): piccolo paese posto in mezzo a vasta conca tutta messa a coltura, e fiancheggiato da un fiume che è sempre il Tirso. Proprio sulle sponde di questo stanno le varie sorgenti di acque termominerali, per profittar delle quali, in mancanza di camere apposite, essendo distrutto l' antico stabilimento di cui osservansi tuttora i ruderi, si sono scavate nel suolo alcune vasche, ove i contadini cui quelle possono esser giovevoli vanno nella state a bagnarsi. Presso le sponde del fiume erano buone specie di Friganidei. Potetti raccogliere individui tipici della *Mystacida bifasciata*, identici ad altri che nel precedente settembre avevo rinvenuta tra i monti attigui al Gennargento. Eravi ancora oltremodo abbondante una *Hydropsyche* di cui avevo trovato un individuo presso Oristano. Più abbondante poi delle due specie citate era altra *Hidropsyche* che non avevo ancora trovato precedentemente. Di Ditteri compariva per la prima volta una *Thereva*, che verrà illustrata nella parte terza.

18. Avrei volentieri visitato altri luoghi intorno Oristano, e sopratutto la contrada di *San Giovanni*, ma il tempo scorreva e molte eran le contrade che mi restavano a percorrere. Sicchè fu forza partire, recandomi per ferrovia a Sassari.

19. Impiego questo giorno a percorrere la valle di Logulentu, di cui nel settembre avevo battuta una piccola porzione soltanto.

A poca distanza dalla città svolazzava abbondante la *Zygaena corsica*, di cui pareva quella l'epoca della prima schiusa. Intorno la quale è a dire che per uno di que' fatti singolari della Fauna Sarda la *corsica* è la sola Zigena che viva in tutta l' isola. Notavasi an-

[1]) Prospetto degl'Imenotteri Italiani.

cora, di Lepidotteri, frequenza della *Myeolis cribrella.* Cercai l'*Ophonus incisus*, che nel settembre aveva in quelle adiacenze trovato abbondante sopra i finocchi, ma non uno solo ne vidi: è probabile che nella primavera se ne rimanga interrato, per venir fuori più tardi quando vi è attirato dalla pianta da esso prediletta. Inoltrandomi nella valle vi trovo non rara la *Psammophila ebenina,* che nell'altra peregrinazione avevo rinvenuta soltanto sulla vetta del Gennargento, ed il *Priocnemis infumatus,* che conoscevasi soltanto della Sicilia. Lungo la via era frequente la *Thereva* superiormente menzionata e non mancava il *Chalcochiton holosericeus.* Cominciavano a vedersi le *Phasia* sopra i fiori di ombrellifere, sui quali era pure qualche *Deilus fugax.*

20. Unitamente al prof. Filippo Fanzago si fa una piccola escursione ne'contorni della città; escursione che fu disturbata dalla frequenza della pioggia. Si giunge in un posto detto *Rizzeddu.* La raccolta fu molto scarsa. Non potrei ricordare che due Stafilini non comuni. Di Miriapodi rividi i *Tropisoma,* che dopo Silìqua non aveva più trovato: però non vi erano in quell'abbondanza. Si ebbe poi la ventura di constatare con bellissimi esempii il fatto già innanzi osservato dal Fanzago, cioè il bozzolo che i Geofili costruisconsi con terra impastata con sostanza serica, quasi sferici, con la interna faccia scavata a spirale per potervi adattare il loro corpo.

21. Essendo giorno festivo parecchi professori di quella università eransi dato convegno di passar la giornata in una villa di uno di essi, il prof. Simula. E sapendo della mia dimora in Sassari, ebbero il gentile pensiero d' invitarmi a far parte di quella brigata universitaria, composta de'professori, oltre del Simula, Silvestrini, Corona, Fanzago, Valente. E fu veramente una giornata di svago che si passò assai allegramente, contribuendovi ancora un cielo sereno ed una temperatura piacevole. La scienza non venne del tutto messa in disparte: chè nelle ore abbisognate per allestirsi il banchetto esplorai i prati che si alternavano con la parte coltivata, e tra le cose raccolte (in vero non molte) ricordo una bella varietà dell'*Epeolus variegatus.*

22. Osilo è uno de'pochi paesi della Sardegna decantati per la bellezza delle contadine e per l'eleganza del loro abbigliamento. Sicchè, indipendentemente dal fare ricerche scientifiche in una località non visitata nel settembre, la curiosità mi spingeva a recarmi al nominato paese. Noleggiata quindi una carrozza, alle 8 a. m. mi dirigo a quella volta in compagnia del prof. Fanzago. Giunti alla cantoniera che è quasi a mezza strada, ci fermiamo un poco per qualche perlustrazione; e fui lieto di rinvenire sotto i sassi un bellissimo minuto Araneideo del genere *Formicina* non prima stato trovato in Sardegna, e che era rappresentato da specie diversa dalle due innanzi conosciute, cui ò imposto il nome di *F. Eleonorae.*

Alle 8 si giunge ad Osilo, ove a stento troviamo a far colazione presso un pizzicagnolo. Indi per fare un po' di caccia saliamo verso l' antico castello, trovandosi soltanto intorno ad esso piccole aje incolte e rivestite di spontanea vegetazione. Non ne ebbi, come non poteva attendermi, raccolta copiosa. Nondimeno vi fu di molto interessante un *Oxybelus* che presenta un fatto singolare, che non saprei in vero dire se normale e teratologico, quello di mancare del mucrone del metatorace [1]). Nè ciò per sofferta mutilazione,

[1]) Vedi le osservazioni nella parte terza.

osservandosi una speciale scultura nel posto in cui il mucrone avrebbe dovuto stare impiantato.

Non essendovi altro a fare, all'una ripartiamo per restituirci a Sassari.

23. Tra le molte isolette che disseminate stanno attorno la Sardegna vi è quella dell'Asinara, che ne è la maggiore; e che per quanto mi sappia non era ancora stata visitata da alcun Entomologo. Unitamente quindi al lodato prof. Fanzago deliberammo di andare ad esplorarla. Col primo treno partiamo per Porto Torres. Qui noleggiammo una barca da rimanere a nostra disposizione. Quando per mancanza di vento o per vento non propizio deve andarsi a remi, a percorrere il tratto di mare che separa l' Isola dell'Asinara da Porto Torres vi abbisognano parecchie ore, fino ad una quindicina: lo che ci avrebbe data molta noia, e forse ci avrebbe fatto rinunciare al proponimento, poichè ci trovavamo appunto con un tempo che non permetteva avvantaggiarsi della vela. Per buona ventura in quella mattina sarpava un piroscafo francese, il quale essendo diretto per la Corsica, passar doveva assai da presso l'isola del nostro obiettivo. Mediante i valevoli ufficii del sig. Giuseppe Anzani, direttore di quella dogana, ottenemmo che la nostra barca venisse rimorchiata dal piroscafo. Per tal modo, partiti da Porto Torres alle ore dieci e tre quarti, alle dodici e mezzo fummo lasciati in vicinanza dell'Asinara, e proseguendo a vela, dopo altri quaranta minuti giungemmo al paesello unico che è nell' isola detto Cala di Olivo. Il sig. Chirico Marginesu, continentale ivi stabilito da parecchi anni, l'unica persona colta che si trovi in tutta l' isola, ci accolse con modi assai urbani e familiari.

La collina che domina il piccolo paese è incolta e rivestita da' soliti suffrutici, Lentischi, Cisti, piccoli Tamarici. Vi sono sparse le Ferule, de'cui fusti gl'indigeni fanno uso per costruire seggiole e sgabelli. Ivi dirigemmo i nostri passi. Quella specie di vegetazione l'ò sempre trovata di poca utilità. Al che si aggiungeva che le Ferule, come altrove, erano già fruttificate. Sicchè prevedeva che la caccia non avrebbe dato risultamenti molto importanti. Svolazzava abbondante un Ascalafo che cominciavo allora a vedere e che ò trovato posteriormente del pari abbondante in tutta la Sardegna, per modo da essermi convinto essere specie comune ovunque, che schiude in sul declinare del maggio e si protrae per tutta la primavera e forse anche nella state. È l'*Ascalaphus corsicus*, cioè una delle tante specie che la Sardegna à di comune con la vicina Corsica. E pare sia la sola specie del genere che vi vive: almeno io non ve ne ho trovata altra. Di Imenotteri scavatori anche per la prima volta compariva l'*Ammophila rubriventris* da me descritta primamente sopra individui provenienti pure dalla Corsica. Anche in Emitteri rinvenni una buona specie che si aggiunge alle molte che dimostrano l'affinità tra le due vicine isole, cioè il *Rhyparochromus nitidicollis* descritto da Puton sopra individui di Corsica ove lo dice pure assai raro. In fatto di Microlepidotteri raccolsi con piacere una minuta e graziosissima specie che giungevami nuova e nella quale ò poi riconosciuta la *Choreutis pretiosana.*

24. Vedendo l' aridità di quella campagna e quindi la poca utilità di rimanervi una altra giornata, risolvemmo passare ad altra località. Per trovare pertanto un alloggio ci conveniva raggiungere l' estremo opposto dell' isola, distante da quello in cui ci trovava-

mo poco men che trenta chilometri. Avremmo potuto accedervi in barca, ma sia perchè il mare era molto agitato, sia perchè in tal modo avremmo perduta senza alcun profitto una giornata, rimanendo nella ignoranza della intera isola, determinammo farcela a gambe.

Alle 7 a. m. partimmo da Cala di ulivo, e percorrendo una campagna più o meno accidentata, ora rasentando la spiaggia, ora scavalcando qualche umile collina, sempre in mezzo ad una vegetazione monotana, alle 12 siamo ad un sito detto *Trabbuccato*, ove sono poche case coloniche. Qui facciamo sosta per provvedere allo stomaco, accolti cordialmente dalla famiglia Diana. Alle due p. m. ci rimettiamo in cammino, e tirando senza interruzione, alle sette giungiamo al luogo detto *Fornelli*, abitato da diverse famiglie di *Pastori*, che sono rustici, ma più o meno agiati proprietarii di case, terre e bestiame. Il Pastore Gavino Madau, cui eravamo diretti, e che era stato prevenuto del nostro arrivo, scortici da lungi, ci viene incontro e ci accompagna alla sua casa, presentandoci alla sua numerosa famiglia, che era là ad attenderci. E debbo confessare, che non fu poca la mia sorpresa nel vedere che mentre i figli non smettevano il carattere più rustico, le due giovani nuore del Madau, sebbene anch' esse di quell' isola, per avvenenza, per abbigliamento e per gentilezza di modi potevano benissimo stare a fronte di persone della non comune società del continente. Il nostro arrivo pertanto fu per la intera famiglia una vera festa. Ci furono destinate le migliori stanze, tenute per bene, ed a testimonianza di giubilo si fece immediatamente scannare un agnello, il quale unitamente ad altre provvisioni portate da noi, servì per un lauto banchetto, cui presero parte gl' individui tutti della casa, e che si protrasse per oltre un' ora, passata assai giulivamente.

Durante le due ore di fermata a Trabuccato non mancai di eseguire qualche indagine, e sebbene il prodotto non fosse stato molto abbondante, pure varie buone specie vi furono, sopratutto di Imenotteri, che si rileveranno dal catalogo che segue.

25. Alle 7 a. m. ci congediamo e scendiamo alla spiaggia poco lontana dal caseggiato. Il vento essendo favorevole ci rimettiamo nella nostra barca e, facendo uso della vela, in mezz'ora siamo all'altra piccola isola che dalla mancanza di qualunque altura è detta acconciamente *Isola piana*. Presa terra, sdraiati al suolo, mancandovi ogni abitazione, si fa colazione, e di poi ci diamo all' opera. Mi si presenta per la prima volta il *Nephodes villiger* var. *metallescens* speciale della Sardegna e che ho poi trovato in varii luoghi, e sempre più o meno abbondante. Sul *Pancratium maritimum* allora in piena fioritura era frequente l' *Acentrus histrio*. Fra i Cisti raccolgo la *Coptocephala scopolina*. Rinvenni un secondo individuo della *Chorcutis pretiosana*. D' Imenotteri raccolsi di raro la *Chysis sulcata*. Ma quello che più di ogni altro m' interessò fu una specie di *Lygaeus* che mi giungeva nuova, e sembrommi di molta importanza, non ostante la sua grande simiglianza col *Lyg. punctatoguttatus*. In fatti, dall'esame comparativo fattone è risultato che essa ne è molto diversa, sopratutto per la fattezza del protorace, onde l' ho denominata *Lyg. gibbicollis*. Anche nell'ordine de' Ditteri rinvenni una bellissima *Chlorops* assai probabilmente nuova. Sicchè in breve tempo quest' Isola in miniatura mi diede, per importanza, più che non aveami dato in due giorni la grande dell'Asinara.

Alle 12 $^1/_2$ ci rimettiamo in barca, e sempre a vela gonfia dopo un' ora e mezzo ap-

prodiamo alla spiaggia attigua allo *Stagno di Pilo,* ove scendiamo, congedando la barca. Il mio collega Fanzago si occupa di caccia di uccelli, io di animali minori. Sulla spiaggia era notevole la frequenza di un ragno non ancor determinato. Eravi poi non rara la *Tentyria ligurica* che in generale in quella stagione ho vista meno spesso che nel settembre. Fra i giunchi eravi qualche buona Cicadaria.

Alle 5 mi metto in cammino per Porto Torres, ove con buon passo giungo alle 7 ½.

26. Le sponde del fiume che scorre presso Porto Torres mi avevano lasciato nel settembre vivo desiderio di perlustrarle assai posatamente. Nondimeno neppure questa volta potetti soddisfare tutto il mio desiderio. Mi accontentai quindi di consacrarvi le ore del mattino, le quali furono tanto produttive, da farmi maggiormente rimanere dolente di non poter passare altri giorni ancora in quella ubertosa località. Le cose più interessanti le ebbi tra gl' Imenotteri. Citerò dapprima due buonissime specie del genere *Priocnemis,* una nuova che ho denominata *Pr. leucocoelius,* l'altra l'*abdominalis.* Della famiglia dei Tentredinidei, della cui somma scarsezza nella Sardegna ho già tenuto parola, rinvenni una che non solo mi è sembrata nuova specie, ma mi dà ragione di considerarla come distinto gruppo generico. Come specie non comuni eranvi la *Chalcis pectinicornis,* ecc. Di Emitteri raccolsi tra la base delle piante palustri un Capsideo che per me giunse nuovo. E sì pure non mancarono buone specie degli altri ordini, come si rileverà dal catalogo generale che segue.

Nelle ore pomeridiane facemmo ritorno a Sassari.

27. Rimango in città, sia per ordinare le cose raccolte nei tre giorni precedenti, sia perchè, come a Cagliari, dovevo anche qui per disposizione del Ministero di Agricoltura e Commercio prender parte ad una riunione presso la Prefettura, promossa onde avvisare su' mezzi pratici più valevoli per impedire che la Fillossera venisse importata nell' Isola.

28. Visito un' altra località denominata *Tissi.* Partito col treno delle 10 a. m. in trenta minuti sono sul posto. In vicinanza della stazione è un piccolo rivolo, intorno al quale mi arrestai. In prima sollevando i sassi più o meno immersi in cerca di molluschi gasteropodi che han l'abitudine di vivere a quelli attaccati, come gli Ancili e le Neritine, che in fatti non mancavano, rimasi compiaciuto dal trovarvi la Spugna di acqua dolce, che vedevo per la prima volta nella Sardegna, non ostante in tutti i corsi di acqua visitati avessi praticato simili indagini: essa vi formava strati compatti di un bianco candidissimo, spessi fin oltre il centimetro. E tanto maggiormente ho considerato interessante quel fatto, in quanto neppure in seguito l'ho più riveduta ne' tanti altri corsi di acqua perlustrati. Troppo lungo sarebbe lo intrattenermi ad enunciare le altre cose raccolte.

29. Le vicinanze di Alghero non potevano andare del tutto trascurate: sicchè prima di lasciare Sassari volli rivederle. Partendo alle 2 p. m. con la consueta carrozza postale, alle 7 ½ sono in quella città, della quale ammiro i miglioramenti avvenuti entro il decorso di pochi mesi, nella parte esterna.

30. La mattina esco di buon' ora, avviandomi per la via stessa del littorale battuta nel settembre, sulla quale però m' inoltro assai di più che non potetti far l'altra volta a causa della brevità della giornata. Lorchè fui in prossimità del breve canale che mette

in comunicazione lo stagno col mare, avvertii un fetore pestilenziale intollerabile, che quasi spingevami a retrocedere. Ma il bisogno di raggiungere una sorgente d'acqua che la guida aveami anunnziato trovarsi poco più oltre onde dissetarmi essendo il caldo oltremodo estenuante, mi diede animo a vincere la ripugnanza. Traversando il ponte che è su quel canale ebbi ad accorgermi dei grossi mucchi di alghe sparsi qua e là in piena putrefazione, che erano i fattori di quelle micidiali emanazioni miasmatiche, e rimanere nel tempo stesso sorpreso come nè il governo, nè la provincia pensino ad espurgare quel canale e togliere la causa degli inevitabili morbi miasmatici. La caccia fu piuttosto ubertosa. In fatto di Imenotteri rividi il *Priocnemis perligerus* che nel settembre avevo raccolto presso Oristano, e rinvenni altro individuo del *Priocn. leucocoelius* pochi giorni innanzi trovato a Porto Torres. Così pure vidi nuovamente il *Pompilus meticulosus*. Per la prima volta poi mi si presentò un'altra specie di *Pompilus*. Piacquemi ancora raccogliere ambedue i sessi della *Myzine erythrura*, di cui erami noto il maschio soltanto e poter riconoscere i caratteri pei quali anche la femmina distinguesi da quella della comune *Myz. sexfasicata*.

Sul *Pancratium maritimum* era costante la presenza dell'*Acentrus* sopramenzionato, siccome sui piccoli Tamarici non mancava il *Capsus Forelii*. Abbondante era pure il *Nephodes metallescens*. Sulle Tapsie non era rara l' *Agapanthia irrorata*.

Debbo poi notare un fatto negativo. Nel settembre incontravansi frequenti per su le aride e nude sabbie vicine al littorale la *Tentyria ligurica* e la *Pachychila Servillei*. Nella circostanza attuale di quei melasomi vedevasi appena qualche individuo. La qualcosa era in armonia con quello che avevo avvertito anche altrove.

31. Ritorno a Sassari.

Mese di Giugno.

1. Il giorno innanzi ritornando in vettura da Alghero a Sassari, avevo osservato che nelle vicinanze di *Tissi* eravi un piccolo campo sparso di *Thapsia garganica* in fiore, ed un altro simile, ma ancora più vasto eravene vicino la fermata di *Canèga*. Non volli lasciarli inesplorati, sapendo per precedente esperienza come i fiori di quelle ombrellifere richiamassero a loro insetti di svariate genie. Parto, come l'altra volta, col treno delle 10 a. m. ed alle 10 e mezzo discendo alla stazione di Tissi. Risalgo fino alla via rotabile e raggiungo il piccolo campo incolto sparso di Tapsie, e che era assai presso al fiume che ivi corre. Le mie previsioni non fallirono. Grande era la copia di Imenotteri e di Ditteri che intorno a quei fiori si aggiravano, senza mancare nuove specie di altri ordini. Sicchè ebbi a rimanere occupato in quel piccolo campo fino alle 3 p. m. Tra i primi rimasi compiaciuto trovare ambedue i sessi dell'*Hoplisus sulcifrons*, di cui conoscevo soltanto la femmina, la *Lyssonota maculatoria*, altra specie dello stesso genere probabilmente nuova, ec. Un'altra ora la passai presso le sponde del vicino fiume, ove raccolsi tra l'altro qualche bella specie di *Thrips*.

Alle 4 lasciai quel posto e, seguendo la via carrozzabile, mi avviai verso *Canèga*. Lun-

go la strada era frequente un *Cleonus* finora indeterminato, più raro l'*Anisorhynchus costatus ;* e qua e là il *Cydnus pilosus.* Alle 5 giunsi all' altro campo di Tapsie, sulle quali rinvenni ancora varie specie non trovate nel primo.

Alle 6, non essendo più l' ora propizia, desisto dalla caccia. E poichè pel passaggio del treno mancava ancora oltre un' ora e mezzo, durante la quale avrei dovuto rimanere sulla nuda via, preferii continuare a piedi fino a Sassari, ove giunsi alle ore sette.

2. Rimango in casa per riordinare le raccolte e dispormi alla definitiva partenza da quella città.

3. Parto da Sassari alle 10 a. m. per ferrovia. All' una e mezzo sono alla stazione di Ozieri cui ero diretto, sia per esplorare altra località, sia per conoscere personalmente il sig. Damry, entomologo francese colà stabilito, ed osservare la sua collezione di Coleotteri Sardi. Alla stazione trovai pronta una vettura, la quale in tre quarti d' ora mi condusse in paese, posto sopra ridente collina. Prendo stanza nell' unico ma tollerabile *Albergo del Corso.* Il sig. Damry, saputo del mio arrivo, ebbe la cortesia di venirmi a trovare, e condurmi in sua casa per cominciare ad osservare la sua collezione de' Coleotteri della Sardegna, che è molto interessante. Con lo stesso si stabilisce fare il dì seguente una escursione nella vicina montagna.

4. Alle 6 a. m. usciamo a cavallo, andando così fino al villaggio *Nughedu,* ove siamo alle 7. Da qui, a piedi, prendiamo la via della valle, risalendo la quale giungiamo sul dorso della montagna che domina il nominato villaggio dal quale s' intitola. Lungo la valle vi ha abbondante e svariata vegetazione : sulle alture sonvi querce da sughero. Siffatte condizioni rendono quella località assai buona per l' Entomologo. La serenità del cielo e la dolce temperatura faceano svolazzare in gran copia per quella valle i papilioni. E vi erano, tra gli altri, assai abbondanti i due speciali della Sardegna, quali sono l' *Epinephele Nurag,* ed il *Pararge Tigelius* che è una locale modifica del comune *megaera* del continente, onde a ragione vien considerato qual semplice varietà di questo. Non mancava il *Charaxes Iasius,* siccome era assai frequente il *Rhodocera Cleopatra.* La *Zigaena corsica* era pure comune. Di Geometre eravi ancora abbondante una specie particolare della Sardegna, della Corsica e della Grecia, la *Cidaria bistrigata,* la quale nel fondo non è che una trasformazione della volgarissima *C. bilineata,* cui si sostituisce. Di Coleotteri vedevansi sopra i tronchi delle Elci la *Chrysobothris affinis,* il *Lygistropterus sanguineus,* l' *Apate capucina.* Sul ridosso del monte entro le grosse masse di sterco bovino che presentavano indurita appena la esterna superficie viveva in gran numero lo *Staphylinus marginalis,* anch' esso esclusivo della Sardegna : battendo leggermente alla superficie vedeansi sbucare con grandissima agilità, levandosi indi a volo od insinuandosi entro terra.

Alle 3 p. m. battiamo ritirata. La sera continuo la visita della collezione del Damry, il quale gentilmente mi offre parecchie specie che non ancora avevo trovate.

5. Lascio Ozieri, e col treno dell' una e mezzo p. m. parto per Oschiri, ove giungo alle due. Il sig. Quirico Antonio Pischedda, cui era raccomandato, si occupa a trovarmi una stanza decente, mancando nel paese un albergo abitabile; e la rinviene presso un

botteghiere! Assicurato l'alloggio, alle tre, accompagnato da una guida, mi dirigo al fiume o Rio Coghinas, che raggiungo dopo tre buoni chilometri di strada. Le sponde erano in gran parte sabbiose e popolate da Tamarici, Salici, ec. Sui primi era abbondante un *Coniatus* che sebbene nel fondo facesse scorgere il comune *C. tamaricis,* pure presentasi con tal diverso abito, che a primo sguardo si direbbe specie distinta. Sopra i salici trovavasi piuttosto abbondante la *Galleruca calmariensis.* Nelle sponde sabbiose erravano i consueti minuti carabicini, fra quali notavasi per straordinaria abbondanza il *Lionychus Sturmii.*

Rientrato in paese alle sette, rimaneva un altro problema a risolvere, quello di trovare un posto un tantino decente nel quale prendere un ristoro. Ma non ostante tutta la cura spiegata dal sig. Pischedda la soluzione del problema non fu possibile: dovetti accomodarmi ad una bettola qualunque, e mangiare circondato da tutti i campagnuoli, od operai i quali reduci dal lavoro entravano a bere il loro mezzo litro di vino.

6. Nelle ore del mattino mi reco ad altro fiume, il Rio di Ozieri. Sui fiori di poche Tapsie trovai in straordinaria copia il *Bruchus longicornis*, avendo così la opportunità di convincermi delle notevoli differenze che passano fra i due sessi. D'Imenotteri ne venivano parecchi e buoni. Ne menzionerò soltanto due che m' interessarono più di ogni altra cosa, cioè una bella specie di *Oxybelus,* che più specialmente pare debba ascriversi al genere *Notoglossa* di Dahlbom, ed un Tentredineo del genere *Cryptocampus*, che è nuova specie, denominata *Cr. distinctus.*

Alle ore due e mezzo p. m. parto con la corriera postale per Tempio, ove giungo alle sette. Sebbene da poco tempo fossesi istallato in quella città un discreto albergo nel quale avrei potuto stabilirmi, la famiglia Cabella che aveami ospitato nel settembre non permise che avessi disertato. Accettai quindi ancora questa volta la ospitalità offertami, convinto come ero che essa mi si dava con piena effusione di cuore.

7. Mi trattengo varie ore in due boschi di querce poco discosti dalla città. Di Lepidotteri raccolsi alcune buone specie di Tortrici. Era poi oltremodo comune la *Cidaria bistrigata* superiormente menzionata: pareami di trovarmi nelle selve della nostra collina de' Camaldoli ove nella medesima stagione vedesi con eguale abbondanza svolazzare l'affine *Cid. bilineata.* Di Ditteri raccolsi il *Chrysotoxum bicinctum,* che s'incontra assai raramente. Altro dittero ancora più raro fu la *Clytia helvola.*

8. La pioggia forte accompagnata da vento impetuoso, sì da sembrare una delle peggiori giornate d' inverno, mi costringe a rimanere in casa.

9. Sebbene il vento continuasse ad infuriare ed il cielo fosse nuvoloso, mi determinai recarmi a perlustrare la montagna che domina il piccolo paese di Aggius, distante circa quattro chilometri da Tempio. Per condiscendere alle premure de'Cabella, uscii a cavallo. Fatta però men che metà della via, riconobbi la necessità di proseguire a piedi. Mi trattengo dapprima in un campo a *Cistus monspeliensis* in parte tuttavia in fiore, e su questa pianta raccolgo il *Trichius* descritto da Genè col nome di *fasciolatus*, quantunque essenzialmente non sia diverso dal *zonatus* di Germar. Circa mezzo chilometro prima di giungere al paese mi arresto innanzi ad uno stillicidio di acqua che scorrendo sulla superficie

della roccia, produceva un piccolo rivolo sul margine della strada. Richiamò in prima la mia attenzione una graziosissima *Hydroptila* che, come è suo ordinario costume, camminava in buon numero per su quella roccia bagnata. Ricercando poi tra l' umido tappeto di erbette che era a piè della strada con piacere vi rinvenni un covo di *Nebria ridibunda,* di cui varii individui fra i molti non ancora maturi, mi facean comprendere esser quella l' epoca della schiusa di quel carabicino, che in seguito non ho più riveduto.

Alle ore undici fui ad un pozzo, che mi si disse di buonissima acqua, posto fuori il paese. Ivi fo un po' di sosta per consumare la colazione, di cui la famiglia stessa che mi ospitava avea avuto la cura di provvedermi.

Alle dodici mi rimetto in cammino e risalendo per un' angusta valle giungo fin sotto una delle varie creste nelle quali superiormente il monte si ripartisce. La valle si presentava di una particolare importanza, sopratutto per la copia di ombrellifere in fiore, fra cui non mancavano le piccole Tapsie. Il vento però che continuava a soffiare impetuoso facea rimanere spopolati quegli ombrelli, sui quali solo a grandi intervalli vedeansi comparire Imenotteri e Ditteri. Fra questi ultimi potetti, tra l' altro, raccogliere buone specie della famiglia delle Fasie. Di Coleotteri apparve qualche *Anthaxia cyanicornis.*

Alle quattro, sconfortato dal vento che era molesto non solo per gl' insetti, ma anche per me, lascio la montagna e ridisceso al paese, a cavallo ritorno a Tempio.

10. Il Rio Coghinas che avevo già visto presso Oschiri passa tra Tempio e Perfugas scorrendo per una valle che venivami indicata come meritevole di essere perlustrata; onde mi determinai ad andarvi. Il sito più vicino in cui il fiume s' incontra è denominato *S. Rocco,* da una cappella ivi eretta in onore di quel Santo: e dista da Tempio circa venti chilometri. Sicchè andando a cavallo di buon passo ci vollero tre ore e mezzo, battendosi una strada buona e carrozzabile. Pria di avvicinarmi al fiume esplorai i lentischi e gli olivastri che vi erano in copia e raccolgo quattro diverse specie di *Psylla,* tra le quali la *Ps. oleae,* non diversa da quella che nell'ulivo coltivato suole spesso moltiplicarsi straordinariamente sopra i racemi fiorali producendovi speciale malattia. Raggiunto il fiume mi occupo primamente alla ricerca di molluschi fluviali, vedendo presso le sponde abbondanti le erbe acquatiche entro le quali quelli sogliono abitare. Dopo tanti fiumi esplorati non mi lusingavo di trovar cose non viste di già, ma solo prender nota di ciò che vi esistesse. E pure non fu così; chè non una, ma più specie vi rinvenni non prima osservate. Del genere *Physa,* che può dirsi assai ben rappresentato in Sardegna rinvenni due specie che non conoscevo. Una di esse offriva tali caratteri, che non esitai un istante a giudicare che avevo fra le mani una specie del tutto nuova; ed il mio giudizio era esatto. Pertanto essendomi recato a Firenze e visitato la ricca collezione della Marchesa Paulucci, appresi che quella *Physa* sarebbe stata da lei descritta nella malacologia sarda che era già per le stampe col nome di *Ph. saeprussana*: nome che mi è convenuto rispettare, sebbene allora tuttavia inedito [1]). L' altra specie di *Physa,* della quale non trovai che individui assai piccoli, pare debba essere la *obtusa.* Anche del genere *Limnaea* eravi abbondante una piccola specie che non avevo ancora trovata.

[1]) Attualmente la detta opera è già venuta alla luce.

D' insetti acquatici poco vi fu d' interessante. Solo di Emitteri Amfibiicorisi trovai per la prima volta nell'isola l'*Hydrometra argentata.* Ed in quanto ad insetti terrestri, la caccia fu troppo breve. Potrei citare, come specie che non trovasi assai facilmente, il *Leichenum pulchellum,* che come al solito vivea entro la sabbia prossima alla sponda.

11. La catena estesissima di monti che va col nome di Limbara, in tutto il versante che guarda la valle di *Curadori,* è in gran parte coperta di boscaglia costituita da *Erica arborea, Cistus monspeliensis,* e giovani *Arbutus unedo.* A grandi intervalli trovansi folti boschi formati in massima parte dalla *Quercus ilex.* In alto vi sono qua e là sorgenti di limpide acque che scendono giù per angustissime vallecole in mezzo alle parti boschive. In questo giorno ne visito l'estremo più prossimo a Tempio e che è rivestito di semplici suffrutici. In un ripiano che incontrasi nelle falde detto *vuccaccia,* m'imbattetti per caso in una carogna di volpe, la quale mi procurò la soddisfazione di raccogliere varii individui del *Necrophorus corsicus* (*funereus* Genè), che è altra specie particolare delle due vicine isole Corsica e Sardegna. Ed insieme ai Necrofori eravi gran copia di *Silpha rugosa* e *granulata,* di *Creophilus maxillosus, Leistotrophus murinus, Philonthus,* di *Saprinus,* di *Dermestes sardous.* Ascendendo il monte mi elevo fino al sito denominato *cannaresta,* che rimane sotto una delle creste di nuda roccia detta *Punta* di *Scalandari.* La caccia non fu molto abbondante, chè, come altrove ò notato, quella sorta di vegetazione non suol essere di grande importanza. Però vi rinvenni di molto interessante un bellissimo microlepidottero, che ancora non ho potuto determinare. La sera ritorno a Tempio.

12. Fin da quando nel settembre percorsi la prima volta in carrozza il Limbara, lungo la valle *Curadori* avevo notato che a fine di meglio perlustrare quei monti e sopratutto la regione boschiva con minor perdita di tempo, sarebbe stato opportuno piazzarmi in un sito detto *Agnàta,* ove è un caseggiato destinato ad ingegneri, cantonieri e guardiani, attiguo alla strada ed in regione boschiva. Trovandomi quindi in Sassari, profittando dell'amicizia del Cav. Domenico Cordella Ingegnere capo dell'ufficio Tecnico di quella provincia, e che alle maniere gentili associa l'apprezzamento delle scienze, eromi provveduto di lettera che mi procurava il vantaggio di avere ivi una stanza. Partii quindi di buon' ora a cavallo per quella volta. Onde meglio assicurare il mio collocamento, il sig. Antonio Cabella volle accompagnarmi egli stesso. Ottenni in fatti una stanza, la quale in vero non era molto confortante; ma pure bisognava accontentarsi. Circondato da boschi, fu in questi che passai la intera giornata, elevandomi fino alla sorgente di acqua cui si dà il nome di *fontana dell' ampulla.* I tronchi di grosse Elci abbattuti e prostrati al suolo, su' quali contavo trovare insetti corticicoli, mi fecero rimanere deluso. La maggior parte erano già oltremodo secchi, ovvero con la corteccia già asportata. I soli coleotteri che vi potetti trovare furono il bello *Helops robustus* e l'*Endophloeus spinulosus.* In pochissimi resi fradici dalle acque rinvenni sotto le cortecce e fra i detriti due specie di piccoli *Julus,* la solita *Clausilia Kusteri,* la *Pupa umbilicata.* Sopra le Elci vegete trovai parecchi individui del *Caulostrophus Delarouzei,* che non era stato ancora indicato come abitatore della Sardegna e qualche *Balaninus tessellatus.* Sui tronchi vedevasi sparsamente il *Lygistropterus sanguineus* e l'*Apate capucina.* Nelle parti più

ombrose incontravasi frequentemente vagante il *Calosoma sycophanta* e sotto i sassi il *Percus strictus*. In un piccolo riposo che formavano le acque di uno dei rivoli che di tratto in tratto s'incontravano trovai poche specie di Coleotteri, fra i quali qualcuna che non ho rinvenuta in alcun altro posto, come l'*Agabus brunneus* e l' *Hydrobius convexus*.

13. Prendendo la via di *Gaddau* e dello *Stazzo dei salici*, giungo ad altra sorgente di acqua detta *Fontana Majuri*, di dove mi elevo sulla dominante altura, dalla quale si scopre un orizzonte vastissimo. Al ritorno ebbi occasione di sperimentare ancora una volta il carattere affettuoso dei buoni *Pastori* sardi. Imbattutomi con uno di essi, volle conoscere dalle mie guide chi io mi fossi e quale scopo mi menasse per quelle vie, per le quali avviene tanto di rado vedere passare un forestiere. Dapprincipio si mostrò diffidente delle notizie ricevute. Ma, poi che ebbe constatata la verità osservando gli oggetti raccolti, mi si mostrò ossequiosissimo, e m'invitò ad accedere in sua casa *(Stazzo degli Arsi)* che era a pochi passi dal punto in cui ci trovavamo, onde riposarmi. Volevo ringraziarnelo e proseguire il mio cammino; ma le guide mi suggeriscono di accogliere lo invito, chè il buon uomo avrebbe avuto a male il rifiuto, considerandolo come un disprezzo. Mi convenne quindi accettare. Come fummo in vicinanza della casa, la moglie ed una figlia, vedendo il loro capo giungere con un forestiere vennero fuori l'uscio, e nell'arrivare mi strinsero la mano quasi fossimo state antiche conoscenze, e mostrandosi liete e soddisfatte della visita che ricevevano, mi additarono a sedermi in un antico ed ampio divano, unico mobile che, oltre il letto e gli utensili di cucina, esistesse nell'unica stanza terranea destinata a dimora durante la calda stagione. Mediante le guide, che faceano da interpreti, poichè del loro dialetto comprendevo appena qualche parola, si fece un po' di conversazione. Frattanto la figlia preparò il caffè, che mi venne esibito in tazza di fina terraglia, accomodata in una piccola cesta coperta da terso tovagliolo: caffè che trovai di buonissima qualità, quale non trovasi facilmente in molti paesi. Non soddisfatto di ciò, il pastore fece vive istanze perchè fossi rimasto ivi la notte; di che lo ringraziai, adducendo a giusto motivo la non grande distanza che mi separava da Agnàta, ove io dimoravo.

Tra le cose raccolte in questo giorno noterò alcune buone specie di minute Cicadarie.

14. Mi ero proposto in questa terza giornata ascendere al *Jugantinu*, che è la punta più alta del Limbara; però il vento che continuava sempre impetuoso e molesto nella parte bassa, e che là su avrebbe dovuto essere intollerabile, mi costrinse a rinunziarvi, ed invece fare ritorno a Tempio. Nelle prime ore trattenendomi presso le siepi di roveri che fan cinta ad un orto attiguo al caseggiato, oltre a varii buoni Imenotteri, vi raccolsi un Locustideo del genere *Odontura*, nel quale, sebbene non avessi trovato che soli individui maschi, mi fu agevole riconoscere la mia *Od. pulchripennis*. Di poi, giusta la presa determinazione, lascio Agnàta, diretto a Tempio. Mi trattengo nel piano di *vuccaccia*, già visitato il giorno 11. Rivedo la volpe per osservare se altri Necrofori vi fossero accorsi, ma il breve tempo trascorso era stato sufficiente a far consumare tutte le parti molli, sicchè non rimanevano che la pelle e le ossa spolpate abbandonate da ogni vivente. Procedendo ol-

tre, in alcuni salici osservo abbondanti le galle porporine che sulle foglie produce il *Nematus Vallisnieri*. Le galle erano mature, e le larve contenutevi già adulte e prossime a trasformarsi in ninfe. Da queste argomentai che il cennato Tentredinideo non deve esservi raro, sebbene non ne avessi rinvenuto alcuno.

15. Rimango in casa per dare assetto alle cose raccolte nei tre giorni passati sul Limbara e dispormi alla partenza.

16. Da Tempio passo direttamente a Terranova con speciale vettura: v'impiego cinque ore. Giunto presso al mezzo giorno, e presa stanza nell'albergo l'*Avvenire*, discretamente tollerabile, il sig. Antonio Putzu Bardanzellu con estrema cortesia mi procura un uomo che mi servisse di guida nelle mie peregrinazioni. Sicchè, mettendo a profitto le rimanenti ore del giorno, mi propongo visitare le sponde del fiume che scorre a circa tre chilometri di distanza dalla città. La campagna che si percorre è sterile e ricoperta qua e là da' soliti lentischi e cisti. Il poco pascolo che vi rimaneva negl'intervalli era divorato dalle cavallette (*Stauronotus cruciatus*). Raggiungo il fiume ad una certa distanza dal suo sbocco nel mare. Le sponde sabbiose offrivano assai abbondante il *Bembidium Kusteri*, di cui per lo innanzi avevo trovato un individuo solo presso *Muravera*, altre piccole specie della stessa famiglia ed alcuni Antici.

17. Mi determino visitare il Porto degli Aranci, assai rinomato nell'isola per la sua natural sicurezza, e che tra poco sarà congiunto a Terranova mediante ferrovia. Delle due strade che là conducono prescelgo nello andare quella che scorre in vicinanza della spiaggia. La campagna che si percorre passando da colle a colle è tutta coperta di Lentischi sui quali la Cicala *(Cicada cisticola)*, che può dirsi la specie dominante dell'isola, era oltremodo abbondante ed assordava con canto assai stridulo e meno ritmico della sua congenere maggiore *(C. Fraxini)* più comune tra noi. Dall'alto della collina che domina il porto si presenta allo spettatore un panorama de' più pittoreschi ed incantevoli che si possano immaginare e forse il più incantevole di tutto il littorale dell'isola. Non già nella spiaggia e contorni del porto, che, meno la sua importanza per la sicurezza alle navi, nulla offre di speciale; ma per lingue di terra costituite di nudi e bianchi sassi variati dal verde de' Lentischi ed alternanti con zone di mare, succedendo dietro di esse colline interamente verdi, ed in fondo le creste merlettate interamente bianche dei monti più alti. Curiosato il porto, ritorno in Terranova per la via che scorre tra colline e monti. L'aridità della campagna e la natura della vegetazione rendeva molto scarso il numero degl'insetti che rinvenivansi. Padrona del campo era come abbiamo detto la Cicala. Dei Lepidotteri diurni il più frequente era l'*Epinephele Ida*, che presentasi con colori ben più intensi di quelli che à nella nostra provincia. Di Coleotteri noterò l'abbondanza della *Clytra cyanocephala*. Presso la spiaggia era frequente un *Talitrus* che facevasi marcare pel color latteo con due macchie dorsali scure: colore che à conservato immerso nell'alcool, mentre la comune specie immersa in questo liquido diviene ordinariamente rossa come i Gamberi. Lungo la via incontravasi di tratto in tratto vagante il *Pachypus siculus*, ma individui tutti egualmente piccoli, lunghi appena da' dodici a' tredici millimetri.

18. Parto per ferrovia alle 9 a. m.; alle 2 $^1/_2$ sono a Macomer, di dove dovevo recarmi

a Nuoro. Non trovando però alcuna carrozza che volesse partire a quell'ora, mi convenne rimanere in questo paese fino alla sera, fermandomi nel modestissimo Albergo Murgia. Esco nella vicina campagna, ma la pioggia sopraggiunta mi obbliga a ritirarmi. Ciò non ostante aggiunsi varie specie a quelle innanzi raccolte. Alle ore nove e mezzo parto con buona carrozza per Nuoro.

19. All' una del mattino si fa sosta presso la cantoniera del Tirso per far riposare i cavalli. L'acqua cadeva a diluvio. Alle quattro ci rimettiamo in cammino, ed alle sette a. m. giungiamo a Nuoro. Prescelgo questa volta l'altro albergo che mi si diceva migliore di quello in cui alloggiai nel settembre, cioè quello del *Cannon d'oro;* ma in vero anche in questo trovai poco da rimaner soddisfatto. Non essendomi nel settembre trattenuto che una sola notte, questa città poteva dirsi nuova per me: nè alcuna conoscenza avevo avuto l'opportunità di fare. Però una lettera del sig. Putzu da Terranova mi procurò il vantaggio di far la conoscenza dell'avvocato sig. Giuseppe Pilari, il quale si mostrò verso di me tanto cortese, da non farmi sentire il bisogno di altre conoscenze. Quello che principalmente mi occorreva era una guida fedele che mi avesse accompagnato nelle perlustrazioni che mi proponeva fare in taluni dei vicini paesi. Dappoichè, siccome ò notato nella precedente memoria, il distretto di Nuoro è il solo della Sardegna in cui il forestiere non possa azzardarsi a viaggiare con troppa sicurezza personale, attesa l' indole poco lodevole degli abitanti. E nell'epoca in cui io mi trovavo i dubbii erano tanto maggiormente fondati, in quanto da pochi giorni aveva avuto luogo una orribile grassazione con omicidio, per la quale parecchi individui si trovavano latitanti. Mi risovvenivo delle condizioni nelle quali mi ero trovato nella regione delle Sile nel mio ultimo viaggio per le Calabrie. Siffatte notizie però non mi fecero cangiar il piano propostomi. Solo credetti opportuno, come l' altra volta, avvalermi della facoltà della quale ero investito, chiedendo che due carabinieri mi facessero scorta durante il giro che volevo fare. Il tempo proseguendo ad essere perverso m' impedì di visitare le circostanti campagne, sicchè il resto della giornata dovetti passarlo in casa a lavorare.

20. Accompagnato dalla mia guida e dai due carabinieri parto da Nuoro a cavallo, diretto ad Oliena. Percorso appena un chilometro, mi trattengo in un' aia prativa con molte ombrellifere, facendovi discreta caccia di Imenotteri e Ditteri. Di Coleotteri vedevasi qua e là l'*Anthaxia candens*. Di Ortotteri trovavansi alcuni Locustidei per la prima volta completi, come la *Ephippigera rugosicollis* e la *Platycleis tessellata*. Proseguendo a discendere, le guide m' indicano una piccola sorgente di acqua, presso la quale avrei potuto far sosta per la colazione, come in fatti eseguii. In quel frattempo osservando una piccola raccolta dell'acqua proveniente dalla sorgente, non ostante fosse inquinata dal sapone adoperato dalle contadine che andavano in quel rivolo ad imbiancare i panni, vi vidi molti minuti coleotteri. Fattane la pesca vi trovai buone specie d' *Hydroporus*, tra quali il *Martinii* conosciuto soltanto di Corsica, e che in conseguenza vedevasi per la prima volta nella Sardegna, il *lepidus* che non ò incontrato in altre acque, non che il comune *granularis*. Il meno frequente era il *Martinii*. Si discese fino ad incontrare il fiume Cedrino. La valle in fondo alla quale scorre questo fiume offriva un aspetto oltre modo

ridente, sopratutto per la copia di giganteschi Oleandri vegetanti presso le sponde e che trovavansi in completa e lussureggiante fioritura. Anche qui mi trattengo un buon pezzo, non senza vantaggio. Alle 5 p. m. son costretto lasciare quella valle, e risalendo nel versante opposto, dopo un'ora di cammino non interrotto a cavallo, giungo in Oliena. L'è questo un piccolo paese ed uno dei poco sicuri per l'indole degli abitanti. Mi si era fatto credere che avrei trovato una stanza onde passarvi la notte presso un botteghiere napoletano ivi stabilito, ma rimasi deluso e nel tempo stesso imbarazzato. Ma il brigadiere dei R. Carabinieri, sig. Giovanni Morelli, penetrato della mia posizione, mi offrì gentilmente ospitalità nella caserma, mettendo a mia disposizione la stessa sua stanza. Nè contento di ciò, volle egli stesso provvedere al vitto.

21. Scopo principale dell'andata ad Oliena era stato quello di visitare la valle del Galagone e la sorgente del fiume, di cui mi era stata fatta da parecchi una descrizione seducente. Sicchè di buon'ora, insieme ai miei inseparabili compagni e custodi, mi dirigo a quella volta.

Dopo la regione coltivata, che rimane attorno al paese, incontro una parte incolta con prato naturale. Fermatomi in questo punto, mi fu di grande soddisfazione ritrovare varii individui della mia *Stiraspis sardoa*, i quali valsero a farmi constatare la validità di quella specie da me descritta nella prima memoria; dappoichè non avendone rinvenuto nel settembre che un individuo solo allo stato adulto, poteva rimaner qualche dubbio intorno alla costanza dei caratteri specifici che la distinguono dalla specie ordinaria. Oltre a che mi convinsi esservi di essa due generazioni nell' anno, la prima delle quali raggiunge il suo sviluppo completo nel giugno, la seconda in settembre, quando insieme all' unico individuo, e che forse era il primo che erasi convertito in immagine, trovavansi parecchie larve e ninfe. — Più oltre si traversa una regione boschiva costituita da giovani Elci e Corbezzoli, da' soliti Lentischi e Cisti e da Mirti che in allora trovavansi in piena fioritura. In questo bosco molte buone cose raccolsi, e tra queste, sopra l'Elci, due bizzarre forme di Imenotteri Pteromalidei, sulle quali non posso per ora pronunziarmi. Scavalcando diverse alture si giunge in ampia valle adorna di Oleandri in fiore, e percorsa da un fiume che prende ivi stesso origine e conosciuto col nome di Galagone. Le guide mi conducono al punto della sorgente, che è in uno de' lati della valle, ove la roccia basaltica presenta ampia e profonda fenditura, che si protrae giù al disotto del livello del suolo adiacente, e dal fondo della quale vien su la massa di acqua che espandendosi nella valle dà origine al fiume. Innanzi quella fenditura, quasi a guarentigia, stanno molti massi della stessa roccia, i quali rendono un po' malagevole lo accedere alla bocca. Al di fuori poi vi ha altra piccola sorgente di fredda e limpida acqua, della quale profittammo per la colazione. — Indipendentemente da questo fatto geologico, per lo quale era stato stimolato da coloro che me ne avean data notizia, ebbi a convincermi esser quella valle un luogo di ricerche molto importante. La ricca vegetazione spontanea, la quantità di piante ombrellifere in vicinanza della sorgente, le sponde del fiume qua sabbiose, là erbose, son tali condizioni, che poche volte si trovan tutte riunite. Sarebbe troppo lungo esporre tutte le cose raccoltevi: e però mi limiterò a ricordarne talu-

ne poche soltanto. Vidi allora per la prima volta il *Lygaeus bisbipunctatus* da me descritto sopra individui del Piemonte e sul quale ritornerò nella terza parte. Rinvenni una giovane *Saga,* femina come tutte quelle finora trovate nelle provincie napolitane. La colorazione che essa offriva, e che verrà descritta a suo luogo, è molto diversa da quella delle femine adulte della *Saga italica* del continente. Però non potrei dire se quei colori son persistenti, ovvero si cangino con l'età. Per lo che la determinazione della specie rimane dubbia fino a che non si avrà la ventura di trovarla adulta, ciò che deve aver luogo nel mezzo della state, ovvero fino a che non si saran trovate nel continente larve della *Saga italica* per osservarne la colorazione. Notevole era l' abbondanza della piccola *Coniopteryx tineiformis,* che vivendo sopra il mentastro ne ricopriva talmente la superficie delle foglie e de'fusticini, da sembrare questa coperta da uno strato di calce; e lor quando queste piante venivano urtate, elevandosi tutti gl'individui in un istante a volo formavano una vera nuvola. In fatto di Coleotteri rinvenni la *Mordellistena* che ben venne denominata *pulchella,* non ancora veduta.

22. Da Oliena passo ad Orgosolo. Il Brigadiere Morelli volle accompagnarmi egli stesso. Andando tutti a cavallo ed a buon passo c' impiegammo due ore e mezzo. Orgosolo è un paese peggiore ancora di Oliena, ed in fama d'esser abitato da gente più malvaggia. Ed in fatti vi si osservano ceffi che destano raccapriccio, ed altri simili del tutto agli zingari. L'Etnografo troverebbe ivi da fare studii davvero interessanti. Anche qui venni ospitato nella caserma della R. Arma, il cui Brigadiere Pietro Mossa si mostrò non meno cortese del suo collega. Avendo manifestato il pensiere di andare a perlustrare le sponde di un fiume che scorre a'piedi della collina su cui è piantato il paese, egli fece immantinenti approntare il pranzo. — All' una potetti infatti discendere nella sottoposta valle, la quale lusingava molto a vederla, ma in vero mi offrì molto poco. Una specie interessante conservo di quella peregrinazione ed è una grossa *Megachile,* che ho descritta come nuova col nome di *carinulata.* Piacquemi ancora di aver potuto predare una *Aeschna Irene,* specie che non saprei dire se sia molto rara in quell'isola, attesa la difficoltà di dar la caccia agli Esenidei tutti, ma che certo non pare vi sia abbondante. Traversando una parte boschiva vidi poggiata sopra Elci una *Laphria,* ma non fu possibile chiapparla. Da quanto potetti scorgere sembrommi la *maroccana.* Sulle sponde del fiume trovavansi i soliti carabicini, il *Betarmon bisbimaculatus.* Sulla via s'incontrava qualche *Pachypus Petagnae.* — Alle 4 risalgo in paese.

23. Alle sette a. m. lascio Orgosolo, e tirando diritto sempre a cavallo, alle undici sono a Nuoro.

24. Era nel mio primitivo progetto da Nuoro recarmi nuovamente al Gennargento, seguendo un cammino inverso a quello tenuto nel settembre. Ma l'obbligo di trovarmi in Napoli il 1° luglio per gli esami universitarii, mi costrinse a rinunciarvi. Sicchè alle 5 p. m. parto da Nuoro con la corriera postale.

25. Alle 3 a. m. giungo a Macomer, donde riparto alle 4 a. m., per ferrovia, giungendo alle 10 a. m. a Cagliari.

26. Rimango in massima parte in albergo a lavorare. Rivedo la collezione di Coleotteri sardi del Lostia, che trovo di molto accresciuta.

27. Sebbene il domani dovessi partire per restituirmi in Napoli, pure non volli lasciare Cagliari senza rivedere lo Stagno di Quarto, sul quale nell'aprile, come si è detto, non potetti a causa del vento assiderante trattenermi. Alle 6 a. m. parto in carrozza e passando per Solengianus e Quartucciu in un'ora sono a Quarto. Di qua a piedi m'avvio per lo Stagno. Nelle praterie trovo estremamente abbondante la *Probosca viridana*. Nella sabbia del canale che congiunge lo stagno al mare potetti raccogliere parecchie buone specie di Coleotteri, fra i quali il *Pogonus filiformis* ed il *Bledius taurus*, ambedue speciali della Sardegna. Abbondante era poi la *Tachys scutellaris*. Giunto al luogo detto *la Palma*, mi resto a far colazione nella bettola, che vi ha pe'servi di pena del vicino Bagno di S. Bartolomeo. Di là m'incammino pel Capo S. Elia. Qui raccolgo varii buoni Imenotteri e Ditteri, fra quali ultimi la *Exoprosopa vespertilio*, che non è frequente in quell' isola. Presso la spiaggia del mare era abbondante la *Cicindela trisignata*, che non avevo ancora trovata, sebbene avessi veduta nella collezione Lostia. Sopra il Pancrazio non mancava l'*Acentrus histrio*, siccome non era raro in quelle adiacenze il graziosissimo *Baris scripturatus*.

Alle 3 p. m. desisto dalle ricerche e tirando diritto, alle quattro sono a Cagliari.

28. Alle 3 p. m. parto da Cagliari, ed in grazia di un mare calmo alle 5 p. m. del dì seguente sono in Napoli.

PARTE SECONDA

Ragguaglio sistematico delle cose raccolte.

Quali siano le classi di animali di cui ci siamo occupati nel nostro secondo viaggio per la Sardegna risulta evidente da quello che è stato già chiaramente esposto nella prima Memoria, e che forma il piano generale de' nostri studii. Stimiamo del pari inutile il dire che di animali vertebrati ci siam data ancora minore premura che la prima volta. Dappoichè, se allora avevamo interesse a procurarci specie che mancavano nel museo, nella seconda gita questo scopo non v'era, trovandocene già provveduti. E di quelli di cui avremmo desiderato ottenere, come ad esempio i micromammiferi, non è stato possibile ottenerne. Nulla quindi abbiamo da aggiungere. Solo in quanto a'Pesci di acqua dolce noteremo la grande abbondanza dell'*Atherina fluviatilis* nelle parti basse del Rio Manno, e probabilmente di altri ancora; siccome nelle regioni elevate è frequente la Trotta o *Salmo favio*. Passeremo quindi ad esporre quanto riguarda le diverse classi d' Invertebrati che ànno rappresentanti nella Fauna terrestre.

Senza pertanto ripetere le cose già dette nella prima memoria, stimiamo indispensabile, o per lo meno assai utile, esporre alcune avvertenze che servano a dar ragione delle notizie che i cataloghi che seguono contengono. In essi, e sopratutto in quello degl'Insetti, si vedranno figurare molte specie che trovansi già riportate nella memoria prima. La qual cosa potrà sembrare superflua ripetizione. Nondimeno, quando si rifletta alla grande distanza di stagione che passa tra l'uno e l'altro viaggio, e la diversità di luoghi percorsi in cadauno di essi, si troverà non che giustificata, importante tale ripetizione. Dappoichè è appunto dalla riunione di siffatte notizie che può formarsi un concetto della estensione geografica di ciascuna specie e dell'epoca in cui vive e possa rinvenirsi nello stato adulto. La qual cosa è di molto interesse. Anzi noi siam persuasi esser tuttavia molto scarso il tributo che finora apportiamo alla conoscenza della Geofauna Sarda.—Ancora è necessario dare uno schiarimento più esplicito intorno alla portata di siffatte notizie. Nel riferire in cadauna specie i luoghi ed il tempo in cui è stata da noi raccolta od osservata non intendiamo escludere che essa trovisi ancora in altri luoghi ed altra stagione. Sicchè non stabiliamo assiomi, ma esponiamo fedelmente ciò che dalle nostre indagini risulta. Così ad esempio nel dire che il *Telephorus praecox* lo abbiamo trovato soltanto presso Cagliari, ciò deriva dal perchè là ci trovavamo nella stagione in cui esso vive, e quindi non escludiamo che ricercandolo altrove nella stagione propria, non si trovi egualmente. Nel dire che una specie l'abbiam raccolta nel maggio e nel giugno non intendiamo asserire che non viva anche nel luglio e nell'agosto, ma soltanto esporre quel che a noi consta. Lo stesso vale per quanto si riferisce alla rarità od abbondanza; essendo fatti ben noti a naturalisti investigatori, che ciò che è raro in un luogo od in una stagione, può essere abbondante in condizioni di luogo e di tempo diverse. E basterebbe, per non uscire dalla Sardegna, il fatto dell'*Omophron variegatus* il quale, mentre dopo lo Genè che ve lo di-

scoprì la prima volta, era divenuto l'Araba fenice, ora lo sappiamo comunissimo, quantunque potrà continuare a ritenersi rarissimo quando non s'indovini il luogo della sua ubicazione, che per quanto sappiamo finora è molto circoscritta.

Dopo siffatte avvertenze passiamo ad esporre sistematicamente le cose raccolte, ovvero osservate e trascurate perchè troppo volgari.

Insetti

Coleotteri.

Come per ogni altra regione del globo, così per la Sardegna i Coleotteri sono stati i più diligentemente ricercati da tutti gli Entomologi che àn perlustrata quell'Isola ed i più accuratamente studiati. Ascriviamo quindi a grande ventura se le nostre ricerche ci ànno dato anche in quest'ordine qualche cosa da aggiungere al ricco patrimonio che innanzi possedevasi.

Di siffatta natura sono da registrare in primo luogo il genere *Pinophilus* degli Stafilini, del quale in europa conoscevasi soltanto un rappresentante nella Sicilia: al che si aggiunge che, a quanto pare, la specie sarda sarebbe diversa dalla siciliana e dalle altre congeneri prima note. Varie specie abbiam trovate che conoscevansi soltanto della vicina Corsica, e che in conseguenza son venute ad accrescere il numero de' Coleotteri italiani. Sono di tal condizione l'*Olisthopus anomalus*, l'*Hydroporus Martinii*, l'*Hydr. Ceresyi*, il *Gymnetron griseohirtellum;* e sì pure varie che quantunque di altre regioni, non erano state trovate in Italia, come l'*Harpalus Goudotii*, l'*Auletes pubescens*, ecc. Più esteso è poi il numero di quelle che, sebbene già appartenenti al continente, nessuno aveva innanzi trovate in Sardegna. E ci piace citare tra queste il *Brachinus humeralis*, il *Diachromus germanus*, lo *Stenolophus vespertinus*, il *Telmatophilus typhae*, lo *Strophosomus Delarouzei;* tacendo altre che sarebbe lungo e noioso qui riferire. Aggiungeremo soltanto, per l'interesse della geografia entomologica, lo aver trovato una specie di *Scymnus* identica a quella trovata in Egitto e da noi denominata *Sc. zigzag*. La ragione dapprincipio accennata è quella per cui è difficile trovare specie di Coleotteri nuove; e se qualcuna come tale descriveremo, ciò sarà con molta titubanza, quantunque avessimo fatto il nostro meglio per assicurarcene.

Era stato già notato un fatto abbastanza strano nella Fauna Coleotterologica della Sardegna, la mancanza assoluta di ogni rappresentante di due generi di Epispastici, che in qualunque altra regione di europa trovansi con specie più o meno comuni: vogliam dire i generi *Cantharis* e *Mylabris*. Ora, sopratutto per le specie Milabridi, abbiam messo ogni cura nelle nostre investigazioni, poichè ci trovavamo appunto nella stagione nella quale sogliono apparire, e molto spesso con le piante sui cui fiori esse con predilezione se ne stanno, quali sono le *Scabiosa*. Ebbene, non abbiam potuto che confermare la loro mancanza. In quanto alle Cantaridi, abbiamo inteso a parlare di qualcuno nell'isola, il quale asseriva di averne veduto qualche individuo; ma probabilmente siffatta asser-

zione veniva da persona che giudicava Cantaride qualunque Coleottero da' colori verdi metallici od altro ancora [1]); dappoichè le Cantaridi non sono insetti che trovansi alla spicciolata, ma a stormi; sicchè la loro esistenza non potrebbe sfuggire. D'altronde è indubitato che i farmacisti per la confezione della pasta vescicatoria se ne provvedono dal continente.

Cicindelidei

Cicindela campestris, Lin.— Diffusa per tutta l'isola: dalla primavera.

— **circumdata**, Dej. — Alle località segnate nella prima memoria aggiungasi: frequente sulle sponde dello Stagno di Molentargius; giugno.

— **flexuosa**, Fab. var. *sardoa*, G.— Alle località segnate nella prima memoria aggiungasi: sponde del Tirso presso Oristano, del Coghinas presso Perfugas, del Galagone.

— **trisignata**, Ill. — Abbondante presso il Capo S. Elia; giugno.

— **littoralis**, Fab.—Littorale dell'Isola dell'Asinara; sponde del Tirso presso Oristano e del fiume di Terranova Pausania.

Carabidei

Omophron variegatus, Oliv.—Trovato abbondantissimo entro la sabbia delle sponde emerse del Tirso presso Oristano: qualche individuo pure tra le radici delle piante sulla sponda dello stesso Tirso.

Notiophilus geminatus, Dej.—Ne' boschi presso Tempio, sotto i sassi; giugno.

Nebria rubicunda, Quens. — Rinvenuta soltanto presso Aggius, sotto un tappeto di muschi lungo la via; prima metà di giugno.

— **brevicollis**, Fab. — Raccolta presso Decimoputzu; fine di aprile.

Carabus morbillosus, Fab. v. *Servillei*, Sol.— Trovato in varii luoghi: Iglesias, Muravera, Sassari, ecc.

Calosoma sycophanta, Lin. — Diffuso in varie parti dell'isola: trovato, tra l'altro, vagante e frequente ne' boschi di Tempio e del M. Limbara in giugno.

— **indagator**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo morto, presso San Lussurgio.

Drypta dentata, Ross. — Rinvenuta nelle sponde dello Stagno di Cagliari e del pantano di Gibbas, tra le radici delle piante; seconda metà di aprile.

Zuphium olens, Fab. — Raccolto presso il piccolo pantano di Gibbas; fine di aprile: raro.

Brachinus humeralis, Ahr. — Trovato presso il sudetto pantano di Gibbas sotto le pietre, non molto raro: qualche individuo ancora presso Muravera: fine di aprile.

— **exhalans**, Ross. — Abbondantissimo presso il pantano di Gibbas; meno frequente in altri luoghi.

— **psophia**, Dej. — È la specie di Brachini più diffusa: trovata presso Silìqua, Oristano, ed alle falde del M. Limbara.

— **bombarda**, Dej.— Molto meno diffuso del precedente: raccolto presso Gibbas ed alle falde del Limbara.

— **sclopeta**, Fab. — Anche questo è piuttosto frequente in varii luoghi, non esclusa la base del Limbara, ove le ultime tre specie convivevano.

Demetrias atricapillus, Lin. — Trovato in varii luoghi (Muravera, Oristano, Porto Torres); ovunque assai poco abbondante.

Dromius bifasciatus, Dej. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto nelle adiacenze di Sassari.

— **linearis**, Oliv. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.

Blechrus maurus, Sturm. — Diffuso in varii luoghi; più frequente presso Oristano.

— **plagiatus**, Duft. — Rinvenuto nelle sponde del pantano di Gibbas e presso Decimoputzu: raro.

Metabletus truncatellus, Lin. — Diffuso per molte parti.

— **foveola**, Gyll.—Raccolto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Apristus Sturmii, Genè.—Trovasi nelle sponde sabbiose di molti fiumi e torrenti: in taluni (come presso Oschiri) era in straordinaria abbondanza.

[1]) Un farmacista di Oristano mostravaci, per sapere se fosse Cantaride, un *Phyllognathys silenus!*

Lebia turcica, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Siagona europaea, Dej. — Rinvenuta presso il piccolo pantano di Gibbas; fine di aprile.

Aristus clypeatus, Ross. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano e di Alghero; maggio: poco abbondante.

— **sphaerocephalus**, Oliv. — Diffuso per quasi tutta l'isola (Gibbas, Silìqua, Oristano, San Lussurgio, Monte Limbara, Terranova, Isola dell'Asinara): aprile, maggio e giugno.

— **sardous**, Kust. — Molto meno diffuso del precedente: raccolto presso Oristano in maggio.

Ditomus calydonius, Fab. — Raccolto nel territorio Cagliaritano; poco frequente: metà d'aprile.

— **tricuspidatus**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nel Campidano di Cagliari: aprile.

— **cordatus**, Dej. — Rinvenuto un individuo presso Osilo; maggio.

Scarites gigas, Fab. — Rinvenuto nella spiaggia di Alghero; maggio.

— **arenarius**, Bon. — Ne abbiamo trovato un individuo presso Gibbas, sotto le pietre; aprile.

— **planus**, Bon. — Abbondante a Gibbas sotto le pietre, meno frequente nelle adiacenze di Sassari.

Dyschirius cylindricus, Dej. — Rinvenuto presso lo Stagno di Molentargius entro la sabbia: fine di giugno: poco abbondante.

— **nitidus**, Dej. — Col precedente, ma molto abbondante.

— **ruficornis?**, Putz. — Non raro presso il pantano ed il fiume a Pula, in aprile; presso le sponde del Tirso in Oristano in maggio.

Panagaeus cruxmajor, Lin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle sponde del Tirso presso Oristano, tra radici di piante.

Chlaenius velutinus, Duft. var. *auricollis*, G. — Diffuso per quasi tutta l'isola, sulle sponde de' pantani e de' fiumi, dall'aprile in poi.

— **spoliatus**, Ross. — Anche questa specie è diffusa per quasi tutta l'isola; però è meno comune della precedente.

Chlaenius agrorum, Oliv. — Trovato del pari sulle sponde di molti fiumi e pantani, ma non molto comune.

— **vestitus**, Payk. — Diffuso e frequente quanto il primo.

— **chrysocephalus**, Ross. — Rinvenuto molto abbondante presso Gibbas e Muravera: meno frequente presso Oristano ed alle falde del Limbara: dall'aprile a tutto giugno.

— **azureus**, Duft. — Ne abbiamo trovato un individuo solo presso Decimoputzu: aprile.

Licinus brevicollis, Dej. — Diffuso per quasi tutta l'isola [1]) dall'aprile in poi.

Acinopus megacephalus, Ross. — Rinvenuto presso Decimoputzu: aprile.

— **tenebrioides**, Duft. — Meno raro del precedente: trovato presso Silìqua e Porto Torres.

Diachromus germanus, Lin. — Trovasi presso le sponde erbose di varii fiumi: più che altrove lo abbiam trovato abbondante in quelle del Tirso presso Oristano.

Anisodactylus heros, Fab. — Rinvenuto abbondantissimo nelle sponde del fiume presso Pula: più scarso in altri luoghi: aprile, maggio.

— **binotatus**, Dej. — Raccolto nella campagna di Gibbas: seconda metà di aprile.

Ophonus obscurus, Fab. — Raccolto presso Decimoputzu: poco frequente.

— **rotundatus**, Dej. — Diffuso per buona parte dell'isola: trovato più abbondante sul monte Limbara, meno frequente presso Sassari e Nuoro.

— **meridionalis**, Dej. — Raccolto presso Sassari, maggio.

Harpalus ruficornis, Fab. — Trovato abbondante nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **punctatostriatus**, Dej. — Non raro presso Gibbas, Muravera, Oristano, Porto Torres e nell'isola dell'Asinara: maggio.

— **consentaneus**, Dej. — Rinvenuto presso Muravera e nell'isola dell'Asinara.

— **tenebrosus**, Dej. — Raccolto presso il pantano di Gibbas.

— **aeneus**, Fab. — Ne abbiamo trovato parecchi individui sul monte Limbara.

— **Goudotii**, Dej. — Rinvenuti due individui sul monte Limbara.

[1]) Il *Licinus silphoides* crediamo non si trovi nella Sardegna; e se venne notato dal Villa, pensiamo esser ciò dipeso dallo aver erroneamente definita la specie. In fatti, sarebbe inconcepibile che avesse trovato il *silphoides* e non il *brevicollis* che è tanto comune.

Harpalus....? — Un individuo solo raccolto sul monte Limbara.

— **distinguendus**, Dej. — Ne abbiamo raccolti individui presso Oristano e Porto Torres.

Stenolophus teutonus, Duft. — Diffuso per tutta l'isola.

— **vespertinus**, Panz. — Specie poco frequente; trovata nelle vicinanze di Sassari e di Porto Torres.

— **marginatus**, Dej. — Questa specie è molto diffusa: raccolta a Muravera, Decimoputzu, Silìqua, Oristano, Sassari, Porto Torres, Oliena.

Acupalpus dorsalis, Fab. — Frequente in tutti i luoghi umidi: trovato dall'aprile in poi.

— **brunnipes**, Sturm. — Raccolto presso Decimoputzu, sul monte Limbara, presso il Rio Coghinas e nella valle del Galagone.

— **suturalis**, Dej. — Trovato soltanto presso Aggius: giugno.

— **meridianus**, Lin. — Specie piuttosto diffusa: raccolta presso Muravera, Iglesias, Oristano ed Aggius.

Balius consputus, Duft. — Rinvenuto presso Pula: non raro su' monti del Limbara e nella valle del Galagone.

Amblystomus metallescens, Dej. var. *niger*, Heer. — Raccolto presso Pula, Silìqua, Muravera.

Poecilus cupreus, Lin. — Rinvenuto presso Decimoputzu, Oristano e sul monte Limbara.

— **splendens**, Gen. — Specie piuttosto rara: trovata soltanto presso Decimoputzu: aprile.

Lagarus vernalis, Pz. v. *maritima*, Gaub. — Raccolto presso Silìqua ed Oristano.

Orthomus barbarus, Dej. — Rinvenuto presso Cagliari.

Omaseus...? [1]) — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso Silìqua.

Percus Oberleitneri, Dej. — Diffuso per molte parti dell'isola: trovato però meno abbondante che nel settembre.

— **strictus**, Dej. — Rinvenuto sul monte Limbara ne'boschi, sotto i sassi: non raro.

Zabrus piger, Dej. — Diffuso per varii luoghi: trovato più abbondante a Gibbas: trovato ancora nell'isola dell'Asinara.

[1]) Specie affine all'*O. gracilis*, Dej.

Zabrus....? — Ne abbiamo un solo individuo raccolto presso Decimoputzu.

Amara striatopunctata, Dej. — Abbondante nelle sponde erbose del Tirso presso Oristano, tra le radici delle piante.

— **rufipes**, Dej. — Trovata con la precedente e parimenti abbondante.

— ....? — Raccolta nella valle de'mulini presso San Lussurgio.

— **acuminata**, Pkl. — Rinvenuta presso Sassari e sul monte Limbara.

— **trivialis**, Gyll. — Diffusa e frequente in quasi tutta l'isola.

— ....? — Graziosa specie di cui abbiamo un individuo solo raccolto nell'isola dell'Asinara.

— **fervida**, Coq. — Rinvenuta presso Muravera, M. Narba e Gibbas, non molto rara: aprile.

— ....? — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso Muravera.

Pristonychus algerinus, Gory. — Non raro nelle adiacenze di Cagliari.

— ....? — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso Orri.

Calathus circumseptus, Germ. — Diffuso per molte parti dell'isola, sebbene non molto abbondante: raccolto presso Cagliari, Silìqua, Oristano, Milis, sul monte Limbara e nell'isola dell'Asinara.

— **melanocephalus**, Lin. — Diffuso per tutta l'isola.

— **mollis**, Marsh. — Non raro nelle adiacenze di Cagliari: aprile.

Anchomenus prasinus, Thunb. — Raccolto presso Oristano ed Osilo.

— **albipes**, Fab. — Più diffuso del precedente; raccolto presso Silìqua, Oristano, San Lussurgio, Aggius e sul monte Limbara.

Agonum marginatum, Lin. — Comune presso le sponde di quasi tutti i fiumi e torrenti ed altri luoghi di acqua.

— **viduum**, Panz. — Raccolto presso Silìqua, Oristano e Porto Torres.

— **parumpunctatum**, Fab. — Specie poco frequente: rinvenuta soltanto presso Oristano nelle sponde del Tirso.

Olisthopus anomalus, Perr. — Specie conosciuta innanzi soltanto di Corsica. Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle sponde del Tirso presso Oristano.

Abacetus Salzmanni, Ramb. — Diffuso per

molte parti dell'isola, sebbene non molto comune: raccolto a Pula, Siliqua, Muravera ed Oristano.

Pogonus filiformis, Dej.—Raccolto sulla sponda sabbiosa dello Stagno di Molentargius, ove era abbondante: fine di giugno.

Trechus rufulus, Dej.—Raccolto presso Iglesias e Domusnovas: maggio.

— **minutus**, Fab.—Rinvenuto nel Cagliaritano, luogo detto *piano di mezzo:* aprile.

Tachypus pallipes, Duft.—Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari.

— **flavipes**, Lin.—Diffuso in varie parti dell'isola.

Bembidium punctulatum, Drap.—Raccolto presso Pula, Campiomu e sulle sponde del fiume di Terranova.

— **obtusum**, Dej.—Ne abbiamo trovato due individui sul Monte Limbara.

— **Kusteri**, Schaum.—Trovato molto abbondante nelle sponde del fiume di Terranova: meno frequente presso Muravera e nella valle del Galagone.

— **varium**, Oliv.—Trovato abbondante presso Muravera: meno frequente presso Cagliari e Terranova.

— **quadriguttatum**, Fab.—Diffuso in vari luoghi: raccolto presso Cagliari, Muravera, Iglesias, Tempio, Aggius e sul M. Limbara.

— **callosum**, Kust.—Specie piuttosto rara: l'abbiamo rinvenuta soltanto presso Muravera.

— **quadripustulatum**, Dej.—Non raro nelle adiacenze di Muravera.

— **assimile**, Gyll.—Raccolto presso Muravera ed Oristano: poco frequente.

— **biguttatum**, Chaud.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo presso Pula.

— **vicinum**, Luc.—Anche di questa specie abbiamo trovato un individuo solo presso Pula, ed un altro presso il rivolo di Tissi.

— **Dablii**, Dej.—Diffuso in molte parti dell'isola.

— **elongatum**, Dej.—Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: non raro.

— **Andreae**, Fab. v. *femoratum*, Dej.—Rinvenuto presso Muravera e San Lussurgio.

— **tenellum**, Erich.—Specie piuttosto rara: l'abbiamo trovata soltanto nelle sponde del fiume di Terranova.

Bembidium lampros, Herb.—Diffuso in varii luoghi: raccolto presso Muravera, Gibbas, Oristano.

— **ambiguum**, Dej.—Specie piuttosto rara: rinvenuta soltanto presso Decimoputzu.

— **Sturmii**, Panz.—Trovato nelle adiacenze di Pula: poco frequente.

Ocys rufescens, Dej.—Trovato presso San Lussurgio.

Tachys haemorrhoidalis, Dej.—Raccolta sulle sponde del pantano di Gibbas.

— **quadrisignata**, Duft.—Trovata sulle sponde del Coghinas presso Oschiri e Perfugas, vicino Nuoro e nell'isola dell'Asinara: ovunque poco abbondante.

— **bistriata**, Duft.—Raccolta presso Pula, Muravera, Decimoputzu e Siliqua.

— **scutellaris**, Germ.—Frequente nella sponda sabbiosa dello Stagno di Molentargius: meno frequente sulla sponda del Tirso presso Oristano.

— var. *atrata.*—Ne abbiamo un individuo raccolto presso il pantano di Gibbas.

Ditiscidei

Cybister Roeselii, Fab.—Comune in tutti i fiumi e pantani.

— **africanus**, Cast. (*meridionalis*, Gen.)—Trovato nel Rio Manno presso Decimoputzu ed in un piccolo pantano vicino Oristano.

Dytiscus circumflexus, Fab.—Trovato nel Rio Manno presso Decimoputzu.

Scutopterus coriaceus, Cast.—Trovato nel fiumicello di Campiomu e nel rivolo *Bau de mela* presso San Lussurgio.

Cymatopterus fuscus, Lin.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo in un corso di acqua presso Orri.

Ilybius fuliginosus, Fab.—Non raro nel Rio Manno presso Siliqua e nel Tirso presso Oristano.

Agabus agilis, Fab.—Ne abbiamo un individuo rinvenuto nel Rio Manno presso Decimoputzu.

— **didymus**, Oliv.—Frequente in quasi tutti i corsi di acqua.

— **brunneus**, Fab.—Rinvenuto in un piccolo corso d'acqua sul monte Limbara.

— **bipunctatus**, Fab.—Raccolto in un pantano presso Muravera e nel Tirso presso Oristano.

Agabus bipustulatus, Lin. — Specie piuttosto diffusa, raccolta nel fiume di Pula ed in un piccolo corso di acqua sul monte Limbara.

Noterus laevis, Sturm. — Raccolto nel Rio Manno presso Decimoputzu, nel Tirso presso Riola.

Laccophilus interruptus, Panz. — Alle località segnate nella precedente memoria si aggiunga il Rio Manno presso Pula e Silìqua.

— **minutus**, Lin. — Non raro nel Rio Manno presso Decimoputzu, oltre alle località già indicate.

Hyphydrus variegatus, Aub. — Abbondante in quasi tutti i fiumi e stagni.

Hydroporus inaequalis, Fab. — Abbondante come il precedente in quasi tutte le acque.

— **lepidus**, Oliv. — Trovato in un rivolo sotto Nuoro; abbondante: giugno.

— **unistriatus**, Schr. — Abbondante nel Rio Manno a Silìqua.

— **granularis**, Lin. — Rinvenuto soltanto in un piccolo corso di acqua sotto Nuoro; abbondante.

— **geminus**, Fab.—Non raro in diversi fiumi.

— **flavipes**, Oliv. — Trovato nel Rio Manno presso Decimoputzu.

— **12-pustulatus**, Fab. — Specie rara; ne abbiamo un individuo rinvenuto nel Rio Manno presso Decimoputzu.

— **Martinii**, Fairm. — Specie innanzi conosciuta soltanto di Corsica. Ne abbiamo rinvenuti pochi individui in un piccolo rivolo sotto Nuoro.

— **Ceresyi**, Aub. — Specie anche questa conosciuta innanzi soltanto della Corsica: trovata nel Tirso presso Oristano: rara.

— **affinis**, Aub. — Trovasi in molti fiumi: raccolto in quello di Pula, della valle Canonica e di Tissi.

— **griseostriatus**, Deg. — Rinvenuto in un rivolo presso Orri.

— **opatrinus**, Germ. — Trovato nel fiume di Pula, nel rivolo di Campiomu ed in un piccolo corso di acqua presso Nuoro.

— **lituratus**, Fab. — Trovato in un piccolo corso di acqua presso Orri, in un pantano presso Muravera e nel rivolo *Bau de mela* presso San Lussurgio.

— **confluens**, Fab. — Trovato nel Rio Manno presso Decimoputzu.

Hydroporus fulviventris, nob. — Rinvenuto nel Tirso presso Oristano: raro.

Pelobius Hermanni, Fab. — Non raro in varii fiumi e pantani.

Cnemidotus rotundatus, Aub. — Sembra poco diffuso: rinvenuto soltanto nel Rio Manno presso Decimoputzu.

— **caesus**, Duft. — Diffuso per molti fiumi: Pula, Silìqua, Decimoputzu, ecc.

Haliplus lineatocollis, Mars. — Abbondante in molti corsi di acqua.

Girinidei

Gyrinus striatus, Fab. — Rinvenuto nel medesimo fiume Canonica in cui lo trovammo nel settembre: non altrove.

— **urinator**, Ill. — Trovato ne'seni di molti fiumi del mezzogiorno e del settentrione; in luoghi bassi ed in montuosi.

— **natator**, Scop. — Raccolto in piccolo rivolo di acqua su' monti del Limbara.

— **Dejeanii**, Brull. — Abbondante ne'seni di fiumi ed in pantani presso Pula, Muravera, Aggius.

— **bicolor**, Payk. var. *angustatus*, Aub.— Rinvenuto in piccolo pantano presso Pula.

Orectochilus Bellieri, Reic. — Anche questa specie l'abbiamo trovata soltanto nel fiume Canonica, ove la trovammo nel settembre.

Idrofilidei

Hydrophilus piceus, Lin. — Comune in tutti i fiumi, rivoli, pantani.

— **pistaceus**, Cast. — Trovato abbondante nel Rio Manno presso Decimoputzu.

Hydrous flavipes, Steph. — Specie poco frequente: ne abbiamo un individuo trovato in un piccolo pantano vicino Oristano.

Hydrobius convexus, Brull.— Trovato in un piccolo corso di acqua sul monte Limbara.

— **oblongus**, Herb.— Abbondante in un pantano temporaneo vicino Assemini: trovato pure nel Rio Manno presso Silìqua.

— **fuscipes**, Lin. — Rinvenuto nel pantano di Assemini sopra menzionato.

— **bicolor**, Payk.—Trovato frequente nel Rio Coghinas, presso Perfugas e nel Tirso presso Oristano.

— **globulus**, Payk. — Abbondante nel fiume presso Terranova. Trovato ancora in un

piccolo corso di acqua su i monti del Limbara.

Philhydrus testaceus, Fab. — Rinvenuto nel Rio Manno presso Decimoputzu e nel pantano di Gibbas.

— **melanocephalus**, Oliv. — Trovato nel Rio Manno presso Silìqua.

— **marginellus** ? Fab. — Rinvenuto nel Rio Manno presso Decimoputzu.

Helochares lividus, Forst. — Frequente nelle acque della maggior parte de' fiumi.

Laccobius minutus, Lin. — Abbondante ne' seni del fiume di Terranova e presso Cagliari; qualche individuo ancora in piccolo corso di acqua del monte Limbara e di Aggius.

Berosus aericeps, Curt. — Ne abbiamo un individuo raccolto nel Rio Manno presso Pula [1]).

— **spinosus**, Steph. — Trovato nel Rio Manno presso Pula.

— **luridus**, Lin. — Specie diffusa per molti fiumi e pantani, anche i più putridi.

— **affinis**, Brull. — Anche questa specie è diffusa per quasi tutte le acque de' fiumi e pantani.

Helophorus rugosus, Oliv. — Specie rara. Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo nel Rio Manno presso Decimoputzu.

— **nubilus**, Fab. — Abbondante in molti fiumi e pantani.

— **intermedius**, Muls. — Trovato nel Rio Manno presso Decimoputzu e Silìqua ed in un rivolo presso San Lussurgio.

— **aquaticus**, Lin. — Rinvenuto ne' fiumi Rio Manno, Tirso ed altri.

— **granularis**, Lin. — Diffuso per molti fiumi: raccolto nel Rio Manno a Silìqua e Decimoputzu, e nel Tirso presso Oristano.

— **nanus**, Sturm. — Abbondante in quasi tutti i fiumi, sia del mezzogiorno, che del settentrione.

Ochthebius punctatus, Steph. — Frequente ne' fiumi di Pula, Silìqua e Decimoputzu.

— **bicolon**, Germ. — Rinvenuto abbondante in acque stagnanti vicino Muravera.

— **margipallens**, Latr. — Trovato nel Rio Manno presso Silìqua.

— **aeratus**, Steph. — Trovato non raro in piccolo corso di acqua sotto Nuoro.

Ochthebius marinus, Payk. — Trovato nel fiume Tirso presso Oristano.

Hydrochus angustatus, Germ. — Raccolto nelle acque di Pula e di Decimoputzu: poco frequente.

Sphaeridium scarabaeoides, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola, in luoghi piani ed elevati.

Cyclonotum orbiculare, Fab. — Raccolto nei corsi di acqua presso Sassari e Porto Torres.

Cercyon flavipes, Fab. — Raccolto nelle campagne di Orri.

Specie indeterminate 3.

Stafilinidei

Phalagria sulcata, Payk. — Raccolta sulle sponde del Tirso presso Oristano.

— **obscura**, Grav. — Raccolta sulle sponde del fiume Canonica presso Iglesias.

Aleochara tristis, Grav. — Ne abbiamo individui rinvenuti presso le sponde del Coghinas poco lungi da Perfugas, e nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

Myrmedonia Haworthi, Steph. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle adiacenze di Sassari.

Tachyusa ferialis, Erich. — Diffusa per molte parti dell' isola: raccolta presso Silìqua, Iglesias, Oristano, Sassari e Porto Torres.

Homalota .....? — (affine alla *dilaticornis*, Kr.) — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso le sponde del Rio Manno a Silìqua.

Tachyporus solutus, Erich. — Rinvenuto presso Domusnovas.

— **hypnorum**, Fab. — Raccolto presso Cagliari e Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **brunneus**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

Quedius tristis, Grav. (*frontalis*, N. Es.) — Diffuso per quasi tutta l'isola: raccolto presso Cagliari, Pula, Oristano e Porto Torres; più frequente ancora sul monte Limbara.

— **fulgidus**, Fab. — Raccolto sulla montagna di Aggius: giugno.

— **semiobscurus**, Mar. (*rufipes*, Er.) — Raccolto sulle alture del M. Limbara.

[1]) Non sapremmo dire se vi è raro o abbondante, avendo riconosciuto la differenza specifica da altri coi quali conviveva quando non eravamo più al caso di ripetere per esso le ricerche.

Creophilus maxillosus, Lin. — Trovasi in molte parti dell'isola: però generalmente poco frequente.

Leistotrophus murinus, Lin. — Come il precedente.

— **marginalis**, Genè. — Trovato abbondante sulla montagna di Nuragu vicino Ozieri entro lo sterco bovino non disseccato. Rinvenuto ancora sul monte Limbara, ma meno abbondante.

Ocypus olens, Mull. — Trovato in diversi luoghi, benchè non molto abbondante.

— **cupreus**, Ross. — Frequente e diffuso per molti luoghi: più abbondante l'abbiam trovato sul monte Limbara.

— ...? — Raccolto presso Oristano e Sassari: maggio.

Philontus aeneus, Ross. — Trovato in diversi luoghi: abbondantissimo alle falde del Limbara presso una carogna in putrefazione.

— **intermedius**, Lac. — Abbondante alle falde del Limbara, col precedente.

— **cribratus**, Erich. — Diffuso per buona parte dell'isola, raccolto presso Cagliari, Pula, Silìqua, Porto Torres; aprile e maggio.

— **varius**, Gyll. var. *bimaculatus*, Grav. — Frequente in quasi tutta l'isola, non escluse le montagne del Limbara: da aprile a giugno.

— **ebeninus**, Grav. — Anche questa specie è diffusa per quasi tutta l'isola.

— var. *corruscus*, Grav. — Col precedente: ma poco abbondante.

— **exiguus**, Nordm. — Diffuso in varii luoghi ed abbondante.

Xantholinus glabratus, Grav. — Raccolto in varii luoghi, ma più frequente nelle vicinanze di Sassari.

— **fulgidus**, Fab. — Molto più diffuso del precedente, quantunque neppur troppo abbondante.

Lathrobium multipunctatum, Grav. — Trovato in molte parti ed anche nell'isola dell'Asinara.

— **dividuum**, Erich. — Rinvenuto sulle sponde del Tirso vicino Oristano.

Achenium basale, Erich. — Specie poco frequente: rinvenuta presso Decimoputzu e Silìqua.

Dolichaon haemorrhous, Erich. — Ne abbiamo un individuo raccolto presso Decimoputzu.

Stilicus fuscipes, Erich. — Rinvenuto presso Pula e Silìqua.

Sunius angustatus, Payk. — Raccolto presso il Tirso in Oristano.

Paederus littoralis, Grav. — Diffuso per molte parti dell'isola.

— ...? — Come il precedente.

— **longipennis**, Erich. — Come il precedente: incontrasi sovente ne' prati.

Pinophilus erythrostomus, nob. — Ne abbiamo trovato un individuo solo entro terra nelle sponde erbose del Tirso in Oristano: di larve però ne abbiamo rinvenute in varii luoghi.

Stenus guttula, Mull. — Rinvenuto sulle sponde del Tirso presso Oristano.

— **oculatus**, Grieb. — Trovato abbondante ne' prati della valle de' mulini presso San Lussurgio; meno frequente nelle sponde del Rio Manno presso Pula.

— **plantaris**, Erich. — Raccolto nelle vicinanze di Silìqua.

— **intricatus**, Erich. — Diffuso per varie parti dell'isola.

— **binotatus**, Ljung. — Rinvenuto nelle adiacenze di Pula.

— **incanus**, Erich. — Raccolto su'monti del Limbara.

Bledius taurus, Germ. — Molto abbondante entro la sabbia delle sponde de' canali di Molentargius: i maschi meno frequenti delle femmine.

— **tricornis**, Herb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo interrato nelle sponde erbose del Tirso in Oristano.

— **verres**, Erich. — Rinvenuto entro la sabbia nella quale abbiam trovato abbondantissimo l' *Omophron variegatus* in Oristano.

Platystethus brevipennis, Baud. — Raccolto nelle vicinanze di Sassari.

— **cornutus**, Grav. — Abbondantissimo presso un pantano a Decimoputzu: meno comune a Silìqua, Pula, Muravera ed altri luoghi: in vicinanza de' pantani e letamaj.

Oxytelus sculpturatus, Grav. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari e di Pula.

Specie indeterminate 15.

Pselafidei

Bryaxis sardoa? Saulc. — Frequente fra i detriti vegetali sulla sponda d'un piccolo

pantano presso Pula: qualche individuo ancora presso quello di Gibbas.

Specie indeterminata 1.

Silfidei

Necrophorus corsicus, Cast. (*funereus*, Gen.) — Ne abbiamo rinvenuti parecchi individui attorno alla carogna di una volpe alle falde del monte Limbara: prima metà di giugno.

Silpha granulata, Oliv. — Diffusa in varie parti dell'isola, sotto le pietre.

— **sinuata**, Fab. — Abbondante attorno la carogna di volpe, insieme al Necroforo.

— **rugosa**, Lin. — Con la precedente, un poco meno abbondante.

Isteridei

Hister major, Lin. — Trovato qualche individuo errante per le vie presso Cagliari ed Oristano.

— **quadrimaculatus**, Fab. — Con le due Silfe e Necroforo.

— **...?** — Ne abbiamo trovato un individuo morto sul M. Limbara.

— **sinuatus**, Ill. — Diffuso per molte parti dell'isola, entro lo sterco bovino.

— **bissexstriatus**, Fab. — Raccolto presso Gibbas, sotto le pietre.

— **cadaverinus**, Hoffm. — Trovato sul monte Limbara.

Carcinops minimus, Aub. — Raccolto a Decimoputzu e Silìqua.

Saprinus semipunctatus, Fab. — Intorno ad una carogna presso Iglesias.

— **detersus**, Ill. — Alle falde del M. Limbara attorno alla carogna di volpe.

— **nitidulus**, Payk. — Col precedente.

— **speculifer**, Latr. — Presso Decimoputzu; poco frequente.

— **aeneus**, Fab. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto nelle vicinanze di Cagliari.

Falacridei

Phalacrus corruscus, Pkl. — Diffuso per varie parti dell'isola: aprile, maggio e giugno.

— **grossus**, Erich. — Raccolto nelle praterie intorno Cagliari e Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Olibrus corticalis, Panz. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari; seconda metà di aprile: piuttosto frequente.

Specie indeterminata 1.

Nitidulidei

Brachypterus unicolor, Kust. — Nelle praterie delle colline di Cagliari, fine di aprile: poco frequente.

— **labiatus**, Erich. — Trovato col precedente nell'aprile, e poi anche nella fine di giugno meno frequente.

Epuraea obsoleta, Fab. — Ne abbiamo un individuo rinvenuto su'fiori di Tapsia presso Oschiri: prima metà di giugno.

Nitidula 4-pustulata, Fab. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari, poco frequente: fine di giugno.

Acanthogethes fuscus, Oliv. — Raccolto nelle praterie in Oristano: seconda metà di aprile.

— var. *bicolor*, Luc. — Trovato abbondante presso Terranova: fine di giugno.

— **picipes**, Sturm. — Raccolto a Campiomu; seconda metà di aprile.

— **aeneus**, Fab. — Diffuso per molte parti dell'isola: aprile, maggio.

Xenostrongylus arcuatus, Kiesw. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle campagne di Oristano.

Trogositidei

Trogosita mauritanica, Lin. — Rinvenuta sotto le cortecce delle Elci nel bosco di S. Leonardo presso San Lussurgio.

Colidiidei

Endophloeus spinulosus, Latr. — Trovato sotto le cortecce di Elci, su'monti del Limbara.

Cucujidei

Laemophloeus ater, Oliv. — Rinvenuto tra le piante palustri presso lo stagno di Alghero: fine di maggio.

Criptofagidei

Telmatophilus typhae, Fall. — Rinvenuto sulla Tifa palustre alle sponde del fiume di Terranova; fine di giugno: poco frequente.

Cryptophagus lycopordi, Herb. — Raccolto presso Iglesias, M. Narba e San Lussurgio: aprile e maggio.

— **scanicus**, Lin. — Sul monte Limbara, nelle praterie: giugno.

Latridiidei

Corticaria hortensis, Mann. — Ne abbiamo un individuo rinvenuto presso Terranova: seconda metà di giugno.

Micetofagidei

Berginus tamaricis, Woll. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo a Gibbas: seconda metà di aprile.

Dermestidei

Dermestes Frischi, Kug. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari entro gli avanzi ossei di una carogna: seconda metà di aprile.

— **sardous**, Kust. — Raccolto a Campiomu nella seconda metà di aprile, e nelle vicinanze di Tempio nella prima metà di giugno.

— **hirticollis**, Fab. (*thoracicus*, Gen.) — Ne abbiamo rinvenuto un individuo insieme al *Frischi*.

— **undulatus**, Brahm. — Raccolto presso Pula: seconda metà di aprile.

Attagenus fallax, Gen. — Diffuso e abbondante in quasi tutta l'isola, da' primi giorni di maggio.

— **piceus**, Oliv. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di giugno.

Hadrotoma variegata, Kust. — Raccolta nei prati boschivi presso Domusnovas: primi giorni di maggio.

Anthrenus pimpinellae, Fab. — Non raro nelle praterie presso Pula nella seconda metà di aprile, e di Oschiri nella prima metà di giugno.

— **verbasci**, Fab. — Comune nelle praterie di tutta quasi l'isola, dalla prima metà di aprile.

Parnidei

Parnus bicolor, nob. — Rinvenuto nel Rio Coghinas presso S. Rocco in quel di Perfugas: prima metà di giugno.

— **sulcipennis**, nob. — Rinvenuto in un piccolo corso di acqua presso Oliena: seconda metà di giugno.

— **lutulentus**, Erich. — Raccolto in piccolo corso di acqua nelle vicinanze di Nuoro: seconda metà di giugno.

— **luridus**, Erich. — Rinvenuto in piccolo pantano nelle vicinanze di Aggius: prima metà di giugno.

Parnus prolifericornis, Fab. — È la specie che sembra più diffusa: rinvenuta nel Rio Manno presso Silìqua, nel Tirso presso Oristano ed in un corso di acqua vicino Pula: seconda metà di aprile e maggio.

Pomatinus substriatus, Mull. — Trovato in un pantano presso Oristano: prima metà di maggio.

Lucanidei

Dorcus parallelepipedus, Lin. — Trovasi eventualmente nelle regioni boschive.

— **Musimon**, Gen. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo vagante ne'boschi del monte Limbara: prima metà di giugno.

Scarabeidei

Ateuchus sacer, Lin. — Comune in molti luoghi, sopratutto ne' littorali sabbiosi.

— **semipunctatus**, Fab. — Abbondante ovunque.

— **laticollis**, Fab. — Diffuso e frequente per tutta l'isola.

Sisyphus Schaefferi, Lin. — Trovasi in numerose famiglie intorno lo sterco bovino ed equino.

Gymnopleurus mopsus, Pall. — Come il precedente.

Copris hispanus, Lin. — Trovato errante in diversi luoghi.

Bubas bison, Lin. — Presso le materie stercoracee, dove più, dove meno frequente.

Onitis irroratus, Ross. — Trovato in diversi luoghi, ma poco frequente.

Onthophagus taurus, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola.

— **ovatus**, Lin. — Raccolto in diversi luoghi, ma non comune.

— **vacca**, Lin. — Anche questa specie è diffusa per gran parte dell'isola.

— **fracticornis**, Preysl. — Raccolto su'monti del Limbara.

— **Schreberi**, Lin. — Diffuso per varie parti dell'isola.

Oniticellus flavipes, Fab. — Comune in tutta l'isola.

Aphodius erraticus, Lin. — È una delle specie di Afodii più comuni nell'isola, in pianura del pari che in montagna.

— **scybalarius**, Ill. — Raccolto nelle adiacenze di Osilo.

— **fimetarius**, Lin. — Diffuso in varie parti dell'isola: raccolto su'monti del Limbara.

Aphodius granarius, Lin.—Frequente in molte parti dell'isola.

— **nitidulus**, Fab. — Raccolto presso San Lussurgio.

— **...?** — Ne abbiamo un individuo raccolto a Campiomu.

— **lineolatus**, Ill. — Rinvenuto presso Iglesias e San Lussurgio, svolazzante attorno a' letamai.

— **pecari**, Fab. — Raccolto presso Oristano e Tissi; maggio: non raro.

Oxyomus caesus, Panz. — Diffuso per quasi tutta l'isola, svolazzante intorno a' letamai.

Psammodius porcicollis, Ill. — Trovato nel Cagliaritano lungo la spiaggia di Giorgino aprile.

Geotrupes hiostius, Genè. — Rinvenuti molti individui, in gran parte morti, sulla via presso Riola: prima metà di maggio.

— **stercorarius**, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola.

— **laevigatus**, Fab. — Diffuso come il precedente, ma anche più abbondante.

— **sardous**, Erich. — Oltre alle località segnate nella prima memoria, trovato anche altrove.

— **geminatus**, Genè. — Anche questo l'abbiam trovato in varii luoghi.

Hoplia pubicollis, Kust. — Ne abbiamo rinvenuti parecchi individui presso Porto Torres: seconda metà di maggio.

— **farinosa**, Lin. — Ne abbiamo un individuo raccolto presso Tempio: prima metà di giugno.

Anisoplia pallidipennis, Gyll.—Raccolta presso Oristano (maggio) ed Oschiri (giugno).

Anoxia matutinalis, Cast. — Rinvenuta presso Cagliari: seconda metà di giugno.

Pachypus caesus, Erich. — Ne abbiamo trovati tre individui assai piccoli (lunghi mill. 12 a 13) nelle adiacenze di Terranova: seconda metà di giugno.

— **Candidae**, Pet. — Rinvenuto presso Tempio ed Orgosolo: metà di giugno.

Anomala junii, Duft. — Raccolta nelle colline di Terranova: seconda metà di giugno.

Oxythyrea squalida, Lin.—Comune ovunque, dalla metà di aprile (forse anche prima).

Leucoscelis stictica, Lin. — Come la precedente, però meno abbondante.

Cetonia opaca, Fab. — Raccolta presso Ozieri e Tempio, sopra i cardi: giugno.

Cetonia sardoa, Genè. — Rinvenuta presso Terranova: giugno.

— **morio**, Fab. — Trovata presso Oristano e Simaxis: maggio.

— **aurata**, Lin. — Osservata in più luoghi, ma non molto frequente.

— var. *carthami*, Gen. — Raccolta presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **floricola**, Herb. var. *metallica*, Fab. — Trovata presso Sassari; maggio.

Trichius zonatus, Germ. (*fasciolatus*, Genè) — Rinvenuto sopra i fiori di *Cystus* presso Aggius: prima metà di giugno.

Valgus hemipterus, Lin. — Osservato in diversi luoghi, ma poco frequente.

Buprestidei

Acmaeodera taeniata, Fab. — Raccolta nelle vicinanze di Nuoro: seconda metà di giugno.

— **adspersula**, Illig. — Diffusa per molte parti dell'isola: rinvenuta presso Ozieri, Oschiri, Tempio, Oliena, Terranova: giugno.

Ptosima flavoguttata, Ill. — Trovata nelle vicinanze di Tempio: prima metà di giugno.

Buprestis tenebricosa, Fab.—Rinvenuta presso Simaxis: seconda metà di maggio.

Chrysobothris affinis, Fab. — Trovata sulla montagna di Nuragu presso Ozieri: primi giorni di giugno.

Anthaxia cyanicornis, Fab. — L'abbiam raccolta sulla montagna di Aggius, sul M. Limbara e presso Oliena: giugno.

— **millefolii**, Fab. — Diffusa per tutta l'isola, sopra le Achillee.

— **candens**, Panz. — Rinvenuta nelle vicinanze di Nuoro: seconda metà di giugno.

Sphaenoptera geminata, Ill. — Rinvenuta nelle vicinanze di Tempio: prima metà di giugno.

Coroebus rubi, Lin. — Osservato in diversi luoghi in maggio e giugno.

— **aeratus**, Muls. — Raccolto presso Ozieri, Oschiri e Macomer: prima metà di giugno.

— **amethystinus**, Oliv. — Diffuso per molte parti dell' isola: raccolto presso Pula, Decimoputzu, M. Narba, San Lussurgio: dalla seconda metà di aprile.

Agrilus viridis, Lin. var. *fagi*. — Raccolto sulla montagna di Aggius: prima metà di giugno.

Agrillus ...? — Raccolto presso Oschiri, Nuoro, Oliena: giugno.

Trachys pygmaea, Fab. — Trovata in varii luoghi sopra la Malva comune.

Specie indeterminate 3.

Elateridei

Drasterius bimaculatus, Fab. — Trovato a Pula, a Cabras, sul monte Limbara; aprile a giugno.

Betarmon bisbimaculatus, Schh. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nella spiaggia sabbiosa del fiume sotto Orgosolo: seconda metà di giugno.

Drasterius bimaculatus, Fab. — Raccolto in diversi luoghi, come Pula, Gibbas, M. Limbara: aprile, maggio e giugno.

Cardiophorus argiolus, Gen. — Frequente nelle vicinanze di Cagliari dalla metà di aprile.

— **ulcerosus**, Gen. — Trovato col precedente e parimente abbondante.

— **melampus**, Ill. — Raccolto presso Iglesias e Osilo: maggio.

— **Eleonorae**, Gen. — Raccolto presso Cagliari nella seconda metà di aprile, e Tempio nella prima metà di giugno.

Agriotes sordidus, Ill. — Diffuso per molte parti dell'isola: raccolto a Gibbas e Decimoputzu (seconda metà di aprile), presso Simaxis e Tissi (maggio), Tempio e Monte Limbara (prima metà di giugno).

Dascillidei

Cyphon variabilis, Thunb. — Raccolto presso Gibbas, Domusnovas e nell'isola dell'Asinara: seconda metà di aprile e maggio.

Malacodermi

Dictyopterus sanguineus, Fab. — Raccolto sulla montagna di Nuragu presso Ozieri e più frequente nel Monte Limbara, sopra le Elci: prima metà di giugno.

Lampyris .... ? [1]). — Rinvenuta sul Monte Limbara; giugno.

Malacogaster Passerini, Bass. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari nella seconda metà di aprile e presso Tissi negli ultimi giorni di maggio: nelle praterie [2]).

Telephorus praecox, Gen. — Ne abbiamo rinvenuto qualche individuo nelle praterie delle vicinanze di Cagliari verso la metà di aprile [3]).

— **Genei**, Gen. — Raccolto presso San Lussurgio: prima metà di maggio.

Rhagonycha chlorotica, Genè. — Raccolta in diversi luoghi dalla metà di aprile a tutto giugno: Cagliari, Iglesias, Silìqua, San Lussurgio.

Malthinus seriepunctatus, Kies. — Trovato abbondante a Monte Narba sopra i fiori della *Ferula nodiflora:* seconda metà di aprile.

Malachius aeneus, Lin. — Trovato nelle campagne di Oristano: prima metà di maggio.

— **spinosus**, Er. — Raccolto nelle vicinanze di Silìqua (primi giorni di maggio) e presso Tissi (fine di maggio).

— **spinipennis**, Germ. — Raccolto nelle adiacenze di Sassari e Porto Torres (seconda metà di maggio).

— **sardous**, Er. — Rinvenuto presso Silìqua, Orri, Simaxis, Sassari e Porto Torres: dai primi agli ultimi giorni di maggio.

Attalus lateralis, Er. — Raccolto presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **sericans**, Er. — Non raro presso Pula, Decimoputzu, Silìqua (seconda metà di aprile), Tissi (fine di maggio), Terranova (metà giugno).

— **erythroderus**, Er. — Rinvenuto nelle vicinanze di Cagliari e di Silìqua: seconda metà di aprile.

Hypebaeus flavicollis, Er. — Raccolto presso Cagliari, Decimoputzu (seconda metà di aprile) ed Iglesias (primi giorni di maggio).

Charopus saginatus, Kies. — Diffuso per quasi tutta l'isola: dalla metà di aprile.

Troglops brevis, Er. — Rinvenuto nelle vicinanze di Cagliari ed in Orri: seconda metà di aprile.

— **silo**, Er. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Oliena; giugno.

Apalochrus flavolimbatus, Muls. — Raccolto nelle vicinanze di Alghero; maggio.

Dasytes flavescens, Gen. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto nella valle del Galagone: seconda metà di giugno.

[1]) Avendone il solo maschio non possiamo con certezza determinare la specie.

[2]) In una cassettina contenente conchiglie terrestri raccolte in Sardegna nel settembre, ritornato dall'ultimo viaggio ho trovato un maschio ed una femmina venuti fuori durante la mia assenza da larve vissute in que' molluschi.

[3]) Erano gli ultimi individui superstiti, essendo specie che apparisce nel marzo, e pare non si protragga oltre l'aprile.

*

Dasytes algiricus, Luc. — Comune in quasi tutta l'isola, dalla metà di aprile.

— ...? — Rinvenuto nella montagna di Nuragu presso Ozieri: primi giorni di giugno.

— **plumbeus**, Oliv. — Trovato molto abbondante nelle vicinanze di Cagliari: metà di aprile.

— **flavipes**, Oliv. — Frequente quanto il precedente, col quale convive.

Dolichosoma filum, Fairm. — Specie poco frequente: l'abbiamo rinvenuta soltanto a Tissi presso Sassari: ultimi giorni di maggio.

— **protensum**, Gen. — Comunissimo in tutta l'isola ed in quella dell'Asinara: dalla metà di aprile in poi; per lo più sopra i fiori di *Chrysanthemum*.

— **nobile**, Ill. — Comune quanto il precedente, col quale ordinariamente sta associato.

Haplochnemus pectinicornis, Luc. — Anche questa specie è comune e diffusa per tutta l'isola, dalla metà di aprile in poi.

Danacaea murina, Kust. — Rinvenuta nelle adiacenze di Sassari: seconda metà di maggio.

— **ambigua**, M. R. — Diffusa per tutta l'isola: trovata a Cagliari (metà di aprile), Iglesias (maggio), Terranova (giugno).

— **pallipes**, Panz. — Raccolta presso Monte Narba: seconda metà di aprile.

— **cusanensis**, A. Cost. — Rinvenuta presso Domusnovas: prima metà di maggio.

— **distincta**, Luc. — Frequente nelle campagne di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **picicornis**, Kust. — Rinvenuta in varii luoghi del Cagliaritano: seconda metà di aprile.

Specie indeterminate 8.

Cleridei

Trichodes alvearius, Fab. — Comune in tutta l'isola; dall'aprile in poi.

Tillus transversalis, Charp. — Diffuso in diverse parti dell'isola, dalla metà di maggio in avanti.

Corynetes ruficollis, Fab. — Trovato nelle campagne di Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Apatidei

Apate capucina, Lin. — Rinvenuta sulla montagna di Nuragu presso Ozieri e sul monte Limbara, sopra le Elci: giugno.

Sinoxylon muricatum, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nell'isola dell'Asinara [1]).

Xylopertha pustulata, Fab. — Ne abbiamo raccolto un individuo a volo presso Iglesias: primi giorni di maggio.

— **praeusta**, Germ. — Ne abbiamo trovato un individuo morto sotto le cortecce di Elci sul monte Limbara.

Ptinidei

Ptinus variegatus, Ross. — Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari: metà di aprile.

— **Aubei**, Boield. — Ne abbiamo raccolti due individui sulle montagne del Limbara: prima metà di giugno.

— **bicinctus**, Sturm. — Ne abbiamo un individuo femmina rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari: seconda metà di aprile.

Tenebrionidei

Erodius tibialis, Lin. var. *siculus*, Sol. — Trovato molto frequente nella spiaggia sabbiosa del golfo di Cagliari nel luogo detto *giorgino*: seconda metà di aprile.

Tentyria grossa, Ross. — Vicinanze di Cagliari: fine di giugno.

— **ligurica**, Genè. — Meno frequente che nel settembre: rinvenuta nel littorale presso Porto Torres.

— **Floresii**, Genè. — Come la precedente: rinvenuta presso Tissi ed Alghero.

Stenosis piligera, Sol. — Trovata in diversi luoghi: Cagliari, Gibbas, Alghero, Isola Piana: aprile, maggio, giugno.

Elenophorus collaris, Lin. — Rinvenuto presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Akis punctata, Thunb. — Trovata in diversi luoghi: abbondantissima presso l'imboccatura della grotta di S. Giovanni a Domusnovas.

— **spinosa**, Lin. — Comune in molti luoghi, fin entro gli abitati.

Scaurus tristis, Oliv. — Incontrato in varie parti, ma poco frequente.

[1]) Abbiamo indagato se il *Sinoxylon sexdentatum* avesse prodotto danni alle viti, come in molte parti del continente: ma non abbiamo avuto alcuna notizia, nè affermativa, nè negativa.

Scaurus striatus, Fab.—Trovato ancora in diverse parti: più frequente del precedente.

— **atratus**, Fab. — Diffuso per quasi tutta l'isola.

Blaps gigas, Lin. — Comune in molti luoghi come l'*Akis spinosa*.

— **mucronata**, Latr. — Come la precedente, ma un poco meno diffusa.

Asida Genei, Sol. — Non rara presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **Combae**, Gen. — Meno diffusa della precedente: raccolta presso Oschiri: primi giorni di giugno.

— ...? — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso San Lussurgio: maggio.

Pimelia inflata, Herb. — Abbondante nella spiaggia sabbiosa del golfo di Cagliari, in luogo detto *giorgino*.

— **rugulosa**, Germ. var. *bifurcata*, Sol. — Frequente presso Sassari.

— **Sardoa**, Sol. — Diffusa e comune in diversi luoghi.

— **Payraudi**, Sol. — Trovata assai abbondante sulla montagna di Aggius: prima metà di giugno.

Crypticus gibbulus, Quens. — Diffuso per tutta l'isola.

Opatroides punctulatus, Brul. — Ne abbiamo rinvenuti due individui presso Muravera: aprile.

Opatrum rusticum, Oliv. — Rinvenuto presso Oristano: maggio.

— ....? — Raccolto presso Aggius in giugno: poco frequente.

— **nigrum**, Kust. — Trovato su' monti del Limbara.

Leichenum pulchellum, Kust. — Rinvenuto nella sponda arenosa del Rio Coghinas presso Perfugas: giugno.

Anemia sardoa, Genè. — Trovata immersa entro la sabbia presso le radici de'giunchi a *giorgino*: aprile.

Ammophthorus rufus, Luc. — Trovato con la specie precedente.

Phaleria cadaverina, Fab. — Raccolta sulle sponde del canale di Molentargius: aprile.

Tenebrio obscurus, Fab. — Rinvenuto presso Decimoputzu: aprile.

Helops coriaceus, Kust. — Trovato col precedente presso Decimoputzu.

Helops robustus, Muls. — Trovato sui monti del Limbara sotto le cortecce di Elci, e presso Nuoro: giugno.

— **dryadophilus**, Muls. — Raccolto presso San Lussurgio: prima metà di giugno.

— **Genei**, Gen. — Trovato sui monti del Limbara sotto le cortecce di Elci: giugno: assai raro.

— **parvulus**, Kust. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Cagliari alla fine di giugno.

Nephodes villiger, Ross. var. *metallescens*, Kust. — Rinvenuto in tutti i luoghi percorsi dalla seconda metà di maggio in poi.

Cossyphus insularis, Cast. — Ne abbiamo rinvenuti parecchi individui presso Decimoputzu, sotto le pietre: seconda metà di aprile.

Cistelidei

Omophlus lepturoides, Fab. — Frequente in varii luoghi: primi giorni di maggio.

— **curvipes**, Brul. — Diffuso quanto il precedente.

Cistela antennata, Panz. — Trovata in quasi tutta l'isola: dalla metà di aprile in poi.

Anticidei

Notoxus cornutus, Fab. — Abbondante nelle adiacenze di Nuoro: giugno.

Formicomus pedestris, Ross. — Diffuso in varie parti dell'isola.

Anthicus humilis, Germ. — È la specie di Antici più frequente in quasi tutta l'isola.

— ....? [1]) — Rinvenuto sulla spiaggia sabbiosa dello stagno di Molentargius.

— **bifasciatus**, Ross. — Raccolto a Gibbas nella seconda metà di aprile, e Terranova nella seconda metà di giugno.

— **fenestratus**, Schm. — Rinvenuto in varii luoghi: Orri, Oristano, Terranova e Tempio: aprile a giugno.

— **axillaris**, Schm. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **hispidus**, Ross, — Trovato presso Muravera e Gibbas: seconda metà di aprile.

— **quadriguttatus**, Ross. — Rinvenuto presso Iglesias: prima metà di maggio.

— **venustus**, Vill. — Raccolto presso Oristano: maggio.

1) Affine al *longipilis*.

Mordellidei

Mordella fasciata, Fab. — Diffusa in diversi luoghi dell'isola: maggio e giugno.

— **aculeata**, Lin. — Non rara in quasi tutta l'isola.

Mordellistena stricta, A. Cost. — Diffusa per tutta l'isola: trovata dalla metà di aprile a tutto giugno.

— **pulchella**, Muls. — Ne abbiamo rinvenuti parecchi individui nella valle del Galagone: seconda metà di giugno.

Stenalia testacea, Fab. — Rinvenuta molto abbondante presso Alghero: fine di maggio.

Anaspis ruficollis, Fab. — Trovata nel territorio di Orri: fine di aprile.

— .... ? — Raccolta presso Terranova: seconda metà di giugno.

— **maculata**, Fourc. — Diffusa in diversi luoghi: dalla metà di aprile a tutto giugno.

— .... ? — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso Sassari.

— **melanostoma**, A. Cost. — Frequente nel Cagliaritano, nella seconda metà di aprile.

— **forcipata**, Muls. — Raccolta a Monte Narba: seconda metà di aprile.

Cantaridei

Meloe proscarabaeus, Lin. — Rinvenuto frequente presso Oristano, Domusnovas e Simaxis in maggio, e presso Cagliari nella fine di giugno.

— **purpurascens**, Germ. (*sardous*, Gen.) — Ne abbiamo rinvenuto un individuo morto presso Cagliari [1]).

— **tuccius**, Ros. — Specie poco comune: rinvenuta presso Siliqua, Simaxis e Sassari: maggio.

— **rugosus**, Mars. — Raccolto presso Decimoputzu; seconda metà di aprile.

— **autumnalis**, Oliv. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Cagliari negli ultimi giorni di giugno [2]).

— **cicatricosus**, Leach. — Ne abbiam trovato un individuo presso S. Lussurgio.

Zonitis mutica, Fab. — Trovato frequente presso Milis ed Osilo: metà di maggio.

Edemeridei

Anoncodes viridipes, Schm. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo femmina sopra i fiori di Tapsia nelle adiacenze di Tissi: primi giorni di giugno.

Oedemera coerulea, Lin. — Diffusa per quasi tutta l'isola: l'abbiamo trovata soprattutto abbondante nell'isola dell'Asinara.

— **flavipes**, Fab. — Diffusa per quasi tutta l'isola.

— **barbara**, Fab. — Raccolta nelle vicinanze di Sassari nella seconda metà di maggio e presso Oliena nella seconda metà di giugno.

— **lurida**, Marsh. — Diffusa in tutta l'isola, sebbene non molto abbondante.

Probosca viridana, Schm. — Trovata abbondantissima nelle vicinanze di Quarto presso Cagliari: negli ultimi giorni di giugno.

Mycterus pulverulentus, Kust. — Trovato in molti luoghi: dalla metà di maggio a tutto giugno.

Bruchidei

Urodon canus, Kust. — Trovato piuttosto abbondante nelle praterie delle adiacenze di Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Bruchus longicornis, Germ. — Abbondantissimo presso Oschiri sopra i fiori di Tapsia, primi giorni di giugno. Rinvenuto ancora presso Ozieri e Macomer anche in giugno.

— **meleagrinus**, Gen. — Raccolto presso Tissi e Domusnovas: maggio.

— **pisi**, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola, sebben poco comune nelle campagne.

Spermophagus cardui, Gyll. — Comune in tutta l'isola.

Specie indeterminate 5.

Curculionidei

Brachycerus albidentatus, Gyll. — Trovato in diversi luoghi, ma sopratutto frequente sulle vie presso Oristano, in maggio.

— **undatus**, Fab. — Rinvenuto sul monte Limbara, poco frequente: maggio.

Auletes politus, Bohm. — Rinvenuto presso Iglesias: primi giorni di maggio.

— **pubescens**, Kiesw. — Specie nuova per la Fauna sarda ed italiana. Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **maculipennis**, Duv. — Anche di questa

[1]) Questo Meloe è abbondante in Sardegna, ma nell'inverno.

[2]) Dal sig. Gregorio Lotti abbiam ricevuti individui raccolti nel bosco di Marganai nell'inverno.

specie abbiamo rinvenuto solo un individuo presso Decimoputzu: aprile.

Apion pomonae, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

— **tubiferum**, Gyll. — Diffuso per varie parti dell' isola: trovato a Orri, Iglesias, Isola piana: aprile e maggio.

— **scalptum**, Muls. — Rinvenuto sulla montagna di Nuragu presso Ozieri: prima metà di giugno.

— **pallipes**, Kirb. — Trovato presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **flavofemoratum**, Herb. — Trovato abbondante nelle vicinanze di Iglesias: primi giorni di maggio.

— **aeneum**, Fab. — Diffuso per varie parti dell' isola, da Cagliari a Tempio: maggio, giugno.

— **laevicolle**, Kirb. — Trovato nelle adiacenze di Nuoro: seconda metà di giugno: poco abbondante.

— **assimile**, Kirb. — Raccolto nelle vicinanze di Sassari: fine di maggio.

— **platalea**, Kirb. — Rinvenuto nelle campagne di Orri: seconda metà di aprile.

— **cyanipenne**, Gyll. — Raccolto presso Iglesias: primi giorni di maggio.

— **frumentarium**, Lin. (*haematodes*, Kirb.) Diffuso per varie parti dell'isola: aprile, maggio e giugno.

— **malvae**, Fab. — Raccolto presso Cagliari, Decimoputzu e Silìqua: seconda metà di aprile e prima di maggio.

— **humile**, Germ. — Rinvenuto nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

Strophosomus Delarouzei, Fairm. — Specie non ancora indicata come abitatrice della Sardegna. Ne abbiamo rinvenuti varii individui sul monte Limbara sopra le Elci: prima metà di giugno.

Sitones vestitus, Walt. — Rinvenuto nelle vicinanze di Tempio: prima metà di giugno.

— **lineatus**, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola.

— **humeralis**, Step. — Diffuso e frequente quanto il precedente.

Metallites scutellaris, Chev. — Diffuso per molte parti dell' isola: dalla metà di aprile.

— **parallelus**, Chev. — Trovato sulla montagna di Aggius e sul Limbara: prima metà di giugno.

Polydrosus suturellus, Chev. — Ne abbiamo rinvenuto uno presso S. Lussurgio.

Otiorhynchus ... ? — Rinvenuto a Monte Poni vicino Iglesias [1]).

Anisorhynchus costatus, Bohm. — Ne abbiamo trovato individui presso Decimoputzu ed altri sulla pubblica via tra Tissi e Sassari: aprile, maggio.

Phytonomus philanthus, Oliv. — Raccolto presso Oristano: maggio.

— .... ? (affine al *trilineatus*) — Rinvenuto presso Cagliari: seconda metà di aprile.

Coniatus tamaricis, Fab. — Trovato ovunque sopra i Tamarici, dalla metà di aprile in poi.

— var. *Damryi*. — Abbondantissimo sopra i Tamarici delle sponde del Coghinas presso S. Rocco.

Cleonus ocularis, Fab. — Rinvenuto presso Cagliari, Silìqua ed Iglesias: seconda metà di aprile e maggio.

— .... ? — Rinvenuto nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **obliquus**, Fab. — Trovato presso Cagliari, Oristano, S. Lussurgio ed altrove: aprile, maggio e giugno.

— ....? — Ne abbiamo rinvenuti due individui nelle vicinanze di Sassari: fine di maggio.

— **alternans**, Oliv. — Trovato in diversi luoghi: maggio e giugno.

— **nanus**, Gyll. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso Silìqua: primi giorni di maggio.

Rhinocillus Olivieri, Gyll. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di aprile.

Larinus cinarae, Fab. — Diffuso per quasi tutta l'isola: sopra i cardi, come tutte le altre specie congeneri.

— **Genei**, Sch. — Non raro a Monte Narba: seconda metà di aprile; S. Lussurgio, maggio; Ozieri, principio di giugno.

— **scolymi**, Oliv. — Trovato in diversi luoghi: maggio e giugno.

— .... ? — Raccolto nelle adiacenze di Alghero: seconda metà di maggio.

— .... ? — Diffuso per buona parte dell' isola: maggio e giugno.

Lixus iridis, Oliv. — Rinvenuto presso Terranova: seconda metà di giugno.

— **angustatus**, Herb. — Diffuso per molte parti dell' isola.

[1]) Dal sig. A. Cabella ne abbiamo ancora ricevuto un individuo raccolto presso Tempio in settembre.

Lixus umbellatarum, Fab. var. *brevicaudis*.— Abbondante a Monte Narba sopra la *Ferula nodiflora*: seconda metà di aprile: rinvenuto ancora presso Iglesias: principio di maggio.

— **Ascanii**, Lin. — Raccolto a Campiomu: seconda metà di aprile.

— **scolopax**, Bohm. — Specie poco frequente: rinvenuta a Monte Narba (seconda metà di aprile), presso Domusnovas (principio di maggio), S. Lussurgio.

— var. *sardiniensis*, Bohm. — Trovato col tipo.

— **mucronatus**, Oliv. — Raccolto presso Cagliari: seconda metà di aprile.

— **rufitarsis**, Bohm. — Diffuso per molte parti dell'isola, dalla metà di aprile a giugno.

Magdalinus aterrimus, Lin. — Trovato nel bosco di S. Leonardo presso San Lussurgio: maggio.

Balaninus tessellatus, Fourc. — Rinvenuto sul monte Limbara e nel bosco presso Tempio: prima metà di giugno: sopra le Elci.

Tychius ....? — Trovato nella contrada stessa in cui ne avevamo raccolto un individuo in settembre, cioè ne' prati presso lo Stagno di Cabras: maggio.

Baritychius squamosus, Gyll. — Diffuso per molti luoghi dell'isola, soprattutto frequente nel Cagliaritano: seconda metà di aprile.

Cionus gibbifrons, Kiesw. — Ne abbiamo rinvenuti due individui nelle vicinanze di Iglesias: maggio.

Nanophyes transversus, Aubè. — Rinvenuto nell'isola dell'Asinara e presso Terranova: maggio.

— **Chevrieri**, Bohm. — Sopra i Tamarici: più abbondante presso Terranova, seconda metà di giugno. Trovato pure in Iglesias nel principio di maggio.

— **pallidulus**, Grav. — Abbondante in diversi luoghi, anche sopra i Tamarici.

— **quadrivirgatus**, A. Cost. — Trovato col precedente, presso Terranova, ma meno frequente.

Baris T-album, Lin. — Rinvenuto ne' prati presso lo Stagno di Cabras: maggio.

— **scripturatus**, Men. (*opiparis*, Duv.) — Trovato presso il Capo di S. Elia: ultimi giorni di giugno.

Baris prasinus, Bohm. — Rinvenuto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **viridisericeus**, Goez. — Trovato presso Pula, nella seconda metà di aprile ed a Cagliari, in fine di giugno.

Mononychus pseudacori, Fab. — Trovato presso Pula: seconda metà di aprile.

Ceutorhynchus echii, Fab. — Diffuso per molte parti dell'isola, non escluso il Monte Limbara: seconda metà di aprile, maggio e giugno.

— **chalybaeus**, Germ. — Trovato a Gibbas e Iglesias: aprile e maggio.

Acentrus histrio, Bohm. — Trovato abbondante nell'Isola Piana, sulla spiaggia di Alghero e di S. Elia, costantemente sul *Pancratium maritimum*: maggio e giugno.

Gymnetron pascuorum, Gyll. var. *bicolor*.— Rinvenuto nella Valle Canonica presso Iglesias: prima metà di maggio.

— **griseohirtellum**, Desb. — Specie trovata innanzi soltanto nella Corsica: l'abbiam rinvenuta abbondante presso Nuoro ed Oschiri [1]) in giugno.

Sphenophorus parumpunctatus, Gyll. — Diffuso per varie parti, sebbene non comune. Raccolto a Gibbas, Decimoputzu ed Oristano: seconda metà di aprile e maggio.

— **meridionalis**, Gyll. — Meno frequente del precedente; raccolto presso Oristano: maggio.

Sitophilus granarius, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola, oltre che ne' granai, anche sovente nella campagna.

— **orizae**, Lin. — Meno frequente del precedente.

Specie indeterminate 30.

Bostrichidei

Phloeotribus oleae, Fab. — Non raro negli olivi, a' quali talvolta produce danni apprezzabili.

Bostrichus....? — Rinvenuto presso Oristano, nelle praterie: maggio.

Cerambicidei

Cerambyx cerdo, Lin. (*heros*, Fab.) — Trovato ne' boschi di Tempio: giugno.

— **Scopolii**, Laich. (*cerdo*, Scop.) — Come il precedente.

Hesperophanes sericeus, Fab. — Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

[1]) Gl'individui da noi raccolti in Sardegna sono perfettamente simili a quelli della Corsica ricevuti in Ozieri dal sig. Damry.

Clytus verbasci, Lin. — Rinvenuto nelle adiacenze di Nuoro: seconda metà di giugno.

— **rhamni**, Germ. — Diffuso per buona parte dell'isola.

— **massiliensis**, Lin. — Non raro in diversi luoghi.

Deilus fugax, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nella valle di *Logulentu* presso Sassari: seconda metà di maggio.

Stenopterus rufus, Lin. — Trovato in molti luoghi: maggio e giugno.

— **praeustus**, Fab. — Come il precedente, ma più abbondante.

Niphona picticornis, Muls. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle siepi di roveri presso Iglesias, ed altro vagante presso Decimoputzu: fine di aprile e primi giorni di maggio.

Agapanthia irrorata, Fab. — Specie non molto rara: raccolta presso Simaxis, Alghero e Tempio, sopra la *Thapsia garganica:* maggio.

— **lineatocollis**, Don. — Raccolta presso Oristano e San Lussurgio, sopra i cardi: maggio.

— **cardui**, Lin. — Diffusa per quasi tutta l'isola.

Calamobius gracilis, Creutz. — Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari, nelle praterie: seconda metà di aprile.

Phytoecia virescens, Fab. — Raccolta presso Cagliari, Pula (seconda metà di aprile), Iglesias, Oristano (maggio), Aggius (giugno).

Leptura hastata, Fab. — Rinvenuta sulla montagna di Aggius: giugno.

Crisomelidei

Donacia polita, Kust. — Raccolta nella sponda del Rio Manno presso Silìqua: primi giorni di maggio.

— ....? — Raccolta presso il rivolo di Tissi: ultimi giorni di maggio.

Lema melanopa, Lin. — Incontrata in diversi luoghi, ma poco frequente: maggio.

Crioceris paracenthesis, Lin. — Rinvenuta nelle vicinanze di Cagliari: ultimi giorni di giugno.

Labidostomis taxicornis, Fab. — Diffusa per quasi tutta l'isola: maggio. Nel tenimento di Oristano ha danneggiato le viti, divorandone i pampani.

— **centromaculata**, Genè. — Trovata abbondantissima presso Silìqua ne' primi giorni di maggio: meno abbondante a Monte Narba in fine di aprile, e sul monte Limbara nella prima metà di giugno.

Lachnaea tristigma, Lac. — Diffusa per quasi tutta l'isola, dalla fine di aprile al giugno.

Tituboea dispar, Luc. — Rinvenuta in diversi luoghi da Cagliari a Sassari, e nell'isola dell'Asinara.

Gynandrophthalma ferulae, Gen. — Trovata abbondante a Monte Narba sopra la *Ferula nodiflora* nella seconda metà di aprile; meno abbondante presso Iglesias ne' primi giorni di maggio.

Coptocephala cyanocephala, Lacd. — Trovata molto abbondante nelle colline di Terranova, meno abbondante presso Macomer e Cagliari: seconda metà di giugno.

— **scopolina**, Lin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nell'Isola Piana: seconda metà di maggio.

Pachnephorus cylindricus, Luc. — Raccolto presso Decimoputzu: seconda metà di aprile: rara.

Colaspidea nitida, Luc. — Raccolta in varii luoghi sopra l'*Erica arborea:* seconda metà di aprile e maggio.

Cryptocephalus virgatus, Suff. — Diffuso per tutta l'isola: trovato dalla metà di aprile alla fine di maggio.

— **bipunctatus**, Lin. var. *lineola*, Fab. — Raccolto presso Cagliari: giugno.

— ....? (aff. al *flavilabris*). — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto sui monti del Limbara: giugno.

— **fulcratus**, Germ. — Anche questa specie sembra poco frequente: l'abbiam trovata soltanto presso Iglesias.

— **signaticollis**, Suff. — Diffuso per quasi tutta l'isola: trovato dalla metà di aprile a fine giugno.

— **blandulus**, Har. — Rinvenuto in diversi luoghi (Monte Poni, Riola, Tempio, Oliena), ma ovunque poco abbondante.

— **minutus**, Fab. — Diffuso per tutta l'isola: dalla metà di aprile a tutto giugno.

— **politus**, Suff. — Rinvenuto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **ochropezus**, Suff. — Trovato presso Oschiri, Nuoro e Terranova: giugno.

Pachybrachys scriptus, Schaef. — Rinvenuto presso Muravera, Oristano e Sassari: seconda metà di aprile e maggio.

Pachybrachys leucurus, nob. — Raccolto nelle vicinanze di Oliena: seconda metà di giugno.

Stylosomus tamaricis, Schaef. — Abbondante sopra i Tamarici presso Oristano nella metà di maggio; meno abbondante a Decimoputzu negli ultimi giorni di aprile.

Timarcha Prunneri, Schaef. — Raccolta presso Cagliari nella seconda metà di aprile, e a Tissi negli ultimi giorni di maggio.

— **sicelidis**, Reic. — Trovata nella adiacenze di Tempio: giugno.

— ....? — Rinvenuta al Capo S. Elia negli ultimi giorni di giugno.

Chrysomela Banksii, Fab. — Diffusa per quasi tutta l'isola.

— **haemoptera** — Frequente a Decimoputzu e Gibbas: seconda metà di aprile.

— ....? — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Porto Torres: maggio

— **chloris**, Luc. — Diffusa per quasi tutta l'isola: maggio e giugno.

— **americana**, Lin. — Trovata ne' giardini di Orri, sopra il Rosmarino: seconda metà di aprile: in Iglesias, maggio.

— **hyperici**, Forst. (*fucata*, Oliv.) — Rinvenuta nelle vicinanze di Sassari: seconda metà di maggio.

Adimonia rustica, Schall. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

Prasocuris beccabungae, Ill. — Rinvenuta tra le piante palustri delle sponde del Fiume Canonica presso Iglesias: primi giorni di maggio.

Galleruca crataegi, Forst. — Trovata in diversi luoghi e sopra varii alberi: seconda metà di aprile e maggio.

— **calmariensis**, Lin. — Non rara presso le sponde del Coghinas a S. Rocco, sopra i Salici: giugno.

Rhaphidopalpa abdominalis, Fab. — Rinvenuta presso Porto Torres: seconda metà di maggio.

Malacosoma lusitanica, Lin. — Trovata in diversi luoghi in maggio e giugno: sempre poco abbondante.

Agelastica alni, Lin. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

Crepidodera transversa, Mars. — Raccolta nelle adiacenze di Iglesias ne' primi giorni di maggio: osservata però in seguito in molti altri luoghi.

Crepidodera ferruginea, Scop. — Rinvenuta nell'Isola Piana in maggio, e sulla montagna di Aggius in giugno.

— **aurata**, Mars. — Raccolta sui monti del Limbara: giugno.

Sphaeroderma testacea, Fab. — Abbondante in diversi luoghi, dai primi giorni di maggio.

Phyllotreta nigripes, Panz. — Trovata presso Silìqua (maggio) e Terranova (giugno).

— **nemorum**, Lin. — Raccolta nelle campagne di Cagliari: giugno.

Podagrica semirufa, Kust. — Trovata in diversi luoghi dalla metà di aprile in poi.

— **discedens**, Boield. — Raccolta presso Silìqua ed Iglesias: prima metà di maggio.

Plectroscelis aerosa, Letz. — Trovata a Gibbas e nell'isola Piana: aprile e maggio.

Psylliodes chrysocephala, Lin. — Non rara in diversi luoghi: maggio e giugno.

— **laticollis**, Kutz. — Raccolta presso Iglesias, Silìqua e Domusnovas: maggio.

— **gibbosa**, All. — Rinvenuta nelle adiacenze di Silìqua: maggio.

— **fusiformis**, Ill. — Trovata presso le sponde del rivolo di Tissi: maggio.

— **herbacea**, Foud. — Raccolta su'monti del Limbara: prima metà di giugno.

Hispa testacea, Lin. — Trovata in varii luoghi sopra l'*Erica arborea*: maggio.

— **atra**, Lin. — Rinvenuta presso Decimoputzu, seconda metà di aprile: poco frequente.

Cassida murraea, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

— **vittata**, Vill. — Trovata abbondantissima presso Cagliari sopra la *Beta vulgaris*: seconda metà di aprile; presso Oristano e nell'isola Piana in maggio, ma molto meno abbondante.

— **depressa**, Suff. — Raccolta presso Silìqua (primi giorni di maggio) e Tempio (prima metà di giugno).

— **ferruginea**, Goez. — Rinvenuta nelle vicinanze di Oristano e di Macomer: maggio e giugno.

— **rubiginosa**, Ill. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

Specie indeterminate 15.

Coccinellidei

Adonia mutabilis, Scrib. — Diffusa per tutta l'isola.

Harmonia Doublieri, Muls. — Trovata nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Coccinella 7-punctata, Lin. — Diffusa e comune in tutta l'isola.

— **11-notata**. Schn. — Raccolta presso Osilo: seconda metà di maggio.

— **11-punctata**, Lin. — Trovata presso Siliqua (prima metà di maggio) ed Oschiri (prima metà di giugno) in prossimità de' fiumi.

Coccinella 14-punctata, Lin. — Rinvenuta a Pula (seconda metà di aprile) ed a San Lussurgio (prima metà di maggio).

— **22-punctata**, Lin. — Osservata in diversi luoghi: maggio e giugno.

Chilocorus bipustulatus, Lin. — Trovato in diverse parti dell' isola: da aprile a giugno.

Exochomus 4-pustulatus, Lin. — Diffuso in diverse parti dell'isola: maggio e giugno.

Epilachna chrysomelina, Fab. — Trovata a Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Hyperaspis Hoffmanseggi, Hel. — Trovata presso Pula e Muravera: seconda metà di aprile.

Scymnus marginalis, Ross. — Diffuso per tutta l'isola: aprile a giugno.

Scymnus Apetzii, Muls. — Frequente quanto il precedente.

— **Ahrensii**, Muls. — Rinvenuto presso Domusnovas.

— **capitatus**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **minimus**, Payk. — Rinvenuto nelle adiacenze di Siliqua: maggio.

— **zigzag**, nob. — Raccolto a Gibbas e più abbondante presso Decimoputzu: seconda metà di aprile.

— **capitatus**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Ozieri: giugno.

— **discoideus**, Ill. — Raccolto presso le sponde del fiume di Terranova: seconda metà di giugno.

Rhizobius litura, Fab. — Trovato in varii luoghi: fine di aprile e maggio.

Coccidula rufa, Herb. — Rinvenuta nelle sponde del pantano di Gibbas: seconda metà di aprile.

Corilofidei

Sacium pusillum, Gyll. — Trovato nelle adiacenze di Sassari: seconda metà di maggio.

Ortotteri

È questo il solo ordine nel quale complessivamente abbiam rinvenuto un numero di specie non superiore a quello trovato in settembre, sebbene non siano mancate talune allora non viste. Soprattutto è nella famiglia de' Locustidei che si avvertiva grande scarsezza, principalmente nella prima metà della primavera, essendo questi gli Ortotteri che sviluppano a calore inoltrato. La sola specie che può dirsi precoce è una *Odontura*, sulla cui determinazione ritorneremo nella parte terza. Nella metà di aprile essa trovavasi già allo stato d' immagine, e non rara, mentre di altre vedevansi soltanto le larve. E pare che siccome presto sviluppa, presto ancora essa esaurisca la sua vita, e che stia in ciò la ragione del non avervela trovata nel settembre. Dello stesso genere *Odontura* un' altra specie ho rinvenuta a primavera molto inoltrata, che pur è altra aggiunta a quelle che già possedeva, cioè la *pulchripennis*. Interessante ancora è stato il rinvenimento del genere *Saga*, che oltre al non essere stato innanzi rinvenuto in quell' isola, è per sè stesso raro in Italia. Questi Ortotteri pare che debbano raggiungere lo stato perfetto verso la metà della state; dappoichè l' individuo trovato a 21 giugno trovavasi tuttavia allo stato larvale, sebbene lungo 48 millimetri, senza la trivella. Per tale ragione non possiam dire se la specie sia identica a quella rinvenuta nelle nostre provincie meridionali del continente. A quella età è colorita assai diversamente che gl' individui adulti che io ne posseggo; ma potrebbero que' colori cangiarsi con l'ulteriore sviluppo. Gli Acridiidei pel con-

trario sviluppano assai presto: sicchè fin dalla metà di aprile abbiam trovato già immagini presso Cagliari non solo le specie più o meno volgari, ma ancora le due più speciali della Sardegna, quali sono la *Opomala cylindrica* e la *Porthetis marmorata*. Nessuna specie ho aggiunto a quelle che già possedevo. Della famiglia dei Blattidei vi ho rinvenuta quella graziosina specie, la più piccola di quante si conoscano in Europa, stata descritta dal Serville col nome di *Bl. Sardea* (oggi del genere *Aphlebia*), e che a torto il Brunner sospettò sia la stessa che la *maculata*.

Forficulidei

Forficula gigantea, Fab. — Oltre che ne' luoghi indicati nella precedente memoria, trovata presso Monte Narba adulta nella seconda metà di aprile.

— **annulipes**, Luc. — Raccolta nelle vicinanze di Oristano: maggio.

— **moesta**, Genè. — Trovata in tutte le contrade perlustrate dalla metà di aprile a fine di giugno.

— **auricularia**, Lin. — Comune ed adulta in tutte le stagioni.

— **pubescens**, Genè. — Trovata in diversi luoghi, ma poco frequente.

— **decipiens**, Genè. — Sparsa per quasi tutta l'isola, maggio e giugno.

Blattidei

Ectobia livida, Fab. — Non rara nelle siepi: maggio e giugno.

Polyzosteria decipiens, Germ. — Diffusa per quasi tutta l'isola sotto le pietre: maggio e giugno.

Aphlebia sardoa, Serv. — Rinvenuta adulta dalla metà di aprile a tutto giugno e quindi in luoghi diversi: Pula, Muravera, Oliena, monti del Limbara; però ovunque poco frequente.

Phyllodromia germanica, Lin. — In talune case di Cagliari erasi moltiplicata tanto, da equipararsi alla ordinaria Blatta da cucina [1]).

Periplaneta orientalis, Lin. — Vedi memoria prima.

— **americana**, Lin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso la spiaggia di Alghero: maggio.

Mantidei

Mantis religiosa, Lin. — Nella metà di aprile ne abbiam trovate larve presso Cagliari.

Ameles Heldreichi, Brunn. — Anche di questa specie, che nel settembre rinvenimmo adulta [2]) abbiamo trovato piccole larve presso Cagliari nella metà di aprile.

Fasmidei

Bacillus Rossii, Fab. — Ne abbiamo trovati individui non ancora adulti presso Oristano in maggio.

Acridiidei

Tryxalis nasuta, Lin. — Diffusa per tutta l'isola, ma poco frequente: comincia ad essere adulta in maggio.

Stenobothrus biguttatus, Charp. (*variabilis*, Fisch.) — Trovato nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

— **bicolor**, Charp. — Raccolto presso Iglesias: prima metà di maggio.

Stauronotus cruciatus, Charp. — Trovato in diversi luoghi in maggio e giugno: abbondantissimo presso Terranova Pausania.

Epachromia thalassina, Fab. — Rinvenuta presso Cagliari ed Oristano: maggio e giugno.

Oedipoda (*Spingonotus* [3]) **coerulans**, Lin. — Raccolta presso Cagliari: fine di giugno.

— (*Acrotylus*) **insubrica**, Scop. — Rinvenuta presso Cagliari nella metà di aprile e più tardi in altri luoghi.

— **gratiosa**, Serv. — Diffusa per quasi tutta l'isola dalla fine di aprile all' autunno.

[1]) Dobbiamo alla gentilezza del prof. Parona la comunicazione del fatto e di varii individui dell'animale.

[2]) Vedi l'appendice alla memoria prima; in seguito alla presente.

[3]) Sebbene i nomi generici di talune specie si trovassero mutati nella recente opera del Brunner (*Prodromus der Europ. Orthopt.*), pure, per serbare armonia con la prima memoria, conserveremo i nomi in quella adottati, aggiungendo tra parentesi i posteriori.

Oedipoda coerulescens, Lin. — Anche questa specie è molto diffusa.

Porthetis (*Pamphaqus*) **marmorata**, Burm. — Ne abbiamo trovato i primi individui adulti nella seconda metà di aprile presso Cagliari.

Acridium lineola, Fab. — Sparso per tutta l'isola, ma ovunque poco abbondante.

Caloptenus italicus, Lin. — Osservato adulto dalla metà di aprile in poi.

— **plorans**, Charp. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari nella seconda metà di aprile e più tardi in altri luoghi.

— **littoralis**, Ramb. [1]) — Raccolto nelle campagne di Cagliari nella seconda metà di giugno.

Platyphyma Giornae, Ross. — Comune ovunque.

Opomala cylindrica, Mars. — Abbondante tra canneti presso lo Stagno di Cagliari. Nella metà di aprile cominciavano i primi individui a raggiungere lo stato perfetto.

Tettix bipunctatus, Lin. — Osservato in diversi luoghi.

— **meridionalis**, Ramb. — Specie anche più frequente della precedente: nella seconda metà di aprile trovansi individui già adulti.

Locustidei

Barbitistes pulchripennis, A. Cost. — Ne abbiamo raccolti varii individui maschi nelle siepi verdi presso Agnata su'monti del Limbara, nella prima metà di giugno.

Odontura calaritana, nob. — Frequente e già adulta nella seconda metà di aprile nelle vicinanze di Cagliari, di Muravera, Silìqua: in maggio nelle campagne di Simaxis.

Phaneroptera (*Tylopsis*) **liliifolia**, Fab. — Trovata in diversi luoghi, nel giugno.

Xiphidium fuscum, Fab. — Rinvenuto presso le sponde de' rivoli di Tissi: fine di maggio.

Conocephalus mandibularis, Charp. — Ne abbiamo incontrato qualche individuo presso Oristano: maggio.

Platycleis tessellata, Charp. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo adulto presso Nuoro: seconda metà di giugno.

Ephippigera rugosicollis, Serv. — Trovata nelle adiacenze di Nuoro: seconda metà di giugno.

Saga ....? — Ne abbiamo rinvenuto nella valle del Galagone a 21 giugno un individuo femmina giovanissimo, che non ci permette determinare con precisione la specie [2]).

Grillidei

Trigonidium cicindeloides, Serv. — Tra le piante palustri o prati umidi: in molte parti: maggio e giugno.

Nemobius Heydeni, Fisch. — Trovato tra le piante palustri presso le sponde de'fiumi a Porto Torres, Oschiri, Orgosolo e Terranova: maggio e giugno.

Gryllus campestris, Lin. — Vedi la memoria prima.

— **Cerisyi**, Serv. [3]) — Non raro, adulto, presso Muravera, M. Narba, Silìqua, fine di aprile e maggio.

Mogoplistes squamiger, Fisch. — Rinvenuto presso lo stagno di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **brunneus**, Serv. (*marginatus*, A. Cost.) — Diffuso per tutta l'isola: trovato adulto dalla metà di aprile in poi.

Gryllotalpa vulgaris, Lin. — Vedi la memoria prima.

Nevrotteri

Poche ma interessanti sono le aggiunte in quest'ordine. Il contingente maggiore l'abbiam ottenuto nella famiglia dei Friganeidei. Non direm già che il numero delle specie raccoltevi sia considerevole: chè anzi, avuto riguardo alla estensione di tale famiglia ed

[1]) Nella prima Memoria manifestammo il nostro convincimento, contrariamente alla opinione del Fischer, che questo Calopteno dovesse considerarsi come diverso dal *plorans* Siffatto giudizio troviamo confermato da Brunner, il quale ritiene il *littoralis* come specie distinta, determinandone nettamente i caratteri differenziali.

[2]) Vedine la descrizione nella parte seguente.

[3]) Sebbene questo Grillo venga considerato come una varietà del *burdigalensis*, pure si presenta in Sardegna come in Egitto con un abito proprio, per lo quale crediamo indicarlo col nome speciale impostogli dal Serville.

alla quantità di acque che nell'isola esistono, esse possono dirsi assai poche: e siamo convinti che altre ancora se ne discopriranno. Nondimeno, tenendo presente che nel settembre ne avevamo rinvenute sette sole, e che ora ne possediamo quindici, non possiamo che considerare come favorevole un tal risultamento. Al che si aggiunge che il Rambur, il quale ebbe in comunicazione i Nevrotteri raccolti da Genè, cita la Sardegna per cinque specie soltanto; ed il M. Lachlan, che ha avuto Friganeidei da ogni parte per la sua classica opera su' *Trichoptera* di Europa, neppure ha avuto cosa alcuna dalla Sardegna. Egli cita questa località soltanto per le specie stesse descritte dal Rambur. Tra le cose ora raccolte, e di cui non ancora era stata indicata la esistenza in Sardegna, possiamo menzionare la bellissima *Hydroptila (Stactobia) fuscicornis.*

In quanto alle altre famiglie diremo, che gli Odonati vi sono meno numerosi di quello che per la indicata condizione locale si potrebbe credere. Il rinvenimento del maschio del *Gomphus* di cui in settembre aveva potuto raccogliere soltanto la femmina, per modo da essermi stata impossibile allora la determinazione della specie, mi ha messo al caso di colmare tale lacuna, e riconoscervi una specie ben singolare ed assai probabilmente nuova.

Di Ascalafi pare esista una sola specie, diffusa abbondantemente in tutta l'isola ed in altre piccole isole adiacenti, come quella dell'*Asinara* e l'*Isola Piana.* Esso è l'*Ascalaphus corsicus*, Ramb.

Non possiamo passare sotto silenzio il fatto di non aver trovato alcuna specie della famiglia de' Perlidei, non ostante tra i luoghi da noi perlustrati e nel settembre dello scorso anno e nella primavera di questo, molti offrivano le condizioni acconce per la vita di tali insetti. Non direm che in Sardegna i Perlidei mancano assolutamente, poichè il Rambur, il quale come sopra si è detto, ebbe in comunicazione tutti i Nevrotteri raccolti in quell'isola da Genè, cita la Sardegna per una specie di *Nemura* (N. *Genei*). Si è però autorizzati a dire esservene assai scarsamente.

Libellulidei

Libellula depressa, Lin. — Comune ovunque in ogni stagione.
— **cancellata**, Charp. — Raccolta nelle adiacenze di Pula: seconda metà di aprile.
— **cygnos**, Sel. — Trovata in diversi luoghi dalla fine di aprile a tutto giugno; ma meno abbondante di altre.
— **Fonscolombii**, Sel. — Raccolta presso Cagliari ed Oristano: aprile e maggio.
— **meridionalis**, Sel. (*hybrida*, Ramb.) — Trovata in diversi luoghi.
— **Genei**, Ramb. — Raccolta presso Oristano in maggio.
— **vulgata**, Lin. — È una delle specie più diffuse ed abbondanti, forse in tutto l'anno.
Gomphus excelsus, nob. — Raccolto presso Silìqua nel principio di maggio, e Nuoro nella seconda metà di giugno.
Anax formosus, V. Lind. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano: maggio.
— **parthenope**, Selys. — Raccolto presso le sponde del fiume a Porto Torres: maggio.
Aeschna Irene, Fonsc. — Ne abbiamo potuto attrappare un individuo nella valle sotto Orgosolo [1]).

Agrionidei

Calopteryx haemorrhoidalis, V. Lind.
Lestes barbara, Fab.
— **fusca**, V. Lind.
Agrion Najas, Hans.
— **tenellum**, De Vill.
— **Genei**, Ramb.
— **elegans**, V. Lind.

[1]) La difficoltà di dar la caccia agli Escnidei non permette di pronunziare intorno la rarità o frequenza della specie.

Agrion puella, V. Lind.
— **hastulatum**, Charp.

Tutte le cennate specie di *Agrion* trovansi più o meno diffuse presso tutti i corsi o raccolte di acque.

Mirmeleonidei

Ascalaphus corsicus, Ramb. — Diffuso per tutta l'isola e nelle piccole isole attigue dell'Asinara e Piana. Abbiamo cominciato a trovarlo nella seconda metà di maggio.

Myrmeleon falcipennis, nob.—Raccolto presso Alghero e Terranova: maggio e giugno.

— **pallidipennis**, Rmb. — Rinvenuto nelle vicinanze dello Stagno di Molentargius: fine di giugno.

— **distinguendus**, Ramb. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

Myrmecoelurus appendiculatus, Latr.—Rinvenuto presso Terranova e nella valle del Galagone: seconda metà di giugno.

Efemeridei

Baetis sardoa, A. Cost. — È specie abbondante presso quasi tutti i fiumi: trovata a Molentargius, Silìqua, Tissi, Porto Torres, Fordongianus.

Cloe diptera, Lin. — Frequente in vicinanza de' fiumi: maggio e giugno.

Friganeidei

Leptocerus bilineatus, Lin. — Ne abbiamo raccolti individui tipici presso le sponde del fiume di Fordongianus: maggio.

— **Genei**, Ramb. — Trovata molto abbondante presso le sponde del Rio Manno a Silìqua ne' primi giorni di maggio.

Setodes tineiformis, Curt. — Trovata abbondante presso il fiume di Porto Torres: maggio.

Mystacides azurea, Lin.—Abbondante presso il fiume di Fordongianus: qualche individuo ancora trovato presso il Tirso in Oristano ed il Rio Manno a Silìqua: maggio.

Hydropsyche pellucidula, Curt.—Anche questa era molto abbondante presso il fiume di Fordongianus.

Rhiacophila .... ? — Non rara presso il fiume di Porto Torres.

Hydroptila (*Stactobia*) **fuscicornis**, Schn. — Trovata vagante sopra roccia bagnata da stillicidio di acqua presso Aggius: non rara.

Specie indeterminate 8.

Corrodenti

Psocidei

Due specie indeterminate.

Coniopterigidei

Coniopteryx tineiformis, Curt. — Oltremodo abbondante presso lo sbocco del Galagone.

— **psociformis**, Curt. — Raccolto presso le sponde del Coghinas in vicinanza di Perfugas.

Termitidei

Termes lucifugus, Ross. — Comune in Cagliari, producendo i consueti guasti. Alla metà di aprile ne abbiamo trovata una straordinaria schiusa.

Imenotteri

Ubertosissima è stata la messe in insetti di quest'ordine, e non agevole riuscirebbe il darne un sommario ragguaglio. E però cenneremo soltanto alcune cose. Nella vasta famiglia degli Sfegidei due nuove specie si sono aggiunte nel genere *Tachytes*, l'una affine alla *rufiventris*, Spin. *(L. erythrogastra)*, l'altra più vistosa, di molto simile alla *obsoleta*, Ross. *(procera)*. Novelli individui della *Astata picea* ci han fatto riconoscere che il color picco dell'intero corpo è dovuto alla prolungata azione della luce, mentre nel fresco esso è nero intenso splendente. Nel genere *Oxybelus* la Sardegna offre ancora cose assai interessanti, ed una delle specie ora raccolte pare che debba riferirsi nel genere *Notoglossa* proposto da Dahlbom per una specie africana, di cui però non diede i caratteri.

Nella famiglia de' Pompilidei, nella quale varie nuove specie rinvenimmo nel settembre, altre due se ne sono ora aggiunte nel genere *Priocnemis;* una che abbiam chiamata *leucocoelius*, ed altra affine al *Calicurgus egregius* descritto da Lepeletier con individui ricevuti da Corsica, che ho denominato *bisdecoratus*. Di specie poi già note ci è piaciuto trovare il piccolo *Priocnemis abdominalis* descritto da Dahlbom come proprio appunto della Sardegna, e raffermare che il *Pompilus meticulosus* descritto nella prima memoria è buona specie, costante ne' suoi caratteri, avendone rinvenuti altri due individui. Noteremo inoltre, in quanto a Pompili in generale, che mentre abbondano, anzi sono in predominio, le specie a corpo ed ali interamente neri, sono poi scarsissime quelle ad addome rosso alla base, di cui vi ha parecchie nel continente e talune assai comuni. Di questo gruppo una sola specie abbiam trovata, ed anche assai scarsamente. Del genere *Planiceps* non si conosce che il solo *P. Latreillei*. In Sardegna essa viene sostituita da altra specie da noi detta *fulviventris*, che sebbene molto affine, pure non può andar con quella confusa, e pare debba considerarsi come una di quelle specie risultanti da locali modifiche del tipo del continente. E non la giudicheremmo specie distinta, se il numero degl' individui non ci facesse riconoscere la costanza de' suoi caratteri.

Abbondante è stata la messe di Apiarii, e molte le specie di cui non conoscevasi la esistenza in Sardegna, ed anche nell' Italia tutta, come potrà rilevarsi dallo elenco che segue. Nè è mancato in questo gruppo un contingente di cose, che per quanto avessi potuto riscontrare opere e collezioni, non pare siano state innanzi descritte: quali ad esempio la *Osmia igneopurpurea,* la *Megachile carinulata, etc.*

Di Crisididei non abbiam rinvenute molte specie; nondimeno tra le poche ve ne ha delle molto importanti, come ad esempio quella molto caratteristica descritta da Dahlbom col nome di *Chr. angulata* come propria dell' Asia minore. Qualcuna sarà probabilmente anche nuova. Neppur sono mancate specie importanti tra gl' Ieneumonidei ed i Braconidei, non ostante i materiali spettanti a queste due famiglie non li avessimo ancora completamete studiati.

Della famiglia de' Tentredinidei nel decorso settembre trovammo due sole specie spettanti ad uno stesso genere: *Athalia spinarum* e *rosae*. Il sig. Magretti dando ragguaglio di alcuni Imenotteri raccolti in Sardegna dichiarò di non aver potuto trovare un solo di tale famiglia in quell' isola. Ora dalle ricerche della intera primavera risulta che i Tentredinidei vi sono effettivamente scarsissimi. Le specie che veggonsi ovunque ed in ogni tempo, dalla primavera all' autunno, sono sempre le due menzionate *Athalia*. Fuori di queste non ci è riuscito di raccogliere altro che sei specie, ed anche queste in uno o due soli individui. E pure i luoghi da noi esplorati erano di quelli che ordinariamente offrono specie di questa famiglia. Nondimeno in mezzo a sì piccol numero abbiam potuto riconoscere un novello tipo generico affine al *Perineura*, e che sarà chiamato *Ametastegia;* più, una novella specie di *Cryptocampus (C. distinctus)* ed un' altra di *Blennocampa (B. formosella)*. Alle quali è da aggiungere il *Nematus Vallisnieri*, della cui esistenza abbiam potuto giudicare dalle numerose galle trovate sopra le foglie di Salice nel tenimento di Tempio e sul monte Limbara.

In opposizione ai Tentredinidei, vi è benissimo rappresentata la famiglia affine dei Cefidei, tenuto conto della grande ristrettezza di essa. In fatti, del genere *Cephus* abbiam rinvenuto sei specie, due delle quali neppur riferibili ad alcuna delle già note e ben descritte nella recentissima opera dell'Andrè: *C. quadriguttatus* e *C. flavicornis*.

Sfegidei

Sphex maxillosa, Fab. — Raccolta presso Oschiri nei primi giorni di giugno.

— **fera**, Klug. — Rinvenuta presso Nuoro nella metà di giugno.

Enodia albisecta, Encyc. — Raccolta nell'Isola dell'Asinara e presso Terranova: seconda metà di maggio e prima di giugno.

Psammophila ebenina, Spin. — Trovata non rara nella valle di Logulentu presso Sassari: seconda metà di maggio.

Pelopoeus spirifex, Lin. — Diffuso per tutta l'isola, dall'aprile in poi.

— **pensilis**, Latr. — Abbondante presso Tissi ed Oschiri: maggio e giugno.

Ammophila sabulosa, Lin. — Diffusa per quasi tutta l'isola: seconda metà di maggio e giugno.

— **rubriventris**, A. Cost. — Raccolta nell'Isola dell'Asinara e presso Terranova nella seconda metà di maggio e in giugno: non rara.

Notogonia nigra, V. d. Lind. — Abbondante su'fiori della *Thapsia garganica* presso Simaxis: seconda metà di maggio.

Tachytes unicolor, Panz. — Diffusa per varie parti dell'isola e dell'adiacente Asinara: seconda metà di maggio e giugno.

— **fulvitarsis**, A. Cost. — Raccolta presso Cagliari in giugno.

— **Panzeri**, V. d. Lind. — Raccolta sulla montagna di Nughedu presso Ozieri: primi giorni di giugno.

— **rufiventris**, Spin. — Diffusa per varii luoghi: raccolta presso Alghero, Oschiri e Nuoro e nell'isola dell'Asinara.

— **erythrogastra**, nob. — Ne abbiamo due individui femmine raccolti presso Cagliari: fine di giugno.

— **procera**, nob. — Raccolta presso Simaxis, su' fiori della Tapsia garganica nella seconda metà di maggio.

Astata boops, Schrk. — Abbondante presso Tissi: seconda metà di maggio. Una varietà trovata presso Alghero.

Astata picea, A. Cost. — Raccolta su' fiori di *Thapsia garganica* presso Simaxis, Alghero e Tempio: seconda metà di maggio e giugno.

Dryudella Spinolae, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Oristano: prima metà di maggio.

Bembex rostrata, Lin. — Assai frequente nel littorale di Alghero e presso Oschiri: maggio e giugno.

— **bidendata**, V. Lind. — Raccolta nelle vicinanze di Cagliari: giugno.

Stizomorphus tridens, Fab. — Diffuso e frequente in molte parti dell'isola: dalla seconda metà di maggio in poi.

Nysson maculatus, Fab. — Frequente su'fiori delle Tapsie, presso Tissi: seconda metà di maggio.

Hoplisus sulcifrons, A. Cost. — Col precedente, piuttosto abbondante: ne abbiamo ambedue i sessi.

— **quinquefasciatus**, Panz. — Anche quest'altro Opliso era frequente unito alla specie precedente. Raccolto ancora presso Oschiri nella prima metà di giugno.

Harpactes elegans, Lep. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Oschiri, su'fiori della Tapsia; prima metà di giugno.

Cerceris bucculata, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti individui d'ambo i sessi presso Simaxis, Alghero e Porto Torres: maggio.

— **specularis**, A. Cost. — Raccolta presso Tempio ed Aggius ne' primi giorni di giugno.

— **quadricincta**, Latr. — Trovasi in varie parti dell'isola, dal mese di maggio.

— **arenaria**, Lin. — Anche questa specie è piuttosto diffusa nel mese di giugno.

— **ornata**, Fab. — Rinvenuta in diversi luoghi di pianura e su' monti del Limbara: maggio e giugno.

Philanthus coronatus, Fab. — Raccolto nella valle del Galagone presso Oliena nella seconda metà di giugno.

— **triangulum**, Fab. — Trovato presso Cagliari in fine di giugno.

Mimesa Dahlbomi, Wesm. — Ne abbiam rinvenuto un individuo solo presso Alghero negli ultimi giorni di maggio.

Cemonus unicolor, Fab. — Raccolto nelle vicinanze di Porto Torres: maggio.

— **lethifer**, Shuck. — Diffuso per varii luoghi: raccolto presso Cagliari, Oristano.

Diodontus minutus, Fab. — Rinvenuto nelle campagne di Oristano: maggio.

Trypoxylon figulus, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola.

— **clavicerum**, Lep. — Raccolto presso Alghero: maggio.

Entomognathus brevis, V. d. Lind. — Molto abbondante presso Tissi su' fiori delle Tapsie: maggio.

Crossocerus elongatulus, V. d. Lind. — Raccolto presso Alghero: maggio.

Blepharipus 4-maculatus, Fab. — Raccolto nelle vicinanze di Oristano: maggio.

Ceratocolus meridionalis, A. Cost. — Raccolto presso Simaxis, Tissi e Oliena: seconda metà di maggio e giugno.

Thyreus vexillatus, Panz. — Osservato in varii luoghi nel maggio e nel giugno.

Ectemnius vagus, Lin. — È questa la specie di Crabronideo rinvenuta più frequente in molte parti dell'isola.

Oxybelus nigripes, Oliv. — Molto abbondante presso il littorale di Alghero su'fiori della *Thapsia garganica*, in fine di maggio. Raccolto pure presso Oristano nella prima metà di detto mese.

— **14-notatus**, Jur. — Frequente su'fiori della citata ombrellifera nelle adiacenze di Tissi, ne' primi giorni di giugno.

— ? *(An praecedentis specimen anomalum amucronatum ?)* — Ne abbiamo un individuo rinvenuto nelle adiacenze di Osilo: maggio.

— **fissus**, Lep. — Raccolto presso Molentargius: giugno.

— **variegatus**, Wesm. — Non raro presso Oschiri. Raccolto pure sulla montagna di Aggius: giugno.

Notoglossa frondigera, nob. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto nelle adiacenze di Oschiri, ne' primi giorni di giugno.

Pompilidei

Priocnemis variabilis, Ill. v. *10-guttatus*, Ross. — Trovato nelle adiacenze di Sassari: maggio.

Priocnemis bisdecoratus, A. Cost. — Ne possediamo due individui femmine rinvenuti l'uno presso Milis, l'altro su' monti del Limbara: maggio e giugno.

— **infumatus**, Palm. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Sassari: maggio. Precedentemente erasi trovato solo in Sicilia.

— **perligerus**, A. Cost. — Raccolto nelle vicinanze di Alghero: maggio.

— **leucocoelius**, A. Cost. — Specie rara, ma discretamente diffusa: rinvenuta a Porto Torres ed Alghero in maggio, ad Aggius nella prima metà di giugno.

— **abdominalis**, Dahlb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Porto Torres ed un altro a Tissi: maggio.

Pompilus plumbeus, Fab. — Raccolto nelle adiacenze del Rio Coghinas in quel di Perfugas: prima metà di giugno.

— **holomelas**, A. Cost. — È la specie di Pompili più frequente in tutta l'isola; l'abbiamo rinvenuta quasi ovunque, cominciando da Cagliari nella metà di aprile, sino a Nuoro nella seconda metà di giugno [1]).

— **plicatus**, nob. — L'abbiam raccolto presso Cagliari, Simaxis e nell'isola dell'Asinara: aprile e maggio. Probabilmente è diffuso quanto il precedente, dal quale non è possibile distinguerlo prima di averlo tra mani.

— **tripunctatus**, V. Lind. — Raccolto presso Porto Torres ed Alghero: maggio.

— **rufipes**, Lin. — Trovato in diversi luoghi, ma poco abbondante.

— **quadripunctatus**, Fab. — Diffuso per buona parte dell'isola: ma non molto comune.

— ....? — Ne abbiamo rinvenuti due individui maschi a Cabras: maggio.

Pogonius variegatus, Lin. — Specie poco facile a trovarsi: l'abbiamo rinvenuta presso Alghero, Oristano e Sassari: maggio.

Agenia punctum, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari, seconda metà di aprile; San Lussurgio ed Oristano, maggio.

Evagetes Servillei, A. Cost. — Ne abbiamo

[1]) Tenendo presente che anche in settembre questa specie era molto diffusa è a conchiudere che apparisce assai presto in primavera e protraesi sino all'autunno.

rinvenuto un individuo presso Cagliari: seconda metà di giugno.

Planiceps fulviventris, A. Cost. — Trovata non molto rara sopra i fiori delle Tapsie a Simaxis e Tissi: maggio.

Ceropales histrio, Fab. — Raccolto presso Alghero ed a Tissi: maggio.

Dolichurus corniculus, Spin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo maschio presso Ozieri: primi giorni di giugno.

Scoliidei

Scolia flavifrons, Fab. — Diffusa per tutta l'isola: osservata da' primi giorni di maggio in poi.

Discolia quadripunctata, Fab. — Trovata frequente presso Oschiri, Tempio, Nuoro, in preferenza intorno i fiori di rovere: maggio e giugno

— **hirta**, Schrk. — Raccolta sulla montagna di Aggius: prima metà di giugno.

Dielis ciliata, Fab. — Abbondantissima in varii luoghi a cominciare dalla metà di aprile [1]).

Myzine sexfasciata, Ross. — Raccolta in diversi luoghi ne'mesi di maggio e giugno.

— **erythrura**, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti ambedue i sessi nelle vicinanze di Alghero: fine di maggio.

Tiphia femorata, Fab. — Trovata in diversi luoghi: maggio e giugno.

Sapigidei

Sapyga rufipes, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo femmina, in luogo detto S. Gregorio: ultimi giorni di aprile.

Mutillidei

Myrmosa melanocephala, Fab. — Ne abbiamo rinvenuti ambedue i sessi nelle campagne di Alghero: fine di maggio.

— ....? — Ne abbiamo un individuo rinvenuto nell'isola dell'Asinara.

Mutilla capitata, Luc. ♀ — Raccolta nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **erythrocephala**, Fab. ♀ — Ne abbiamo trovato un individuo lungo soltanto 5 mill. nella campagna di Orri: aprile.

— **cornuta**, Oliv. ♀ — Rinvenuta nelle adiacenze di Sassari: maggio.

— **rufipes**, Latr. ♀ — Rinvenuta presso Oristano in maggio, e sul monte Limbara in giugno.

Mutilla ....? (affine alla *Spinolae*, Lep.) — Raccolta a Cabras e a Macomer: maggio e giugno.

— **stridula**, Ross. ♀ (*coronata*, Fab.) — Rinvenuta nelle campagne di Terranova: giugno.

— **quadripunctata**, Oliv. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso il littorale di Porto Corallo: fine di aprile.

— **maura**, Lin. ♀ — È una delle specie di Mutille più diffusa, quantunque non comune: rinvenuta presso Alghero, Terranova e nell'Isola Piana.

— **brutia**, Pet. ♂ ♀. — La femmina è anche diffusa per molte parti dell'isola. Del maschio abbiamo rinvenuto un individuo solo presso Cagliari in fine di giugno entro un tronco fradicio.

— ....? — Ne abbiamo un individuo femmina rinvenuto nell'isola dell'Asinara.

Vespidei

Eumenes coarctata, Lin. — Diffusa e frequente in tutta l'Isola: dall'aprile a tutto giugno.

Rygchium oculatum, Fab. — Osservato presso Oristano: maggio.

Odynerus (*Ancistrocerus*) **trifasciatus**, Fab. — Diffuso per tutta l'isola: raccolto ne'diversi luoghi percorsi dalla metà di aprile a tutto giugno.

— **parietum**, Lin. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari, giugno.

— (*Lejonotus*) **crenatus**, Lep. — Raccolto presso Milis, Alghero e Nuoro: maggio e giugno.

— **dantic**, Ross. — Raccolto nell'Isola dell'Asinara e presso Oliena: maggio e giugno.

— **parvulus**, Lep. — Raccolto presso Alghero, Porto Torres e Oschiri: maggio e giugno.

— **laborans**, A. Cost. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari in aprile e giugno.

— (*Oplopus*) **notula**, Lep. — Specie conosciuta dell'Algeria e di Oran. Raccolta abbondante sulla montagna di Aggius e presso Oschiri: prima metà di giugno.

— **reniformis**, Gm. — Rinvenuto presso Pula e Domusnovas: seconda metà di aprile.

— **melanocephalus**, Gm. — Raccolto sulla

[1]) Apparisce anche più presto: ne abbiamo ricevuti individui raccolti presso Cagliari in marzo.

montagna di Aggius: prima metà di giugno.

Odynerus Reaumurii, Duf. — Rinvenuto nelle campagne di Tissi: seconda metà di maggio.

Alastor atropos, Lep. — Raccolto nelle adiacenze di Alghero: seconda metà di maggio.

Polistes gallica, Lin. — Diffusa per tutta l'isola e più o meno comune.

Vespa crabro, Lin. — Diffusa e comune per tutta l'isola.

— **germanica**, Fab. — Comune ovunque.

Specie indeterminate 6.

Formicidei

Camponotus pubescens, Fab.

— **lateralis**, Oliv.

Lasius niger, Lin.

Tapinoma nigerrimum, Nyl. — Raccolto nelle vicinanze di Oschiri.

Aphaenogaster barbara, Lin.

— **testaceopilosa**, Luc.

— **subterranea**, Latr.

Myrmica scabrinodis, Nyl. — Trovata molto abbondante tra le radici delle piante presso le sponde dello Stagno di Cagliari: aprile.

Pheidole pallidula, Nyl.

Specie indeterminata 1.

Apidei

Colletes succincta, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Hylaeus variegatus, Fab. — Diffuso per molte parti dell'isola: maggio e giugno.

— **signatus**, Panz. — Trovato abbondante nelle vicinanze di Alghero.

Sphecodes fuscipennis, Germ. — Raccolta in varii luoghi: maggio.

— **ephippius**, Lin. — Anche questa trovasi molto diffusa.

Halictus quadricinctus, Latr. — Raccolto in varii luoghi, in maggio e giugno.

— **vulpinus**, Fab. — Trovato abbondante presso Oristano e San Lussurgio: maggio.

— **vestitus**, Lep. — Raccolto nelle campagne di Orri negli ultimi giorni di aprile.

— **rubicundus**, Chris. — Rinvenuto nelle vicinanze di Alghero: maggio.

— **lucidulus**, Sch. — Trovato nel Campidano di Cagliari: giugno.

— **cylindricus**, Fab. — Raccolto nelle vicinanze di Oliena: giugno.

Halictus albipes, Fab. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari.

— **aureus**, Kriecb. — Raccolto presso Cagliari: aprile.

— **flavipes**, Fab. (*A. subaurata*, Ross.) — Rinvenuto nel Campidano di Cagliari: giugno.

Nomioides minutissimus, Ross. (*An. pulchella*, Jur.) — Trovata in diversi luoghi in maggio e giugno.

Andrena sardoa, Lep. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso San Lussurgio: maggio.

— **holomelana**, Lep. — Trovata molto abbondante nelle vicinanze di Cagliari nella seconda metà di aprile: osservata ancora in prosieguo presso Sassari, nell'isola dell'Asinara, ed anche su'monti del Limbara.

— **collaris**, Lep. — Rinvenuta presso Iglesias (principio di maggio) e Nuoro (seconda metà di giugno).

— **thoracica**, Fab. — Raccolta presso Tempio e sui monti del Limbara: giugno.

— **flessae**, Panz. — Diffusa per molte parti dell'isola dalla metà di aprile in poi: trovata a Cagliari, Pula, S. Lussurgio, Sassari, Osilo.

— **umbellatarum**, Gr. — Raccolta presso Domusnovas, Oristano, Alghero: maggio.

— **denticulata**, Kirb. — Diffusa per quasi tutta l'isola, dalla metà di aprile in poi: trovata a Cagliari, Pula, Oristano, Sassari, Ozieri.

— **mactae**, Lep. — Frequente presso Cagliari, Pula, Milis.

Panurgus canescens, Latr. — Raccolto presso Domusnovas, Tissi ed Aggius: aprile, maggio e giugno.

Osmia dorcas, nob. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari, Siliqua, Oristano e Milis: aprile e maggio.

— **tricornis**, Latr. — Trovata presso Cagliari in aprile, e molto abbondante presso Domusnovas ne'primi giorni di maggio.

— **Latreillii**, Spin. — Raccolta presso Domusnovas, Alghero, nell'isola dell'Asinara, in maggio; nelle vicinanze di Tempio in giugno.

— **cephalotes**, Eric. — Trovata la femmina non rara nelle adiacenze di Alghero in maggio: qualche maschio raccolto a Orri in aprile.

Osmia rufo-hirta, Latr.—Raccolta presso Cagliari (aprile), Oristano e Sassari (maggio).

— **ochreipila**, nob.—Rinvenuta presso Oristano, Domusnovas (maggio) ed Osilo (giugno).

— ...?—Ne abbiamo un individuo raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio in maggio, ed altri due presso Nuoro in giugno.

— **coerulescens**, Kirb.—Raccolta presso Cagliari, Decimoputzu (aprile) e Terranova (giugno).

— **melanogastra**, Spin.—Raccolta a Tissi (maggio), Oschiri e Terranova (giugno).

— **atriventris**, nob.—Ne abbiamo un individuo femmina rinvenuto in Orri: fine di aprile.

— **igneopurpurea**, A. Cost.—Molto abbondante nella pianura *Giorgino* presso Cagliari a poca distanza dal lido: seconda metà di aprile.

— ...?—Ne abbiamo due individui raccolti nella collina di Terranova: giugno.

Lithurgus haemorrhoidalis, Lep.—Specie poco diffusa; rinvenuta soltanto presso Milis: maggio.

Chalicodoma muraria, Fab.—Sparsa per varie parti dell'isola: ma non molto frequente.

— **sicula**, Ross.—Raccolta presso San Lussurgio: maggio.

Megachile chalicodomoides, nob.—Abbondante presso Milis in maggio. Trovata pure a Macomer in giugno.

— ....?—Raccolta presso Milis, Sassari, Alghero: maggio.

— **centuncularis**, Lin.—Raccolta nelle vicinanze di Tempio: giugno.

— **melanopyga**, A. Cost.—Rinvenuta presso Nuoro ed Orgosolo: seconda metà di giugno.

— **carinulata**, A. Cost.—Ne abbiamo un solo individuo maschio raccolto presso Orgosolo: giugno.

— **argentata**, Fab.—Diffusa per varie parti dell'isola: trovata in Milis, Alghero, Nuoro, Oliena: maggio e giugno.

— **mixta**, A. Cost. (*dimidiata* Dours [1])—Raccolta presso Alghero, Nuoro ed Aggius: maggio e giugno.

Anthidium manicatum, Fab.—Raccolto nell'isola dell'Asinara in maggio; nelle campagne di Tempio e sul Limbara nella prima metà di giugno.

Anthidium rufispinum, nob.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo maschio presso Alghero: maggio.

— **septemdentatum**, Latr.—È la specie del genere più diffusa dall'aprile in avanti.

— ...?—Ne abbiamo due individui femmine rinvenuti nelle vicinanze di Nuoro. La mancanza del maschio rende impossibile la determinazione della specie.

Trypetes ...?—Specie non rara: raccolta abbondante presso Milis in maggio ed anche a Domusnovas e S. Lussurgio.

— ...?—Meno frequente della precedente: rinvenuta presso Oristano in maggio ed Oschiri in giugno.

— ...?—Raccolta presso Siliqua e S. Lussurgio: giugno.

N. G. ?—Ne abbiamo una femmina rinvenuta presso Alghero.

Ceratina albilabris, Jur.—Diffusa per molte parti dell'isola: aprile, maggio e giugno.

Nomada succincta, Panz.—Raccolta presso Domusnovas e Orri: fine di aprile e maggio.

— **marshamella**, Kirb.—Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo a Orri: fine di aprile.

— **fucata**, Panz.—Diffusa per molte parti dell'isola: trovata in più luoghi da aprile a giugno.

— **femoralis**, Mor.—È la specie più comune e diffusa: però son quasi sempre le femmine che si trovano: di maschi ne abbiamo rinvenuto un solo, che ci ha resa possibile la esatta determinazione della specie.

— **furva**, Pnz.—Raccolta presso Iglesias e Sassari: maggio.

Epeolus variegatus, Lin.—Rinvenuto nelle vicinanze di Sassari: maggio.

Caelioxys simplex, Nyl.—Raccolta presso Milis, Sassari e Porto Torres: maggio.

Dioxys pyrenaica, Lep.—Trovata abbondantissima nelle vicinanze di San Lussurgio, ove fa il nido entro i buchi di massi di basalto.

[1]) Non esitiamo punto a dire che la *M. dimidiata* Dours (1873) deve ritenersi sinonimo della *mixta* da noi descritta nel 1862 (Ent. della Cal. Ult.).

Dioxys moesta, nob.—Vive con la precedente, ed è del pari abbondante.

Stelis phœoptera, Kirb. — Raccolta nelle vicinanze di Oristano e di Milis: maggio: non rara.

— **leucostoma**, nob. — Ne abbiamo un individuo femmina raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio: maggio.

Crocisa ramosa, Lep. — Raccolta presso Milis: maggio.

Melecta aterrima, Lep.—Raccolta nelle campagne di Oristano: maggio.

Eucera longicornis, Scop. — Trovata in diversi luoghi: Cagliari (aprile), San Lussurgio (maggio), Osilo (giugno).

— **fasciatella**, Lep. — Sembra piuttosto rara: ne abbiamo rinvenuto soltanto un individuo maschio presso Tempio nella prima quindicina di giugno.

— **nigrifacies**, Lep.—Abbondante nelle campagne di Oristano, in maggio: meno frequente presso Alghero: trovata ancora presso Tempio in giugno.

— **subvillosa**, Lep. — Specie non segnata innanzi ora in Italia; trovata abbondante presso Cagliari in aprile ed Oristano in maggio.

— **concinna**, nob. ♀ —Trovata abbondante presso Cagliari in aprile; a Porto Torres e nell'isola dell'Asinara in maggio.

Macrocera antilope, nob. ♂ — Trovata piuttosto abbondante nella campagna di Tissi: fine di maggio.

— **pollinosa**, Lep. — Rinvenuta presso Alghero (maggio) ed Oschiri (giugno).

Anthophora quadrifasciata, De Vill. — Pare che apparisca molto tardi: mentre in settembre era diffusa dapertutto, in primavera abbiamo cominciato a vederla nella seconda metà di giugno.

— **albigena**, Lep. — Raccolta a Milis e Tissi: maggio.

— **ferruginea**, Lep. — Ne abbiamo rinvenuto soltanto un individuo presso Oristano: maggio.

— **pilipes**, Fab. — Diffusa per molte parti dell'isola: raccolta presso Cagliari: aprile.

— **senescens**, Lep. — Raccolta presso Pula, Siliqua, Domusnovas, Milis: aprile e maggio.

— **procera**, nob. ♀ — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso Siliqua: maggio.

Psithyrus campestris, Panz. — Raccolto presso Tempio: prima metà di giugno.

Bombus hortorum, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola: osservato dall'aprile in poi.

— **terrestris**, Lin. — Diffuso quanto il precedente.

Apis mellifica, Lin. — Ne abbiamo trovati individui neutri tipici nelle campagne di Oristano: maggio.

— **ligustica**, Spin.— Diffusa per tutta l'isola.

Specie indeterminate 35.

Tentredinidei

Cryptocampus distinctus, nob. — Raccolto presso Oschiri, nelle praterie: primi giorni di giugno.

Emphytus calceatus, Klug. — Rinvenuto in praterie presso San Lussurgio: prima metà di maggio.

Athalia spinarum, Fab. — Diffusa in tutta l'isola: trovata dall'aprile in poi.

— **rosae**, Lin. — Anche questa è specie diffusa per tutta l'isola, a cominciar dall'aprile, e forse anche dal marzo.

Blennocampa formosella, nob. — Raccolta nella valle Canonica presso Iglesias nei primi giorni di maggio.

Selandria stramineipes, Klug. — L'abbiam rinvenuta ne'prati di un castagneto presso San Lussurgio e sul monte Limbara: maggio e giugno.

Ametastegia fulvipes, nob. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto in prossimità del fiume di Porto Torres nella seconda metà di maggio.

Cefidei

Cephus nigripennis, Sich. — Raccolto presso S. Lussurgio nella prima metà di maggio: raro.

— **idolon**, Ross. — Non molto raro: raccolto presso San Lussurgio ed Oristano: maggio.

— **haemorrhoidalis**, Gm. — Raccolto presso S. Lussurgio; poco frequente: maggio.

— **pygmaeus**, Lin. — Diffuso in varie parti dell'isola: aprile, maggio.

— **quadriguttatus**, nob. — Ne abbiamo un individuo solo maschio rinvenuto nella valle de' mulini presso San Lussurgio: maggio.

— **tabidus**, Fab. — È una delle specie men rare: l'abbiamo raccolta presso Pula, Oristano, San Lussurgio: dalla metà di aprile a tutto maggio.

Cephus flavisternum, A. Cost. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso Oristano: maggio.

Cinipsidei

Quattro specie indeterminate.

Evaniidei

Foenus pedemontanus, Tourn. — Raccolto presso Porto Torres: maggio.

— **granulithorax**, A. Cost. — Rinvenuto nelle adiacenze di Tempio: prima metà di giugno.

Icneumonidei

Ichneumon nigritarius, Grav. v. *aethiops*, Grav. — Raccolto presso Cagliari (aprile) e Domusnovas (maggio).

— **saturatorius**, Lin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Decimoputzu: aprile.

— **extensorius**, Grav. — Trovato presso San Lussurgio: maggio.

— **luctatorius**, Wesm. v. *strumentarius*, Grav. — Raccolto presso Oristano e presso Sassari: maggio.

— **raptorius**, Lin. — Raccolto presso Cagliari (aprile) e Simaxis (maggio).

— **xanthorius**, Grav. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo presso S. Lussurgio: maggio.

— **violentus**, Grav. — Anche di questa abbiamo un individuo solo raccolto nelle campagne di Tempio: prima metà di giugno.

— **insignitus**, nob. — Ne possediamo due individui raccolti l'uno presso Cagliari in aprile, l'altro a Milis in maggio.

Amblyteles fasciatorius, Fab. — È la specie del genere meno rara: trovata a Cagliari (aprile), a S. Lussurgio (maggio).

— **natatorius**, Fab. — Raccolto presso Oristano e San Lussurgio: maggio.

Crypturus argiolus, Grav. — Trovato presso Porto Torres: maggio.

Cryptus haematorius, nob. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso Simaxis sopra gli ombrelli di Tapsia: maggio.

— **leucozonatus**, nob. — Anche di questo potemmo trovare un individuo solo nelle medesime condizioni del precedente.

— **viduatorius**, Grav. — Raccolto sulla montagna di Aggius: giugno.

Cryptus obscurus, Gm. — Trovato presso Iglesias e Domusnovas: primi giorni di maggio.

— **titillator**, Fab. — Diffuso per buona parte dell'isola: maggio.

— **nigripes**, Grav. — Rinvenuto presso Tissi e Oschiri: maggio e giugno.

— **migrator**, Grav. — Raccolto presso Tissi: maggio.

— **peregrinator**, Grav. — Raccolto col precedente.

Linoceras seductorius, Fab. — Diffuso per buona parte dell'isola: sebbene non comune: maggio e giugno.

Bassus albosignatus, Grav. — Raccolto nelle adiacenze di Sassari: maggio.

— **nitidiventris**, nob. — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto presso Osilo: maggio.

Ophion undulatus, Grav. — Rinvenuto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **luteus**, Lin. — Raccolto presso Iglesias: maggio.

— **merdarius**, Grav. — Trovato nelle campagne di Oristano: maggio.

Paniscus testaceus, Grav. — Più facile ad incontrarsi delle tre specie precedenti: Muravera (aprile), Oristano, S. Lussurgio (maggio).

— **lineolatus**, nob. — Ne abbiamo un individuo rinvenuto presso San Lussurgio: maggio.

Campoplex semiflavus, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Oristano: maggio.

Limneria notata, Grav. — Raccolta presso Osilo: maggio.

Agrypon tenuicorne, Grav. — Raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio: maggio.

Trachynotus foliator, Fab. — Specie diffusa per molte parti dell'isola: trovato più abbondante presso Oristano, Sassari e nell'Isola dell'Asinara in maggio.

Cremastus pleurovittatus, nob. — Ne abbiamo un individuo femmina raccolto presso Cagliari negli ultimi giorni di giugno.

Glypta mensurator, Grav. — Rinvenuta nella campagna di Siliqua: maggio.

Lissonota maculipennis, nob. — Ne abbiamo due individui femmine, trovati a Tissi intorno i fiori della Tapsia garganica: maggio.

— **maculatoria**, Fab. — Anche questa spe-

cie l'abbiam trovata su'fiori della Tapsia a Tissi: un solo individuo femmina.

Pimpla stercorator, Fab. — Raccolta nell'isola dell'Asinara: maggio.

— **arundinator**, Fab. — Ne abbiamo trovata una femmina a Tissi su'fiori di Tapsia.

— **roborator**, Fab. — Trovata a Simaxis e a Porto Torres: maggio.

Specie indeterminate 60.

Braconidei

Bracon terrefactor, Vill. — È la specie di Braconi che sembra più diffusa; raccolta presso Oristano e Simaxis in maggio, ed Oschiri in giugno: quasi sempre su'fiori della Tapsia garganica..

— **nominator**, Fab. — Specie piuttosto rara: rinvenuta soltanto presso Alghero: maggio.

— **appellator**, Nees. — Anche questa specie l'abbiamo trovata una volta sola, presso Tissi: maggio.

— **pectoralis**, Wesm. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto a Narba: aprile.

— **urinator**, Nees. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari (aprile) e di Sassari (maggio).

— **variator**, Nees. — Raccolto presso Pula e Decimoputzu: aprile.

— . . . ? — Rinvenuto nelle campagne di Oristano: maggio.

— . . . ? — Rinvenuto presso Silìqua: maggio.

Alejodes . . . ? — È la specie del genere più diffusa: raccolta a Pula, Muravera, Oristano, Terranova: aprile a giugno.

— **bicolor**, Sp. — Raccolto presso Oristano maggio.

— **tristis**, Wesm. var. *coxalis*, n. — Rinvenuto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **ciscumscriptus**, Nees. — Trovato sulla collina di Terranova: giugno.

Chelonus oculator, Fab. — Trovato in diversi luoghi: Pula, Muravera, Oristano: aprile e maggio [1]).

— **pellucens**, Nees. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso Terranova: fine di giugno.

Phanerotoma dentata, Panz. — Trovata a Decimoputzu: fine di aprile.

Microgaster emarginatus, Wesm. — Raccolto presso Oristano: maggio.

Agathis umbellatarum, Nees. — Diffuso in diversi luoghi (tipo e varietà): trovata a Iglesias, Oristano, Osilo, isola dell'Asinara: maggio.

— **malvacearum**, Latr. — Raccolta presso Silìqua e San Lussurgio: maggio.

— **rufipalpis**, Nees. — Rinvenuti tre individui femmine presso Sassari: maggio.

Opius carbonarius (Nees) Wesm. — Rinvenuto nelle adiacenze di S. Lussurgio: maggio.

— **thoracicus**, nob. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari: aprile.

Specie indeterminate 14.

Calcididei

Leucospis Spinolae? Westw. — Ne abbiamo un solo individuo maschio trovato presso Oliena: giugno.

Chalcis (*Sispes*) **biguttata**, Spin. — Specie rara: ne abbiam trovato un individuo solo a Tissi: maggio.

— **pectinicornis**, Latr. — Trovato in diversi luoghi: Simaxis, S. Lussurgio, Tissi, Alghero: maggio. I maschi sono molto meno frequenti delle femmine.

— **femorata**, Dalm. — Raccolta presso Alghero.

— **minuta**, Lin. — Frequente in diversi luoghi, da aprile in avanti.

Eupelmus albitarsi, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo a Tissi: maggio.

Perilampus italicus, Fab. — Raccolto nelle campagne di Sassari: maggio.

Torymus muscarum, Lin. — Raccolto a Monte Narba: seconda metà di aprile.

— **difficilis**, N. Es. — Ne abbiamo trovato un individuo solo nelle campagne di Cagliari: fine di giugno.

Eurytoma . . . . ? — Raccolto a Monte Narba in aprile e presso Sassari in maggio.

Cleonymus depressus, Fab. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari nella seconda metà di aprile.

Specie indeterminate 10.

Proctotrupidei

Specie indeterminate 4.

[1]) Tutti gl'individui appartengono alla varietà ad addome completamente nero.

Crisididei

Omalus auratus, Lin. — Raccolto a Orri in aprile, presso Sassari e Porto Torres in maggio.

— **punctulatus**, Dahlb. — Raccolto presso Oristano e San Lussurgio: maggio.

Holopyga gloriosa, Fab. (*ovata*, Dhlb.) — Diffusa in varie parti dell'isola: Oristano, Alghero, Porto Torres: maggio e giugno.

Hedychrum rutilans, Dahlb. — Raccolto nelle adiacenze di Alghero: maggio.

— ...? — Rinvenuto su'monti del Limbara: prima metà di giugno.

Chrysis incrassata, Klug. — Raccolta presso Siliqua e nell'Isola piana: maggio.

— **sulcata**, Dahlb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso San Lussurgio: maggio.

— **austriaca**, Fab. — Anche di questa Criside abbiamo trovato un individuo solo, presso Cagliari, negli ultimi giorni di giugno.

— **coeruleipes**, Fab. — Raccolta nelle vicinanze di Alghero: maggio.

— **igneoalternans**, nob. — Ne abbiamo due individui raccolti anche nelle adiacenze di Alghero.

Chrysis dichroa, Klug. — Rinvenuta a Tissi e nell'isola dell'Asinara, sopra i fiori della Tapsia: maggio.

— **Germari**, Dahlb. — Raccolta nelle adiacenze di Sassari: maggio.

— **Illigeri**, Wesm. (*bicolor*, Lep. *succincta*, Dahlb.) — Raccolta presso il capo di S. Elia negli ultimi giorni di giugno.

— **angulata**, Dahlb. — Specie non prima trovata in Italia; ne abbiamo rinvenuto tre individui, uno presso San Lussurgio in maggio, due nelle vicinanze di Tempio nella prima metà di giugno.

— **inaequalis**, Dahlb. — Ne abbiamo trovato un individuo solo nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **ignita**, Lin. — Trovata a San Lussurgio, Alghero ed Isola Piana: maggio.

— **cerastes**, Abeil. — Ne abbiamo un individuo solo trovato a Tissi: maggio.

— **pyrrhina**, Dahlb. — Raccolta a Tissi: maggio.

— **micans**, Ross. — Ne abbiamo raccolto un individuo in Alghero: maggio.

— **assimilis**, Spin. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Stilbum calens, Fab. — Trovato presso Cagliari negli ultimi giorni di giugno.

Specie indeterminate 2.

Emitteri

Il materiale raccolto in Emitteri non è stato in eguali proporzioni in cadauna delle due sezioni, nelle quali vanno naturalmente ripartiti. Per gli Eterotteri, sui quali abbiamo nella prima giovinezza fatti studii seguiti, abbiamo con maggior cura istituite le ricerche, non trascurando cosa alcuna, e parecchie sono state le specie interessanti, o nuove per l'Italia, come l'*Holcocranum saturejae* ed il *Rhiparochromus nitidicollis*, od anche nuove del tutto. Non possiamo dir lo stesso per gli Omotteri, dei quali, e soprattutto della famiglia degli Jassidei, molte cose sono andate trascurate, come avviene facilmente quando si è intenti a fare raccolta in tutti gli ordini. La cifra totale delle specie si presenta quindi meschina. Ciò non ostante, nel poco materiale riportato non sono mancate cose molto importanti, che ànno contribuito allo avanzamento nella conoscenza sia di specie, sia della geografia entomologica. Vi à ad esempio il *Delphacinus Putoni*, che conoscevasi soltanto di Africa. Talune verranno descritte come nuove, tra le quali una Cicala, di cui nel Museo di Torino abbiam veduto tra gl' insetti Sardi un individuo etichettato dallo stesso Genè *C. luctuosa*, che però non pubblicò. Dobbiamo pertanto dire che per siffatti Omotteri sia-

mo debitori di molti schiarimenti alla cortesia del distinto Emitterologo francese Puton, cui li abbiamo comunicati.

Pentatomidei

Odontoscelis fuliginosa, Lin. — Ne abbiamo trovato un individuo allo stato di ninfa presso Silìqua ne' primi giorni di maggio, ed altro presso Sassari in fine dello stesso mese.

Eurygaster maura, Lin. — Trovata nelle campagne di Iglesias: maggio.

Ancyrosoma albolineatum, Lin. — Trovato presso Oristano e nell'isola dell'Asinara: maggio.

Stiraspis sardoa, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti quattro individui sotto Nuoro: prima metà di giugno. Non ci è riuscito riconoscere su quale pianta vive.

Graphosoma semipunctata, Fab. — Trovata in diversi luoghi a cominciare dal maggio, sopra diverse ombrellifere.

— **lineata**, Lin. — Trovata nelle medesime condizioni della precedente.

Cydnus pilosus, H. Sch. — Ne abbiamo trovati varii individui erranti sulla via da Tissi a Sassari, in maggio: trovato pure, ma meno frequente, presso Oristano ed Alghero.

— **punctulatus**, A. Cost. — Diffuso per quasi tutta l'isola: trovato dalla metà di aprile a tutto giugno.

Brachypelta aterrima, Forst. — Trovata presso Cagliari in aprile, nell' Isola dell' Asinara in maggio.

Ochetostethus nanus, H. Sch. — Rinvenuto presso Silìqua: maggio.

Sciocoris macrocephalus, Fieb. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari: fine di giugno.

— **Helferi**, Fieb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Muravera: aprile.

Dyroderes marginatus, Fab. — Trovato presso San Lussurgio: maggio.

Aelia acuminata, Lin. — Trovata nelle adiacenze di Cagliari: giugno.

— **rostrata**, Boh. — Raccolta nelle vicinanze di Cagliari alla metà di aprile.

— **cognata**, Fieb. — Rinvenuta presso San Lussurgio: maggio.

Neottiglossa ....? — Raccolta presso Pula: seconda metà di aprile.

Eysarcoris perlatus, Fab. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari alla metà di aprile.

Peribalus distinctus, Fieb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Oristano: maggio.

— **albipes**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari nella seconda metà di aprile.

Carpocoris verbasci, Deg. (*baccarum*, Lin.) — Diffusa per quasi tutta l'isola: non però molto abbondante.

— **nigricornis**, Fab. — Anche questa specie trovasi diffusa per tutta l'isola.

— **lunula**, Fab. — Trovata nelle vicinanze di Oristano: maggio.

Nezara viridula, Lin. — Rinvenuta in varii luoghi: giugno.

— var. *torquata*, Fab. — Trovata a Tissi.

Strachia picta, H. Sch. — Raccolta nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **decorata**, H. Sch. — Trovata presso Cagliari: seconda metà di aprile.

Coreidei

Centrocarenus spiniger, Fab. — Diffuso per molte parti dell' isola: maggio e giugno.

Spathocera lobata, H. Sch. — Raccolta a Monte Narba: seconda metà di aprile.

Verlusia rhombea, Lin. — Trovata in diversi luoghi dalla metà di aprile in avanti.

— **sulcicornis**, Fab. — Anche questa specie l'abbiamo trovata in varii luoghi, ma non abbondante.

Gonocerus insidiator, Fab. — Rinvenuto nelle adiacenze di Aggius: giugno.

Ceraleptus gracilicornis, H. Sch. — Trovato nelle adiacenze di San Lussurgio: maggio.

Loxocnemis dentator, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo a Tissi: maggio.

Coreus pilicornis, Burm. — Trovato presso Iglesias ed Oristano: maggio.

Strobilotoma typhaecornis, Fab. — Diffuso in molte parti dell' isola, sebbene non mai in gran numero. Trovato in Iglesias, San Lussurgio: maggio.

Micrelytra fossularum, Ross. — Trovata in diversi luoghi, ma poco abbondante: maggio.

Camptopus lateralis, Germ. — Diffuso per tutta l'isola: dall'aprile in avanti.

Stenocephalus agilis, Scop. — Trovato nell'isola dell' Asinara: maggio.

Stenocephalus neglectus, H. Sch.—Trovato a Domusnovas ne' primi giorni di maggio.

Therapia hyosciami, Lin. — Diffusa per molte parti dell' isola: dall' aprile in avanti.

— var. *flavicans*, Put. — Raccolto in Iglesias e presso Nuoro.

Corizus crassicornis, Lin. — Diffuso per tutta l' isola: dalla metà di aprile in avanti.

— var. *Abutilon*, Ross. — Diffuso egualmente e più abbondante del tipo.

— ...? — Raccolto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **capitatus**, Fab. — Trovato in diversi luoghi: maggio e giugno.

— **rufus**, Schill. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari in giugno.

— **hyalinus**, Fab. — Rinvenuto a Tissi, maggio: poco frequente.

— **tigrinus**, Schill. — Raccolto in diversi luoghi, dalla metà di aprile in poi.

Maccevethus errans, Fall. — Trovato presso Decimoputzu sul finire di aprile.

Chorosoma Schillingii, Schum. — Trovato presso Macomer, in prati asciutti ed in sito distante da acque: giugno.

Beritidei

Neides aduncus, Fieb. [1]). — Raccolto nelle adiacenze di Oristano in maggio, e sui monti del Limbara in giugno.

Apoplymus pectoralis, Fieb. — Trovato in giugno nei luoghi stessi (Tempio) ne'quali lo trovammo nel settembre.

Ligeidei

Lygaeus equestris, Lin. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari, in aprile ed in fine di giugno.

— **bisbipunctatus**, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti tre individui nella valle del Galagone: seconda metà di giugno.

— **militaris**, Fab. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **saxatilis**, Scop. — Trovato presso San Lussurgio: maggio.

— **apuans**, Ross. — Raccolto nelle vicinanze di Oschiri: giugno.

— **gibbicollis**, A. Cost. — Trovato nell' isola Piana, tra il prato raso o sotto le pietre, non molto raro: maggio.

Lygæosoma reticulatum, H. Sch. — Trovato in varii luoghi, ma poco frequente: maggio e giugno.

Graptostethus pedestris, Stâl. — Diffuso per tutta l' isola: nella metà di aprile vi erano già individui completi, e pare ve ne siano in tutto l' anno.

Nysius senecionis, Schil. — Trovato nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Cymus claviculus, Fab. — Raccolto presso San Lussurgio: maggio.

— **melanocephalus**, Fieb. — Trovato presso il fiume di Porto Torres: maggio.

Cymodema tabidum, Spin. — Trovasi tra le piante palustri delle sponde di varii fiumi: raccolto a Tissi, Porto Torres e San Lussurgio: maggio.

Kleidocerus ....? — Trovato a San Lussurgio: maggio.

Ischnodemus Genei, Spin. — Raccolto nelle sponde del Rio Sixerri presso Silìqua, tra le canne.

Ophthalmicus siculus, Fieb. — Trovato nelle adiacenze di Alghero.

— **lineola**, Ramb. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari: fine di giugno.

— **Genei**, A. Cost. — I primi individui completi li abbiamo trovati verso la metà di maggio in Oristano: raccolto anche presso Terranova in giugno.

Holcocranum saturejae, Kol.—Specie non prima trovata in Italia. Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo sulle piante palustri della sponda del Rio Sixerri presso Silìqua.

Heterogaster urticae, Fab.—Diffuso per buona parte dell' isola: aprile e maggio.

Platyplax fuscatus, nob.—Rinvenuto nei prati naturali presso San Lussurgio: maggio.

Macropterna convexa, Fieb. — Ne abbiamo trovato qualche individuo in porto Corallo: aprile.

Microplax albofasciata, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Domusnovas in aprile, un altro nella valle del Galagone in giugno.

Brachyplax palliata, A. Cost. — Trovata nelle adiacenze di Decimoputzu in aprile, di Sassari in maggio.

Metopoplax ditomoides, A. Cost. — Trovato nelle adiacenze di Silìqua: primi giorni di maggio.

Oxycarenus lavaterae, Fab. — Trovato in abbondanza nelle adiacenze di Oristano: maggio.

[1]) Per equivoco nella memoria prima questa specie è indicata col nome di *Neides falcata*.

Oxycarenus hyalinipennis, A. Cost. — Col precedente, ed anche in qualche altro luogo.

— **pallens**, H. Sch. — Specie poco diffusa: ne abbiamo trovato un individuo presso Decimoputzu: fine di aprile.

— **insignis**, A. Cost. — Diffuso in molte parti dell'isola: trovato dalla metà di aprile a tutto giugno.

Plociomerus . . . . ? — Rinvenuto nelle vicinanze di Cagliari in giugno.

Plinthisus brevipennis, Latr. — Trovato nelle adiacenze di Oschiri: giugno.

Plinthisacanthus brunneus, nob. — Ne abbiamo un individuo trovato a Tissi: maggio.

Lamprodema maurum, Fieb. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari in fine di giugno.

Aoploscelis bivirgatus, A. Cost. — Ne abbiamo trovato un individuo a Pula ed un altro a Muravera: seconda metà di aprile.

Rhyparochromus nitidicollis, Put. — Specie trovatasi innanzi soltanto in Corsica, ove è pure assai rara: ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nell'isola dell' Asinara: maggio.

Peritrechus gracilicornis, Put. — Trovato a Pula in aprile ed a Tissi in maggio.

— **nubilus**, Fall. — Trovato presso Oristano: maggio.

— **meridionalis**, Put. — Non raro a Gibbas: seconda metà di aprile.

Trapezonotus Ullrichii, Fieb. — Trovato presso Siliqua ne'primi giorni di maggio, e presso Aggius in giugno.

Microtoma leucoderma, Fieb. — Ne abbiamo rinvenuti due soli individui a Monte Narba: seconda metà di aprile.

Pachymerus vulgaris, Schill. — Diffuso in diverse parti dell'isola.

— **tristis**, Fieb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo sulle montagne del Limbara: giugno.

— **saturnius**, Ross. — Trovato a Muravera e Monte Narba: seconda metà di aprile.

Beosus luscus, Fab. — Diffuso per molte parti dell'isola: dalla metà di aprile in poi.

Emblethis verbasci, Fab. — Trovato presso Oristano e San Lussurgio: maggio.

— var. *bullans*, Put. — Ne abbiamo trovato un individuo presso Iglesias: primi giorni di maggio.

Scolopostethus cognatus, Fieb. — Trovato abbondante a Campiomu nella seconda metà di aprile: qualche individuo ancora presso Sassari.

— **decoratus**, Hahn. — Raccolto a Pula: seconda metà di aprile.

Pyrrhocoris apterus, Lin. — Comune ovunque in ogni stagione.

— **aegyptius**, Lin. — In taluni luoghi più abbondante del precedente.

Tingitidei

Serenthia atricapilla, Spin. — Frequente presso le sponde de'fiumi o stagni: a Gibbas, Siliqua, Tissi ecc., dalla seconda metà di aprile in poi.

Dictyonota crassicornis, Fall. — Trovata presso i fiumi a Siliqua e Terranova: maggio e giugno: poco frequente.

Tingis pyri, Fab. — Diffusa per tutte quasi le contrade a pometi, danneggiando, come à costume, i peri.

Platychila cardui, Lin. — Trovata presso Iglesias ed Oristano: maggio.

— **auriculata**, A. Cost. — Rinvenuta presso Domusnovas: maggio.

Monanthia Wolffii, Fieb. — Trovata a Domusnovas, ad Iglesias, ecc.

— **lupuli**, Fieb. — Trovata presso Cagliari nella seconda metà di aprile, ad Iglesias in maggio.

Monosteira unicostata, Muls. — Abbondante sopra il Pioppo comune, sul *Vitex* ed altri alberi: maggio.

Capsidei

Megaloceraea longicornis, Fall. — Trovata nelle campagne di Sassari: maggio.

Pithanus Maerkelii, H. Sch. — Rinvenuto abbondante tra le piante palustri delle sponde del Rio Sixerri a Siliqua: ne'primi giorni di maggio.

Notostira erratica, Lin. — Trovata in diversi luoghi, nelle praterie: maggio e giugno.

Calocoris bimaculatus, Hoffm. — Abbondante presso Cagliari, Pula, Muravera, ecc. nella seconda metà di aprile.

— **sexpunctatus**, Fab. — Più abbondante del precedente, il tipo con tutte le diverse varietà, a Cagliari ed altri luoghi; per lo più sopra i Crisantemi.

— **trivialis**, A. Cost. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: seconda metà di aprile.

Calocoris vandalicus, Ross. — Trovato in varii luoghi, però non mai molto abbondante.

Miridius quadrivirgatus, A. Cost. — Specie poco diffusa: rinvenuta a Tissi: maggio.

Xenocoris venustus, Fieb. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari: seconda metà di aprile: in preferenza sopra i fiori di Crisantemo: non raro.

Tuponia hippophaes, Mey. (*tamaricis*, Fieb. n. Perr.) — Frequente sopra i Tamarici: in diversi luoghi.

Camptobrochis punctulata, Fall. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: aprile.

Capsus capillaris, Fab. — Trovato il tipo e diverse varietà presso Oristano in maggio, Ozieri in giugno.

Brachycoleus sexvittatus, Reut. — Trovato a M. Narba, nella seconda metà di aprile. Vive sopra le foglie della *Ferula nodiflora:* non raro, ma neppure molto abbondante.

Lopus mat, Ross. — Rinvenuto presso S. Lussurgio in maggio, e Tempio in giugno.

— **gothicus**, Lin. — Non raro presso Cagliari nella seconda metà di aprile, ed a San Lussurgio in maggio.

Lycus pabulinus, Lin. — Frequente presso Iglesias: primi giorni di maggio.

Poeciloscytus unifasciatus, Fab. — Abbondante in varii luoghi, dalla seconda metà di aprile.

Orthops Kalmii, Lin. — Col precedente, ma meno abbondante.

Heterotoma meriopterus, Scop. — Trovata ne' dintorni di Sassari: maggio.

Heterocordylus mutabilis, Hahn. — Raccolto presso Aggius: giugno.

— **unicolor**, Hahn. — Non raro nelle vicinanze di Oschiri: giugno.

Pachytoma minor, A. Cost. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: seconda metà di aprile.

Auchenocrepis Foreli, Muls. — Abbondante sopra i Tamarici, presso Cabras, Alghero, Oschiri, ecc.: maggio, giugno.

Pachyxyphus coroniceps, A. Cost. — Abbondante presso Cagliari, Siliqua, Aggius; dalla seconda metà di aprile.

Camaronotus clavatus, Lin. — Rinvenuto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Specie indeterminate 5.

Antocoridei

Anthocoris nemoralis, Fab. — Trovato a M. Narba: seconda metà di aprile.

Triphleps minutus, Lin. — Diffuso per molti luoghi, fino sulle alture del Limbara: dalla metà di aprile.

1 specie indefinita.

Saldidei

Salda pallipes, Fab. — Assai frequente presso gli stagni di Cagliari, di Gibbas ed altri: già adulta alla metà di aprile.

— **geminata**, A. Cost. — Trovata sulle sponde del rivolo della valle de'mulini presso S. Lussurgio: maggio: poco frequente.

Reduviidei

Emesodema domestica, Scop. — Incontrasi eventualmente nell'abitato: trovata a Sassari.

Ctenocnemis femoratus, A. Cost. — Trovato in diversi luoghi presso le radici delle piante palustri, ma adulto soltanto dal maggio.

Oncocephalus notatus, Klug. — Trovato in diversi luoghi sotto le pietre o tra radici di piante palustri: Gibbas, Domusnovas, Simaxis e Monti del Limbara. È già adulto nella seconda metà di aprile. Ovunque poco abbondante.

— **squalidus**, Ross. — Ne abbiamo un individuo entrato a volo nella stanza da pranzo, di sera, in Oristano: maggio.

Pirates stridulus, Fab. — Trovato a Orri, Gibbas e su' monti del Limbara: già adulto a metà di aprile.

Coranus aegyptius, Fab. — Trovato a Porto Torres, Oschiri e Terranova: maggio e giugno.

Reduvius personatus, Lin. — Sul Limbara, un individuo entrato di sera nella stanza.

Harpactor haemorrhoidalis, Fab. — Trovato in diversi luoghi: maggio e giugno.

— **argenteolineatus**, A. Cost. — Rinvenuto a Gibbas in fine di aprile; due individui adulti ed altri allo stato di larve o ninfe.

Prostemma guttula, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo di forma brachittera su' monti del Limbara: giugno.

— **sanguineum**, Ross. — Anche di questa specie abbiamo trovato un individuo solo sul Limbara.

Nabis major, A. Cost. — Ne abbiamo trovato un individuo presso Cagliari : fine di giugno.

— **ferus**, Lin. — Trovato nelle adiacenze di Oristano : maggio.

— **rugosus**, Lin. — Trovato piuttosto abbondante presso San Lussurgio, ne' prati: maggio.

— **viridulus**, Spin. — Specie immancabile sopra i Tamarici: già adulto alla fine di aprile.

Idrometridei

Hydrometra stagnorum, Lin. — Non rara in diversi luoghi.

Velia major, Put. — Trovasi nelle vasche nelle adiacenze di Cagliari: seconda metà di aprile.

Gerris Costae, H. Sch. — Molto abbondante sulle acque fluenti ed anche stagnanti presso Pula: già adulta alla metà di aprile.

— **lacustris**, Lin. — Nelle acque delle vicinanze di Cagliari.

— **najas**, Deg. — Abbondante sulle acque fluenti di molte parti dell'isola.

— **argentata**, Schum. — Trovata soltanto nel Rio Coghinas presso la cappella di S. Rocco: maggio: molto rara.

Naucoridei

Naucoris maculatus, Fab. — Trovato in quasi tutti i corsi d'acqua: alla fine di aprile trovansi già individui adulti.

Nepidei

Nepa cinerea, Lin. — Vedi il già detto nella memoria prima.

Ranatra linearis, Lin. — Specie poco frequente.

Notonectidei

Ploa minutissima, Fab. — Diffusa nelle acque di quasi tutta l'isola.

Anisops producta, Fieb. — Trovata nelle acque di Pula: a metà di aprile individui completi.

Notonecta glauca, Lin. var. *marmorata*, Fab. — Trovata in diversi corsi d'acqua.

Corisidei

Corisa atomaria, Ill. — Abbondante ne' piccoli pantani presso Muravera : seconda metà di aprile.

— **lugubris**, Fieb. — Trovata ne' pantani di Pula, Orri, Monte Narba: spesso in acque assai putride.

Corisa scripta, Ramb. — Trovata a Pula e Decimoputzu in acque meno viziate.

— **Fabricii**, Fieb. — Rinvenuta nelle acque della Valle de' mulini presso San Lussurgio.

Sigara meridionalis, A. Cost. — Trovata in diversi luoghi.

Cicadidei

Tibicina cisticola, Gen. — Abbondantissima nelle colline a Cisti presso Terranova : giugno.

— **luctuosa**, nob. — Sembra circoscritta alle contrade meno calde: trovata presso Tempio, Aggius e sul Limbara: poco abbondante : giugno.

Fulgoridei

Tettigometra impresso-punctata, L. Duf. — Vedi la memoria prima.

— **virescens**, Pnz. — Trovata sul Monte Limbara : giugno.

— **impressifrons**, Mls. R. — Diffusa per molte parti dell'isola: da aprile in poi.

Haplacha seticolusa, Leth. — Abbondante presso Cabras sopra i Tamarici: maggio.

Trirhacus formosissimus, nob. — Rinvenuto soltanto a Monte Narba ne' prati in fine di aprile : non rarissimo.

Cixius nervosus, Lin. — Trovato in diversi luoghi : maggio.

Almana hemiptera, O. Cost. — Ne abbiamo trovato un individuo non ancora adulto in giugno presso Terranova.

Dictyophara europaea, Lin. — Trovata in diversi luoghi : giugno.

Hysteropterum apterum, Lin. — Diffuso per varie parti dell'isola: raccolto a Cagliari, Iglesias, dalla metà di aprile.

— **fuscovenosum**, Fieb. — Raccolto sul M. Limbara e presso Oliena : giugno.

— **bilobum**, Fieb. — Raccolto presso Macomer e S. Rocco.

Asiraca clavicornis, Fab. — Trovata a San Lussurgio ed a Sassari: maggio.

Araeopus pulchellus, Curt. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo presso Cagliari negli ultimi giorni di giugno.

Delphacinus Putoni, Scot. — Specie non trovata innanzi in europa, ma soltanto in Algeria. L'abbiamo raccolta in vicinanza dello stagno di Pilo in maggio e pres-

so Cagliari negli ultimi giorni di giugno: non rara.

Delphax tapina, Fieb. — Rinvenuta nelle adiacenze di Siliqua: rara.

Stiroma pteridis, Gen.— Abbondante su'monti del Limbara: prima metà di maggio.

Cercopidei

Ptyelus lineatus, Lin. — Trovato presso Domusnovas (maggio) e Tempio (giugno).

Specie indeterminate 2.

Jassidei

Idiocerus lituratus, Fall. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: giugno.

Bythoscopus alni, Schk. — Trovato nelle adiacenze di S. Lussurgio: maggio: non raro.

Acocephalus assimilis, Fieb.— Raccolto presso Sassari in maggio ed Aggius in giugno: piuttosto raro.

— **carinatus**, Stal. — Specie conosciuta di Sicilia: trovata a Siliqua, Oschiri, Aggius: maggio e giugno.

Selenocephalus obsoletus, Germ. — Rinvenuto presso Tempio, Aggius e Terranova: giugno.

Eupelix producta, Germ. — Raccolta presso Sassari; maggio.

Thamnotettix paryphanta, Fieb. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari nella seconda metà di aprile: abbondante.

— **fenestrata**, H. S. — Raccolta presso Iglesias: maggio.

Athysanus simplex, H. S. — Non raro presso Cagliari ed altrove, dalla seconda metà di aprile in poi.

— **variegatus**, Kirb. — Raccolto nelle adiacenze di Muravera: fine di aprile.

— **plebeius**, Zett. — Raccolto presso Oristano: maggio.

— **stactogalus**, Am. — Trovasi quasi costantemente sopra i Tamarici.

Deltocephalus striatus, Lin. — Raccolto a Pula e Decimoputzu: seconda metà di aprile.

Psillidei

Livia juncorum, Latr. — Trovata presso la sponda del fiume a Tissi: maggio.

Psylla oleae, Fonsc. — Trovata sull'olivo selvatico a S. Rocco: giugno.

Specie indeterminate 4

Tisanotteri

Phloeothrips bigemmata, nob. — Raccolta in varie parti: maggio e giugno.

Thrips croceicollis, nob. — Specie piuttosto rara: trovata presso Oschiri e Tissi: maggio.

Specie indeterminata 1.

Lepidotteri

Nella nostra prima memoria abbiamo avvertito che in fatto di Lepidotteri Diurni la Sardegna offriva un numero di specie assai limitato. Nella peregrinazione primaverile molte specie abbiamo aggiunte alle poche trovate in settembre, ma anche queste modificano di poco il nostro primitivo concetto. Per pronunciare un giudizio più esatto manca tuttavia un elemento di molta importanza, le ricerche sul Gennargento nella stagione estiva, per vedere se in quelle elevate regioni trovasi qualcuna di quelle specie, sopratutto del genere *Eremophila*, che nel continente trovansi ad altezze eguali sebbene in luoghi più settentrionali. La qual cosa non avendo potuto eseguire nello scorso anno per la ragione già addotta, ci proponiamo fare in questo volgente. Tre possono dirsi le specialità della Sardegna relativamente al continente, tutte tre del grande genere *Satyrus*: il *Neomiris*, che è una modifica del *Semele*; il *Tigelius*, considerato come varietà del comunissimo *megaera* e che noi riteniamo come una modificazione locale che si è so-

stituita al tipo il quale non vi si trova; ed il *Nurag*. Noteremo poi qual fatto negativo lo aver constatato anche noi la inesistenza di qualunque rappresentante del genere *Melitaea*.

Pe' Lepidotteri Crepuscolari offre pure la Sardegna qualche fatto singolare. E tale è da ritenersi quello del genere *Zygaena*, il quale mentre nel continente, come quasi ovunque, è rappresentato da un certo numero di specie, talune delle quali comunissime, in tutta la Sardegna non ve n' ha che una sola, la *corsica*, che manca nel continente.

In quanto a' Lepidotteri notturni è molto scarso il materiale raccolto. Per le Nottue vi abbisogna la stabile dimora sopra luogo, la ricerca delle larve, il loro allevamento. Sicchè pel viaggiatore sarà sempre difficile far buona caccia di siffatti lepidotteri. Nei micro-lepidotteri nondimeno varie specie teniamo che ci sembrano molto importanti e che non solo non abbiam potuto determinare con le numerose opere che abbiamo a nostra disposizione, ma non abbiamo neppure trovate nella bella collezione di Lepidotteri de' Signori Turati di Milano, che abbiamo espressamente consultata nello scorso settembre. Per tanto non osiamo ancora pubblicarle come nuove attesa la grande difficoltà di pronunciare un giudizio.

Papilionidei

Papilio podalirius, Lin.
— **machaon**, Lin.

Pieridei

Aporia crataegi, Lin.
Pieris brassicae, Lin.
— **rapae**, Lin.
Colias edusa, Fab.
Rhodocera cleopatra, Lin. — Diffusa e frequente assai più di quel che l'abbiam veduta nelle provincie napolitane.
Polyommatus phloeas, Lin.
Lycaena icarus, Rott.
— **argiolus**, Lin.

Apaturidei

Charaxes jasius, Lin. — Osservato frequente nel bosco della montagna di Nuragu: giugno.

Ninfalidei

Vanessa polychloros, Lin.
— **urticae**, Lin. — Raccolto sulle colline di San Lussurgio (maggio) ed alle falde del M. Limbara (giugno).
— **Io**, Lin. — Osservata in più luoghi: ma molto rara.
— **atalanta**, Lin.
— **cardui**, Lin.
— **C-album**, Lin. — Diffusa per quasi tutta l'isola, ma poco frequente.
Argynnis lathonia, Lin. — Osservata in più luoghi, ma poco comune.

Satiridei

Melanargia galathea, Lin.
Satyrus neomiris, God. — Trovato frequente sulle colline di Terranova: giugno.
Pararge megaera, Lin. var. *Tigelius*, Bon. — Trovato abbondantissimo sulla montagna di Nuragu, sul M. Limbara e sulle colline di Terranova: giugno.
— **aegeria**, Lin.
— **Ianira**, Lin. — Diffuso per molte parti dell'isola, in pianure ed in montagne.
— **Nurag**, Ghil. — Raccolto in abbondanza sulla montagna di Nuragu e presso Terranova: giugno.
— **Ida**, Esp. — Abbondantissimo presso Terranova, Nuoro.
Coenonympha corinna, Hubn. — Trovato molto abbondante nella valle del Galagone; anche in altri luoghi, tra'quali i monti del Limbara.

Esperidei

Spilothyrus alceae, Esp. — Diffuso per tutta l'isola.
Syrichthus alveus, Hubn. — Come il precedente.
— ....? — Raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio: maggio.

Sfingidei

Acherontia atropos, Lin.

Deilephila Dahlii, H. G. — Ne abbiamo raccolto un individuo presso Silìqua ne' primi giorni di maggio.

Macroglossa stellatarum, Lin.

Sesiidei

Trochilium apiforme, Lin. — Osservato presso Oristano: maggio.

Sesia myopaeformis, Bkh. — Raccolta su' fiori di Tapsia a Canèga presso Sassari: maggio.

— **uroceriformis**, Tr. — Trovata nelle vicinanze di Oliena: giugno.

— **chrysidiformis**, Esp. — È la specie di Sesie più diffusa.

Specie indeterminata 1.

Zigenidei

Zygaena corsica, Boisd. — Abbondante in quasi tutta l'isola e nelle piccole isole dell'Asinara e Piana: maggio.

Litosiidei

Lithosia complana, Lin. — Rinvenuta nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Arctiidei

Deiopeia pulchella, Lin.

Euchelia jacobaeae, Lin. — Abbondante in varii luoghi: dalla metà di aprile.

Nottue

Agrotis pronuba, Lin. — Trovata presso Iglesias ne' primi giorni di maggio.

— **orbona**, Hufn. — Raccolta a Decimoputzu nella fine di aprile.

Chloantha hyperici, Fab. — Raccolta nel Cagliaritano, luogo detto piano di mezzo: seconda metà di aprile.

Leucania pallens, Lin. — Rinvenuta nell'isola dell'Asinara: maggio.

Plusia gamma, Lin.

Heliothis peltigera, Schiff.

Acontia luctuosa, Esp. — Frequente presso Silìqua, Tissi, Oristano, ecc.

Thalpochares helychrysi, Ramb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo alle falde del Limbara: prima metà di giugno.

— ...? — Raccolta nelle adiacenze di Tempio: piuttosto rara.

Metoptria monogramma, Hubn. — Trovata abbondante presso l'Anfiteatro di Cagliari negli ultimi giorni di aprile.

Specie indeterminate 5.

Geometre

Geometra vernaria, Hubn. — Raccolta in un bosco presso Tempio: giugno.

Acidalia ochrata, Scop. (*ochrearia*, Hbn.) — Abbondantissima in tutti i luoghi percorsi dalla metà di maggio in poi.

— **imitaria**, Hubn. — Adiacenze di Tempio: giugno.

Timandra amataria, Lin.

Zonosoma poraria, Fab. — Trovata presso Terranova: giugno.

Rumia crataegata, Lin. — Ne abbiamo rinvenuti due individui, uno nella valle de' mulini presso San Lussurgio (maggio), l'altro in un bosco di Elci vicino Tempio (giugno).

Gnophos mucidaria, Hbn. — Raccolta presso San Lussurgio: maggio.

Cidaria bistrigata, Tr. — Abbondantissima nei boschi di Elci presso Tempio in giugno: trovata ancora presso Ozieri ed in varii altri luoghi.

— **polygrammata**, Bkh. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari: seconda metà di aprile.

— **rivaria**, Hubn. — Raccolta presso San Lussurgio: maggio.

Eupithecia venosata, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo entrato di sera in stanza a Orri: seconda metà di aprile.

Specie indeterminate 5.

Piralidi

Aporodes floralis, Hbn. — Trovata abbondante in varii luoghi, dalla metà di aprile a tutto giugno.

Botys punicealis, Hubn. — Raccolta nel Cagliaritano: aprile.

— **pandalis**, Hubn. — Trovata presso Porto Torres: maggio.

Eurycreon palealis, Schif. — Rinvenuta presso Porto Torres, in vicinanza del fiume: maggio.

Nomophila noctuella, Schif. — Comune ovunque ed in ogni stagione.

Hydrocampa potamogalis, Hbn. — Trovata presso le sponde del fiume a Porto Torres: maggio.

Paraponyx stratiotata, Lin. — Abbondante presso le sponde del Rio Sixerri a Silìqua: primi giorni di maggio.

Crambus contaminellus, Hubn. — Raccolto nelle adiacenze di Porto Torres: maggio.

— **craterellus**, Scop. — Molto abbondante presso Tempio: giugno.

Myelois cribrella, Hubn. — Abbondante presso la città di Sassari: maggio.

Homoeosoma nimbella, Z. — Raccolta nell'isola dell' Asinara.

Specie indeterminate 12.

Tortrici

Tortrix xylosteana, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **pronubana**, Hubn. — Trovata sulla montagna di Nuragu presso Ozieri: primi giorni di giugno.

— **grotiana**, Fab. — Rinvenuta presso Decimoputzu: fine di aprile.

— **flavana**, Dup. — Raccolta sulla collina di Santa Barbara nel Cagliaritano: fine di aprile.

— **Loeflingiana**, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Ozieri: primi giorni di giugno.

Olindia ulmana, Hubn. — Trovata sulla montagna di Aggius: giugno.

Eudemis gueneana, Dup. — Specie trovata primamente in Sicilia: l'abbiam raccolta nelle adiacenze di Cagliari, ove non era rara, nella seconda metà di aprile, ed anche a Decimoputzu.

Grapholitha hoenwartiana, Tr. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo presso San Lussurgio: maggio.

— **citrana**, Hub. — Raccolta nelle vicinanze di Tempio fin assai presso la città, essendo piuttosto abbondante: prima metà di giugno.

Grapholitha dorsana, Fab. — Trovata presso Iglesias: primi giorni di maggio.

Specie indeterminate 8.

Tignuole

Choreutis pretiosana, Dup. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nell'isola dell'Asinara ed un altro nell' isola Piana: maggio.

Simaethis nemorana, Hbn. — Trovata in varii luoghi: maggio.

— **oxyacanthella**, Lin. — Diffusa come la precedente e più frequente.

Adela paludicolella, Z. — Raccolta sulla collina di Santa Barbara: fine di aprile.

— **cuprella**, S. V. — Rinvenuta nelle adiacenze di Siliqua: principio di maggio.

Depressaria costosa, Hw. — Raccolta nelle vicinanze di Tempio: giugno.

Rhinosia flavella, Dup. — Raccolta a Tissi: maggio.

Nothris verbascella, Hb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Coleophora fabriciella, Vill. — Raccolta a Pula e Orri nella seconda metà di aprile; a Tempio in giugno.

Specie indeterminate 20.

Pterofori

Oxyptilius laetus, Zett. (*laetidactylus*, Brd.) Rinvenuto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Aciptilia pentadactyla, Lin. — Trovata presso Porto Torres: maggio.

Specie indeterminate 2.

Ditteri

L'ordine del quale si hanno minori conoscenze relative alla Fauna Sarda l'è questo de' Ditteri. Il Genè pare se ne sia poco o nulla occupato: chè, mentre per parecchi altri degli ordini di cui non costituiva oggetto di studi suoi particolari si sono avute notizie per le comunicazioni da lui fatte a'cultori specialisti, per Ditteri nulla si è avuto. Il Rondani pare non avesse mai avuto materiali dalla Sardegna. In quelle parti della Ditterologia Italiana pubblicate cita quasi ogni regione del continente, spesso ancor la Sicilia, non mai la Sardegna. E nella di lui Collezione ditterologica ora esistente nel Museo di Storia Naturale di Firenze che, grazie alla cortesia del chiaro amico prof. Targioni, ho potuto nello scorso settembre consultare, non esistono Ditteri di quella provvenienza. Per la qual cosa il materiale da noi raccolto può dirsi il punto di partenza per la conoscenza della Fauna Ditterologica Sarda. Per la determinazione delle specie abbiamo adoperata

tutta la cura possibile. Per qualcuna abbiamo pure consultato il distinto ditterologo francese Bigot. Una scarsezza si avverte nella estesissima famiglia de' Muscidei. Per la ragione addotta in proposito degli Emitteri Omotteri, molte specie sono andate trascurate; ed anche di quelle raccolte, molte ne rimangono indeterminate. Ma se i nostri proponimenti non verranno ostacolati, ci auguriamo in seguito a novelle perlustrazioni ed a più speciale studio, poter rendere questa lacuna meno profonda.

Straziomidei

Nemotelus uliginosus, Lin. — Abbondantissimo nelle vicinanze di Cagliari nella metà di aprile: trovato pure a Decimoputzu ed in qualche altro luogo, ma molto meno abbondante.

— **pullus**, Loew. — Rinvenuto in vicinanza dello Stagno di Pilo e presso San Lussurgio, in maggio: poco abbondante.

Oxycera pulchella, Meig. — Rinvenuta nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Stratiomys chamaeleon, Deg. — Trovata frequente a Simaxis sopra gli ombrelli della *Thapsia garganica;* qualche individuo ancora a Fordongianus: maggio.

— **longicornis**, Scop. — Anche questa specie era frequente a Simaxis sopra gli ombrelli delle Tapsie: ne abbiamo ancora trovato qualche individuo nell'isola dell'Asinara.

Odontomya ornata, Meig. — Rinvenuta a Fordongianus in vicinanza del fiume: maggio: poco frequente.

Chrysomya formosa, Scop. — Abbondantissima a Cagliari nella metà di aprile fin presso le mura della città.

Tabanidei

Tabanus ater, Ross. — Trovato a Pula nella seconda metà di aprile; molto abbondante nella valle de' mulini presso San Lussurgio in maggio, ed in altri luoghi.

— **bromius**, Lin. — Trovato in varii luoghi: maggio.

Chrysops italicus, Mgn. — Raccolto presso Decimoputzu nella seconda metà di aprile.

Pangonia maculata, Ross. — Trovata sulla montagna di Aggius: giugno.

Bombiliidei

Anthrax fenestrata, Fab. — Trovata in varii luoghi in maggio e giugno.

— **maura**, Lin. — Specie poco diffusa: rinvenuta sul monte Limbara: giugno.

Anthrax morio, Lin. — Trovata non rara nelle campagne di Oristano: maggio.

— **fimbriata**, Meig. (*afra*, Fab.) — Diffusa per buona parte dell' isola: maggio e giugno.

— **hottentotta**, Lin. — Non rara in varii luoghi.

Argyromoeba tripunctata, Wied. — Trovata presso Milis in maggio, e sul monte Limbara in giugno.

— **sinuata**, Fall. — Rinvenuta presso Oristano: maggio: poco frequente.

— **albotaeniata** (*Coll. Rond.*) — Ne abbiamo una trovata presso Ozieri nei primi giorni di giugno.

Exoprosopa vespertilio, Wied. — Ne abbiamo raccolti due individui presso il Capo S. Elia negli ultimi giorni di giugno: osservata ancora vicino Orgosolo.

— **Germari**, Wiedm. — Trovata nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **pandora**, Fab. — Diffusa per tutta l' isola: maggio e giugno.

Chalcochiton holosericeus, Fab. — Trovasi in quasi tutta l'isola, però ovunque poco abbondante. Abbiamo cominciato a trovarla nella seconda metà di aprile.

Bombylius medius, Lin. — Sparso per quasi tutta l' isola, dalla metà di aprile (probabilmente apparisce anche prima).

— **major**, Lin. — Trovato in diversi luoghi, ma oltremodo abbondante nelle vicinanze di San Lussurgio: maggio.

— **minor**, Lin. — Anche questa specie è sparsa per tutta l'isola: dalla metà di aprile.

Cyllenia maculata, Latr. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nel campo a Tapsie presso Tissi: maggio.

Phthiria ... ? — Raccolta presso Molentargius in fine di giugno.

Usia taeniolata, nob. — Ne abbiamo tre individui raccolti due a Decimoputzu in fine di aprile ed uno presso Cabras in maggio.

Specie indeterminate 6

*

Empidei

Hybos culiciformis, Fab. — Trovato nelle adiacenze di Nuoro, ma poco frequente.

Empis tessellata, Fab. — Diffusa in varie parti dell'isola: fine di aprile e maggio.

— **vitripennis**, Mgn. — Anche questa è diffusa per molte parti dell'isola: aprile e maggio.

—...? (aff. alla *decora*) — Raccolta a Orri, Iglesias e S. Lussurgio: aprile e maggio.

— **lutea**, Mgn. — Trovata nel castagneto di S. Lussurgio: maggio.

— **pennipes**, Lin. — Trovata ne' dintorni di Cagliari: seconda metà di aprile.

Tachydromya arrogans, Lin. — Non rara in vicinanza delle acque in varii luoghi: aprile e maggio.

Specie indeterminate 6.

Asilidei

Dioctria atricapilla, Meg. — Frequente nelle campagne di Cagliari, alla metà di aprile: trovata pure a Sassari in maggio.

— **concinna**, nob. — Con la precedente, presso Cagliari, non molto frequente: trovata pure a San Lussurgio e sui monti del Limbara.

Saropogon axillaris, Loew. — Diffuso per buona parte dell' isola, comprese le montagne del Limbara: abbiamo cominciato a trovarlo nella prima metà di maggio.

Holopogon venustus, Ross. — Rinvenuto soltanto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

Pycnopogon fasciculatus, Loew. — Trovato abbondante sulle montagne del Limbara, l. d. *Agnata* in un orto: giugno.

Laphria maroccana, Fab. — Ne abbiamo osservato un individuo in un bosco di Elci presso Orgosolo: giugno.

Asilus barbarus, Fab. — Trovato presso Terranova nella seconda metà di giugno.

— **siculus**, Macq. — Specie poco frequente: ne abbiamo trovato qualche individuo a Decimoputzu, Oristano e Tempio: maggio e giugno.

Specie indeterminate 4.

Terevidei

Thereva bipunctata, Mgn. — Trovata a Decimoputzu e Orri nella seconda metà di aprile, presso Sassari in maggio.

—...? (affine alla precedente) — Trovata presso Cagliari nella metà di aprile, a Sassari in maggio.

Thereva phaeoptera, Loew. — Diffusa per molte parti dell'isola, sebbene non comune: raccolta in Alghero, Tissi, Oschiri e nell'isola dell'Asinara: maggio e giugno.

— **bicinctella**, nob. — Trovata frequente nella valle di Logulentu poggiantesi sulla via alla maniera di certi Assilli ed Antraci; qualche individuo ancora presso Fordongianus: maggio.

Leptidei

Leptis scolopacea, Lin. — Trovata in diversi luoghi: collina di S.ª Barbara nella seconda metà di aprile, Iglesias e San Lussurgio in maggio.

Chrysopila nubecula, Fall. — Raccolta nella valle de' mulini presso San Lussurgio: maggio: poco frequente.

— **nigrita**, Fab. — Trovata presso Silìqua e San Lussurgio: maggio.

— **atrata**, Fab. — Raccolta presso San Lussurgio: maggio.

1 specie indeterminata.

Dolicopidei

Psilopus ...? — Ne abbiamo un individuo maschio rinvenuto a Orri: fine di aprile.

Medeterus regius, Fab. — Raccolto presso Sassari ed Oliena: maggio e giugno.

Dolichopus ciliifemoratus, Macq. — Trovato nelle adiacenze di Oristano: maggio.

Specie indeterminate 3.

Loncopteridei

Lonchoptera lutea, Pnz. — Raccolta presso Oristano: maggio.

Pipunculidei

Pipunculus campestris, Latr. — Sparso per buona parte dell'isola: trovato dall' aprile al giugno.

Sirfidei

Chrysotoxum cisalpinum, Rond. — Raccolto a Sassari, Aggius, Nuoro, sul Limbara: maggio e giugno.

— **intermedium**, Mgn. — Diffuso anche questo in molte parti dell' isola: trovato più frequente presso San Lussurgio ed Alghero: maggio.

— **bicinctum**, Lin. — Trovato soltanto in un

bosco di Elci presso Tempio: prima metà di giugno.

Paragus bicolor, Fab. — Raccolto presso Tissi: maggio.

— **lacerus**, Loew. — Ne abbiamo un individuo rinvenuto presso San Lussurgio: maggio.

— **tibialis**, Fall. — Trovato sulla montagna di Aggius: prima metà di giugno.

— **albifrons**, Fall. — È la specie del genere più diffusa: l'abbiam raccolta a San Lussurgio, Tempio e Nuoro: maggio e giugno.

Chrysogaster coemeteriorum, Lin. — Non raro presso San Lussurgio sopra fiori di Ombrellifere: maggio.

— **splendens**, Mgn. — Raccolto sulla montagna di Aggius: giugno.

Orthoneura nobilis, Fall. — Abbondante a Simaxis sopra i fiori delle Tapsie: maggio.

Melanostoma mellina, Lin. — Osservata in molte parti dell'isola dalla metà di aprile in poi.

Syrphus pyrastri, Lin. — Trovato in molti luoghi, piani e montuosi, in maggio e giugno.

— **corollae**, Fab. — Specie poco diffusa: l'abbiam raccolta presso San Lussurgio: maggio.

— **ribesii**, Lin. — Raccolto nell'isola dell'Asinara: maggio.

— **balteatus**, Deg. — Comune in tutta l'isola e quasi in ogni stagione.

Melithreptus scriptus, Lin. — Diffuso per quasi tutta l'isola: dall'aprile in poi.

Xanthogramma ornata, Meig. — Specie poco diffusa: trovata soltanto presso Domusnovas in aprile.

Volucella inanis, Lin. — Osservata in diverse parti dell'isola: maggio e giugno.

Eristalis aeneus, Scop. — Trovato molto abbondante nelle vicinanze di Cagliari nella seconda metà di aprile.

— **tenax**, Lin. — Comune in tutta l'isola ed in ogni stagione.

— **arbustorum**, Lin. — Trovato in diversi luoghi; dalla metà di aprile in poi.

— **taeniops**, Wied. (*pulchriceps*, Meig.) — Raccolto nelle campagne di Sassari: maggio.

Helophilus floreus, Lin. — Diffuso per molte parti dell'isola.

Merodon clavipes, Fab. — Trovato presso Cagliari alla metà di aprile, a Tempio in giugno, ma più che altrove assai abbondante presso San Lussurgio in maggio: su' fiori di ombrellifere.

Merodon avidus, Ross. (*rufitibius*, Rond.) — Raccolto sul monte Limbara: giugno: poco frequente.

— **varius**, Rond. — Anche questa specie è poco frequente; l'abbiamo trovata ancora sul monte Limbara.

Syritta pipiens, Lin. — Comune ovunque ed ogni stagione.

Eumerus barbarus, Coqu. — Trovato abbondante a Tissi in maggio: qualche individuo ancora a Cagliari nella metà di aprile.

— **Truquii**, Rond. — Raccolto a Simaxis su' fiori di Tapsie: maggio.

— **lunulatus**, Mgn. — Diffuso in molte parti dell'isola, dalla metà di aprile.

— **lasiops**, Rond. — Trovato nelle adiacenze di Pula: seconda metà di aprile.

— **leiops**, Rond. — Trovato nelle adiacenze di Pula: seconda metà di aprile.

— **angusticornis**, Rond. — Raccolto a Tissi in maggio: poco frequente.

Ceria vespiformis, Latr. [1]) — Non rara presso Oristano e Tissi: maggio.

Specie indeterminate 5.

Conopidei

Physocephala vittata, Fab. — Trovata presso Siliqua ed Oristano: maggio.

Zodion cinereum, Fab. — Diffuso per quasi tutta l'isola: aprile, maggio e giugno.

Occemya funerula, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nella montagna di Aggius: giugno.

Dalmannia flavescens, Mgn. — Ne abbiamo trovato un individuo solo presso Cagliari nella seconda metà di aprile.

Estridei

Oestrus equi, Lin. — Abbiamo anche nella primavera trovato, come nel settembre, qualche individuo vagante nella campagna.

Muscidei

Phasia analis, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Sassari: maggio.

— .... ? — Trovata frequente nella piccola valle della montagna di Aggius in giugno; qualche individuo ancora presso Sassari in maggio.

[1]) In ambedue le stagioni abbiam trovato la *C. vespiformis* e non mai la *conopsoides*.

Ananta nebulosa, Panz. — Specie piuttosto rara: ne abbiamo raccolto un individuo nella montagna di Aggius: giugno.

— **lateralis**, Meig. — È la specie di Fasiini che abbiamo incontrata più frequente presso Sassari, Tempio ed Aggius: maggio e giugno.

Alophora ...? — Raccolta a Domusnovas in fine di aprile, e sopra Aggius in giugno.

Gymnosoma rotundata, Lin. — Incontrata in varie parti dell' isola: aprile a giugno.

Gonia atra, Mgn. (*bicincta*, Mgn.) — Anche in questo secondo viaggio ne abbiam trovato un individuo solo nella campagna di Canèga: maggio.

Echinomya casta, Rond. — Raccolta presso San Lussurgio: maggio.

— **fera**, Lin. — È questa la specie di Echinomie trovata più diffusa nell'isola: maggio e giugno.

— **tesselata**, Fab. — Trovata presso Tempio: giugno.

— **tricondyla** (*Coll. Rond.*) — Ne abbiamo un individuo rinvenuto sulla montagna di Aggius: giugno.

Micropalpus comptus, Fall. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari in aprile.

Miltogramma ruficornis, Meg. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze della spiaggia sabbiosa di Alghero: maggio.

— **punctata**, Meig. — Trovata nelle vicinanze di Aggius: giugno.

— ....? — Ne abbiamo un individuo solo trovato presso Osilo.

Brachycoma translucida, (*Coll. Rond.*)—Raccolta nelle adiacenze di Alghero: in luoghi aridi sabbiosi: maggio.

Ocyptera rufipes, Mgn. — Specie non conosciuta dal Rondani e nuova per l' Italia: ne abbiam trovato un solo individuo nelle vicinanze di Alghero: maggio.

— **bicolor**, Encycl. — Non molto frequente: trovata ne' contorni di Aggius: maggio.

— **brassicaria**, Fab. — Diffusa per varii luoghi.

— **cylindrica**, Fab. — È questa la specie di Ociptere più frequente.

Mintho praeceps, Scop. — Trovato nelle campagne di Oristano: maggio.

Scatophaga haemorrhoidalis, Mgn. — Diffusa per varie parti dell' isola.

Pyrellia cadaverina, Lin. — Comune ovunque ed in tutte le stagioni.

— var. *cuprea*, Meg. — Diffusa anch' essa come il tipo, ma un poco meno abbondante.

Graphomya maculata, Scop. — Trovata in diversi luoghi, da aprile a giugno.

Musca (*Plaxemya*) **vitripennis**, Mgn. — Comunissima in tutta l'isola: è quella che in preferenza attacca gli animali equini.

Dasyphora pratorum, Mgn. — Diffusa per tutta l'isola.

Idia lunata, Fab. (*fasciata*, Mgn.) — Trovata in diversi luoghi in maggio e giugno.

Stomoxys calcitrans, Fab. — Diffusa per tutta l'isola, benchè poco frequente.

Antomiidei

Anthomya pluvialis, Lin. — Trovata in diversi luoghi: maggio e giugno.

Hylemya sylvicola, R. D. — Frequente in molte parti: aprile a giugno.

Lispe tentaculata, Deg. — Abbondantissima presso le sponde di molti fiumi e pantani.

Acantholena terminalis, A. Cost. — Raccolta nella valle de' mulini presso San Lussurgio: maggio.

Scatophaga stercoraria, Lin. — Comune ovunque ed in ogni stagione.

Helomyza praeusta, Fall. — Trovata in varii luoghi, dall' aprile al giugno.

Dichetophora obliterata, Fab. — Raccolta presso il rigagnolo di Tissi: maggio.

Sepedon sphegaeus, Fab. — Non molto raro in vicinanza de' corsi di acqua.

— **Haeffneri**, Fall. — Raccolto presso il fiume di Porto Torres: maggio.

Tetanocera coryleti, Scop. var. — Trovato abbondante a Decimoputzu e Domusnovas.

— **ducalis**, nob. — Ne abbiamo trovato un secondo individuo [1]) presso Iglesias.

Sciomyza cinerella, Fall. — Diffusa per molti luoghi, dalla metà di aprile.

Sapromyza rectinervis, Rond. — Raccolta nelle vicinanze di Aggius.

Dryomyza flaveola, Fab. — Trovata nelle adiacenze di San Lussurgio.

Urophora solstitialis, Lin. — Raccolta presso Tissi e Porto Torres: maggio.

Trypeta jaceae, Desv. — Rinvenuta presso

[1]) Il primo individuo l'avevamo trovato nel settembre del 1881 sul Gennargento.

lo stagno di Pilo e nella montagna di Nuragu presso Ozieri: maggio e giugno.

— **syllibi**, Rond. — Trovata molto abbondante presso Assemini sopra i cardi nella seconda metà di aprile, e più tardi a Cabras in maggio, e Terranova in giugno.

Oxyna arcuata, Schr.—Rinvenuta presso San Lussurgio: maggio.

Tephritis formosa, Loew. — Trovata non rara nelle colline di Terranova nella seconda metà di giugno: qualche individuo ancora presso Siliqua nei primi di maggio.

— ...? — Ne abbiamo un individuo rinvenuto presso S. Lussurgio: maggio.

— ...? — È questa la specie di Tripete più diffusa: maggio e giugno.

— ...? — (affine alla *tessellata*, Loew.) — Rinvenuta sulla montagna di Aggius: giugno.

— ...? (affine alla *cincta*) — Trovata presso Cagliari, Simaxis e M. Narba: aprile e maggio.

— **praecox**, Loew. — Raccolta presso Cagliari e Orri: seconda metà di aprile.

— **pumila**, nob. — Rinvenuta soltanto a Campiomu, ove non sembrava molto rara: aprile.

— **eluta**, Mgn. — Raccolta nell'isola dell'Asinara.

Philophylla onopordi, Fab. — Trovata sulla montagna di Nuragu presso Ozieri: primi giorni di giugno.

Dacus oleae, Fab. — Abbondante più o meno negli oliveti di Sardegna, come in qualunque altra regione di olivi.

Platystoma ....?(affine all'*umbrarum*)—Diffuso per molte parti in luoghi boschivi ed ombrosi: aprile a giugno.

Chloria (*Ulidia*) **demandata**, Meig. — Frequente in quasi tutta l'isola.

Sepsis punctum, Fab. — Abbondante ne' luoghi umidi, in quasi tutta l'isola.

Piophila casei, Lin. — Negli abitati in quasi tutta l'isola.

Geomyza combinata, Lin. — Raccolta presso San Lussurgio ed a Tissi: maggio.

Lonchaea parvicornis, Mgn. — Trovata presso Cagliari ed Oristano.

Agromizidei

Milichia speciosa, Mgn. — Ne abbiam trovati varii individui in vicinanza dello Stagno di Pilo e qualcuno a Decimoputzu: aprile a maggio.

Chlorops fuscipennis, nob. — Trovata abbondante nell'isola Piana, e non incontrata in alcun altro luogo: maggio.

Meromyza ...? — Rinvenuta in un bosco presso Tempio prima metà di giugno.

N. Gen. ? — Ne abbiamo un solo individuo trovato nelle adiacenze di Cagliari: aprile.

Camarota flavitarsis, Meig. — Raccolta nelle attinenze di Tissi: maggio.

Notiphila ...? — Raccolta nella valle canonica presso Iglesias e a Porto Torres: maggio.

Ephydra bivittata, Loew. — Abbondantissima sulle sponde dello Stagno di Cagliari.

— ...? — Ne abbiamo un individuo solo trovato presso Oristano.

Bibionidei

Bibio hortulanus, Lin. — Ne abbiam veduti gli ultimi individui della stagione (apparisce in marzo) nella metà di aprile presso Cagliari.

Dilophus vulgaris, Meig. — Trovato nel Cagliaritano nella seconda metà di aprile.

— **femoratus**, Meig. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari in aprile, di San Lussurgio in maggio.

Simuliidei

Simulia ....? — Raccolta presso Oristano: maggio.

Micetofilidei

Ceroplatus tipuloides, Bosc. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo presso San Lussurgio: maggio.

Tipulidei

Pachyrhina maculosa, Meig. — Diffusa e frequente in quasi tutta l'isola: aprile, maggio, giugno.

— ...? [1]) — Frequente quanto la precedente in tutti tre i mesi.

Tipula gigantea, Schrk. — Specie assai poco diffusa: trovata nelle vicinanze di Aggius: giugno.

— **hortulana**, Meig. — Diffusa per buona parte dell'isola: dalla metà di aprile in poi.

— **oleracea**, Lin. — Raccolta ne'boschi delle vicinanze di Tempio: giugno.

[1]) Specie molto affine alla *maculosa*.

Tipula lateralis, Meig. — Trovata nelle adiacenze di Tempio: poco frequente.

Anisomera bicolor, Meig. — Specie non rara: raccolta presso Pula, Muravera, Gibbas: seconda metà di aprile.

Limnophila ferruginea, Meig. — Raccolta nella valle Canonica presso Iglesias: maggio.

Limnobia nubeculosa, Meig. — Raccolta a Orri ed Iglesias: maggio: poco frequente.

— **tripunctata**, Fab. — Raccolta nella valle de' mulini presso S. Lussurgio: maggio.

Specie indeterminate 8.

Chironomidei

Chironomus . . . . ? — Abbondante presso Cagliari: aprile.

Psicodidei

Psychoda . . . . ? — Raccolta presso Oristane: maggio.

Ippoboscidei

Hippobosca equina, Lin. — Più abbondante e più facile al volo che altrove.

Tisanuri

Lepisma pilifera, Luc. — L'abbiam rinvenuto in diversi luoghi; Cagliari, Iglesias, Porto Torres, Isola dell'Asinara: in generale però può dirsi poco comune. Specie descritta primamente di Egitto. Ignoriamo se sia stato prima d'ora indicata come abitatrice d'Italia.

Specie indeterminate 4.

Miriapodi

Sebbene naturalmente poco numerosa questa classe, pure un aumento è provvenuto dalle recenti ricerche. Il genere *Glomeris,* di cui nessuno innanzi di noi avea annunziata la esistenza in Sardegna, venne registrato nella prima memoria, senza nondimeno poterne nominare la specie, perchè non avevamo che un individuo solo trovato morto ed alterato. Ora, avendone rinvenuti più individui viventi, abbiam potuto riconoscervi una bellissima specie, che sembra affine al *G. hexastichus.* Un'altra aggiunta alle conoscenze che oggi si hanno su' Miriapodi della Fauna Sarda è il genere *Strongylosoma* (o *Tropisoma*) rappresentato dalla specie ordinaria. Del genere *Iulus*, la cui scarsezza nella Sardegna è un fatto notevole, tre altre minute specie abbiam rinvenute, tutte tre sul monte Limbara sotto cortecce marcite di Elci.

Glomeridei

Glomeris lunatosignata, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti parecchi individui nella valle Canonica, tra macerie: qualcuno ancora a Campiomu.

Polidesmidei

Strongylosoma pallipes, Oliv. (*ferrugineum*, Koch.) — L'abbiam trovato in gran numero presso le sponde del fiume di Siliqua a piccola profondità entro terra; più scarso sulle sponde del Tirso in Oristano. Qualche individuo ancora ne abbiam raccolto presso Sassari.

Polydesmus . . . — Ne abbiamo due specie; l'una più piccola, non rara nei luoghi assai umidi, in preferenza in vicinanza di fiumi o pantani, interrata; l'altra un poco più grande, rinvenuta soltanto a San Lussurgio.

Julidei

Julus flavipes, Koch. — Presso Cagliari e soprattutto tra ruderi e pietre dell'Anfiteatro.

— **boleti**, Koch, var. *nitens*, Fanz. — Trovato tra detriti vegetali sotto le cortecce di Elci sui monti del Limbara.

— . . . ? — Rinvenuto nelle condizioni medesime del precedente.

— **albipes**, Kock. — Trovato associato ai due precedenti, ma anche meno numeroso.

Litobiidei

Lithobius . . . . . — Ne abbiamo raccolte tre specie, sulla cui determinazione specifica non azzardiamo dare alcun giudizio.

Scolopendridei

Scolopendra dalmatica, Kock. — Raccolta in molti luoghi, come nel settembre, senza averne mai incontrata alcuna che fosse riferibile ad altra specie.

Geophilus Gabrielis, Lin. — Trovato in diversi luoghi, non però molto frequente.

— **crassicauda**, nob. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari: raro.

— . . . ? — Rinvenuto su' monti del Limbara.

Aracnidi

Ben più numerosa di specie è stata la raccolta di Aracnidi fatta durante questa seconda esplorazione. Però del copioso materiale riportato una piccola parte soltanto è stata esaminata e classificata: il più giace tuttavia quale è stato riportato dal viaggio. Per tal ragione non possiam dire se vi ha cose interessanti, oppur no. Una sola specie ci colpì nel momento in che la raccogliemmo, ed è una *Formicina*, genere che compariva la prima volta in Sardegna, e con specie diversa dalle poche prima conosciute.

Essendo le specie finora determinate in grande minoranza, preferiamo rimandare l'elenco delle specie raccolte ad altro lavoro. Descriveremo soltanto nella parte seguente la menzionata *Formicina*, che abbiam denominata *Eleonorae*.

Crostacei

Nella prima memoria, discorrendo dei Crostacei in generale, abbiam detto esser la famiglia degl'Isopodi Oniscidei quella che principalmente figura nelle Faune terrestri. In fatti, nelle ordinarie ricerche, soprattutto in certe stagioni, in un'isola che manca di laghi propriamente detti, l'è di Oniscidei che può ottenersi il contingente maggiore di specie. Ora, sebbene nel settembre ne avessimo raccolto buon numero, pure le novelle esplorazioni ci hanno fatto ritrovare due tipi molto importanti, prima non osservati. L'uno di essi può dirsi affine al genere *Platyarthrus*, Bran. ed è rappresentato da una specie ben elegante. L'altro si avvicina per taluni caratteri al genere *Tylos*, di cui si ha una sola specie dell'Algeria. Le differenze pertanto che riscontransi tra il cennato genere ed il crostaceo sardo son tali, da non poterli riunire insieme, e dover quindi formare per questo un gruppo generico a parte.

Passando ora ad altri ordini, che nelle Faune terrestri sono scarsamente rappresentati, dirò che de'Decapodi pare mancassero del tutto e la *Thelphusa fluviatilis*, e l'*Astacus fluviatilis*. Noi ne abbiam fatto ricerca in tutti i fiumi visitati, ne abbiam chiesto notizie a tutt'i pescatori; ma nessuno indizio abbiam potuto ottenerne. Vi è invece abbondantissima la *Caridina Desmarestii*, la quale si presenta con due varietà, distinte per grandezza e per colorito.

Di Amfipodi, a quelli raccolti innanzi si è aggiunta una specie di *Gammarus* degna di illustrazione.

Un'aggiunta più positiva ed assai importante è stata quella de'Crostacei degli ordini inferiori, dovuta alla circostanza dapprincipio cennata, di esserci trovati nella sta-

gione e ne' luoghi in cui esistevano i piccoli pantani temporanei che li albergano. Dappoichè non è da credere che dovunque esistono di queste raccolte di acque si trovino sempre siffatti Crostacei. Di moltissime che ne abbiamo incontrate, sole tre ne contenevano. Appartengono tali Crostacei ai generi *Apus, Branchipus, Daphnia, Cypris* e *Cyclops.*

Decapodi Macrouri

Caridina Desmarestii, Mill. — Trovata abbondantissima nel Rio Manno presso Decimoputzu, negli ultimi giorni di aprile. Le femmine aveano l'addome pregno di uova in incubazione. Una varietà è parimente abbondante nel Rio Tirso presso Oristano.

Amfipodi

Talitrus locusta, Lin. — Trovasi in diversi punti delle spiagge arenose.

Orchestia mediterranea, A. Cost. — Abita non solo sulle coste, ma si estende lungo le sponde de' fiumi fino a distanze considerevoli dal mare. Così, l'abbiam trovata a Pula e Terranova, non che nella valle Canonica presso Iglesias.

Gammarus fluviatilis, M. Edw. — Abbondante in diversi corsi di acqua: raccolto nel Tirso presso Oristano, nel Bau de mela presso San Lussurgio.

— **fontinalis**, nob. — Trovato in una fonte tra Sassari ed Osilo.

Isopodi

Asellus aquaticus, Lin. — Abbondante in diversi fiumi, vasche, pantani.

Ligia italica, Fab. — Abbondantissima su'littorali rocciosi, come ad esempio a Porto Torres.

Philoscia sylvestris, Fab. (*muscorum*, Cuv.) — Specie non tanto comune quanto la più parte di quelle che seguono: l'abbiam trovata in maggior copia presso Cagliari, le sponde del fiume di Porto Torres, Silìqua, Gibbas, Aggius, Monti del Limbara.

— **longistila**, nob. — Ce ne troviamo in collezione un individuo, delle adiacenze di Cagliari. Probabilmente però ne abbiam trascurati altri per simiglianza con la specie comune.

Iglesius coccineus, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo nella valle Canonica presso Iglesias tra pietre e terra come i Glomeri.

Porcellio spatulatus, A. Cost. — Trovato abbondante in più luoghi: presso Cagliari (nell'anfiteatro), nella valle Canonica, intorno Sassari: aprile a giugno.

— **granulatus**, Edw. — Diffuso più del precedente e più abbondante.

— **semigranosus**, A. Cost. — Anche questo è abbastanza diffuso ed abbondante.

— **laevis**, Latr. — Diffuso per molte parti dell'isola, sopratutto meridionali.

— ...? — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari, ed a Gibbas.

Armadillo officinalis, Dum. — Diffuso e più o meno abbondante in molte parti dell'isola.

Armadillidium vulgare, Latr. — Diffuso quanto il precedente, ed anche più abbondante.

— **pustulatum**, Dum. — Trovato in varii luoghi, ma meno comune delle due precedenti.

— ...? — Raccolto nelle vicinanze di Oliena: poco comune.

Syngastron dasypus, A. Cost. — Trovato in buon numero fra pietre a Campiomu, nella valle Canonica e presso Muravera.

Fillopodi

Apus cancriformis, Schaef. — Trovato abbondantissimo in un pantano temporaneo vicino Assemini: seconda metà di aprile.

Branchipus stagnalis, Lin. — Trovato nelle acque stesse che il precedente, ma in numero assai più prodigioso.

Cladoceri

Daphnia pulex, Lin. — Abbondantissima nelle acque putride e pantanose vicino Muravera: seconda metà di aprile.

Ostracodi

Cypris sardoa, nob. — Ne abbiam trovati molti individui raggruppati sotto pietre immerse presso le sponde del già indicato pantano temporaneo presso Assemini. Pochi individui vedeansi nuotare liberi presso le sponde.

Copepodi

Cyclops vulgaris, Leach. — Vivea insieme alle Dafnie nelle acque pantanose putride di Muravera.

Molluschi

Dopo la interessante opera pubblicata nello spirare dello scorso anno dalla signora marchesa Paulucci su' Molluschi terrestri e fluviali della Sardegna [1]) crediamo superfluo il riportare la nota delle specie raccolte; anche considerando che nella maggior parte son le cose stesse già notate nella prima memoria, le quali non cangiano per mutar di stagione. Per la qual cosa stimiamo opportuno notare soltanto poche cose che crediamo meno comuni.

La Fauna della Sardegna può dirsi povera in Polmonati terrestri. Sopratutto è notevole la scarsezza di specie del genere *Clausilia,* di cui non abbiam trovato che la sola *Kusteri*, già registrata nella prima memoria: manca perfino la *papillaris,* diffusa e comune in tutto il continente, non meno che nella Sicilia, la quale, in opposizione della Sardegna, è ricca di specie di *Clausilia ;* mentre sotto molti rapporti le Faune delle due Isole hanno strette affinità. Poche cose in Molluschi terrestri abbiamo aggiunto a quelle trovate in settembre; pure tra le poche vi ha qualcuna non spregevole. In prima dirò di essere stato fortunato a rinvenire la *Testacella Gestroi:* e dico fortunato, poichè non è animale molto diffuso e che ritrovisi assai facilmente. Tra le Elici poi citerò quella che la Paulucci riferisce alla *herbicola* Shuttl. propria delle isole Canarie: determinazione la quale possiam dire ora più giustificata di prima; dappoichè avendo portato con noi un individuo della Sardegna e confrontatolo con uno tipico proveniente dalle Canarie nella collezione della Paulucci, vi abbiamo col Carotti riconosciuta tale identità, che se si fossero i due confusi insieme senza etichetta, non si sarebbe potuto distinguere quale fosse stato delle Canarie, quale della Sardegna, mentre gl'individui che la Marchesa Paulucci possiede della Sardegna, sebbene fossero stati abbastanza caratteristici per farle intravedere la specie, pure lasciano molto a desiderare [2]).

Non può dirsi lo stesso pei Molluschi di acqua dolce, siano Gasteropedi, siano Acefali bivalvi, di cui quasi tutti i generi vi sono ben rappresentati, e tutti da me questa volta rinvenuti. Il genere però che proporzionalmente può dirsi più ricco di specie è il *Physa.* Nelle ricerche di settembre, oltre alle ordinarie *acuta* e *contorta,* altra ne discoprimmo che denominammo *solidior,* e della cui validità specifica mi ha confermato la ispezione della collezione Paulucci, nella quale non ho trovato alcuna cui quella somigli. Nelle ricerche ultime due altre ancora ne ho rinvenute, l'una delle quali al primo vederla, giudicai specie inedita da descrivere. E nuova l'era in realtà. Però la lodata Marchesa Paulucci l'à ora pubblicata nella citata Malacologia sarda col nome di *saeprusana.* Noi l'abbiam trovata non rara nel Rio Coghinas presso S. Rocco. La seconda specie pare sia la *truncata.* Del genere *Succinea* abbiam rinvenuta abbondantissima una che tiene un posto medio tra la *megalonyxia* e la *elegans,* senza potersi strettamente riferire ad al-

[1]) Note Malacologiche sulla fauna terrestre e fluviale dell'Isola di Sardegna.

[2]) Tra le Elici raccolte nel settembre, e di cui tacemmo perchè dubbia, ve ne ha una singolare, che se non è nuova assoluta, lo è per la Fauna Sarda, non figurando punto tra quelle della collezione della Marchesa Paulucci e quindi nelle relative note. Ne parleremo in altro successivo lavoro.

cuna di esse. Però non credo che a quelle differenze possa darsi un valore specifico, ma soltanto quello di una distinta varietà, alla quale per potere indicarla assegnerò il nome di *rectispira,* avendo appunto di speciale l'essere la conchiglia tutta sviluppata intorno un asse diritto, e quindi con l'ultimo anfratto meno obbliquo che in qualunque altra.

Turbellariei

Ricercando i più minuti coleotteri nelle acque fluviali ci è occorso osservare un animaletto dell' ordine de' Rabdoceli, lungo appena quattro millimetri. La difficoltà di conservarlo e la mancanza di microscopio non mi permisero farne un sufficiente studio. Mi accontentai quindi prenderne degli appunti dal vivo, quali potevano risultare dalla ispezione con buona lente d'ingrandimento, ritraendone ancora a matita una grossolana effigie. Il fatto più notevole era la grandezza relativa degli occhi. Non ostante la indicata piccolezza dell'animale (non possiamo affermare che non cresca di vantaggio), questi vedevansi anche ad occhio nudo come due punti neri circondati da anello bianco. Potendo essere animale non conosciuto, lo distingueremo col nome di *Euophthalmia fluviatilis,* rimettendo ad altra più propizia occasione la sua illustrazione.

Poriferi

Le molteplici indagini nelle acque di tutti i fiumi, canali, rivoli che abbiamo incontrati ci àn fatto discoprire una ubicazione della Spugna di acqua dolce, la quale merita tanto maggiormente esser menzionata, in quanto che non è cosa molto facile il rinvenirla. De' tanti fiumi e rivoli che abbiamo per ogni verso esplorati l'è in uno solo che l'abbiamo rinvenuta. Essa vive attaccata alla superficie inferiore di sassi immersi o subimmersi, su' quali forma densi strati dello spessore di fin oltre un centimetro. È di un bianco candidissimo e di tessuto compatto. Lo esame della sua struttura farà rilevare le sue affinità zoologiche, e riconoscere se convenga con qualcuna delle specie del genere *Spongilla* già conosciute, ovvero sia specie distinta. Di ciò diremo in altro lavoro. Data una differenza specifica, essa dovrebbe portare il nome di *Spongilla candidissima.*

SPECIE DA AGGIUNGERE

Agl'Imenotteri Pompilidei.

Priocnemis pogonioides, nob. — Ne abbiamo un individuo femmina rinvenuto nelle adiacenze di Alghero: maggio.

Agli Emitteri Psillidei.

Psylla alaterni, Forst.—Raccolta nelle adiacenze di Iglesias: maggio.

Rhinocola ericae, Curt. — Rinvenuta in vicinanza del Rio Coghinas presso S. Rocco: giugno.

Aphalara exilis, W. M. — Trovata abbondante a Monte Narba: seconda metà di aprile.

Euphyllura phyllyreae, Forst.—Trovata abbondante con tutte le sue varietà sopra l'olivo selvatico presso il Rio Coghinas, l. d. San Rocco.

Arytaina genistae, Latr. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari negli ultimi giorni di giugno.

PARTE TERZA

Note Illustrative

Coleotteri

Tachys scutellaris, var. *atrata*.

Notò Dejean che le due macchie comuni dell'elitre talvolta sono assai poco distinte. In fatti tra i numerosi individui raccolti presso lo stagno di Molentargius ve n'ha di quelli in cui le elitre si presentano quasi uniformemente d'un bianco gialliccio, rimanendo appena un'ombra delle due macchie normali. Mentre però si hanno questi casi di mancanza di melanismo, d'altro lato trovansi individui i quali presentano il melanismo in eccesso tanto, da fare con difficoltà riconoscere la specie tipica. Nelle elitre le due macchie normali si estendono in guisa, da occupare la massima parte della superficie; e del colore primitivo bianco-giallicçio rimangono in ciascuna elitra una macchia indeterminata, la quale cominciando ampia lungo il margine esterno, si va restringendo verso dentro, senza raggiungere la sutura, ed un angusto margine posteriore, che rimonta per brevissimo tratto lungo la sutura. I piedi sono picei co' femori più oscuri.

Hydroporus fulviventris, nob.

H. oblongo-ovatus, subdepressus, capite pronotoque fulvo-testaceis; elytris albidis, sutura lineisque quatuor longitudinalibus, plus minusve abbreviatis, nigris: subtus pectore nigro, ventre rufo-testaceo; antennis pedibusque pallide fulvis. — Long. mill. 4.

Statura ed abito generale dell'*Hydr. confluens;* però il corpo proporzionalmente più oblungo. Capo finissimamente puntinato e con due impressioni obbliqué ben distinte nella parte anteriore, ciascuna contigua al margine latero-anteriore dell'occhio del rispettivo lato; interamente fulvo-testaceo. Antenne e palpi dello stesso colore, più pallido: l'estrema punta dell'ultimo articolo delle prime, bruna. Dorso del protorace interamente del colore del capo: alla base, dietro il margine anteriore, e verso i lati finamente puntinato. Elitre bianco-giallicce splendenti, con la sutura e quattro linee longitudinali parallele sopra ciascuna più o meno accorciate, nere: di queste le tre interne più lunghe, in dietro si arrestano poco innanzi il margine e ad egual distanza: in avanti giungono fin presso il mezzo dell'elitra, la media avanzando poco le laterali: la quarta o esterna è brevissima e non oltrepassa in avanti la terza attigua. Petto nero. Ventre rosso-testaceo.

Osservazione. — Dal citato *Hydr. confluens* differisce per la forma meno brevemente ovale, e pel colore rosso-testaceo del ventre, colore normale, non dovuto a stato immaturo. Di che, oltre la natura stessa del colorito, ne assicura il colore nero intenso del petto che vi fa contrasto, ed il confronto con individui evidentemente immaturi del *confluens,* che teniamo della stessa Sardegna, e nei quali il ventre è nero come il petto.

Pinophilus erythrostomus, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 6).

P. nigro-piceus, dense griseo-fusco pubescens, clypei margine antico mandibulisque obscure rufis; abdominis segmento ultimo rufo-piceo, pedibus rufo-testaceis. — Long mill. 9.

Molto più piccolo del *P. aegyptius*, il capo meno levigato e splendente nel disco, proporzionalmente più accorciato, e gli occhi meno distanti dal margine posteriore: il margine anteriore del clipeo e le mandibole di un rosso-scuro assai distinto.

Osservazione. — Noi non conosciamo in natura il *P. siculus:* però il Sig. Ragusa che lo possiede, ed è giudice competente per Coleotteri della Sicilia, mi assicurava che il Pinofilo di quell'isola non è punto diverso da quello d'Egitto. L'è in seguito a siffatta assicurazione, che ci siamo determinati a considerarlo come specie distinta.

Gen. Parnus, Fab.

Riconosciamo benissimo la grande difficoltà di pronunziare intorno alla novità in specie del genere *Parnus;* ma vediamo nel tempo che mentre talune troviamo facilissimamente a determinarle, perchè le descrizioni che ne danno autori conscienziosi vi trovano un esatto riscontro, per altre ciò non ha luogo, nè le differenze che vi si osservano son di quelle che possono caratterizzare una varietà.

Parnus bicolor, nob.

P. elongatus, elytris distincte striato-punctatis, pronoto subtilissime confertim punctulato, punctis aliquot majoribus sparsis; brunneus, capite thoraceque obscurioribus, pronoto nigro-elytris griseo-flavescenti villosis. — Long. mill. 4.

Affine allo *striato-punctatus* per le elitre distintamente striate con serie di punti proporzionalmente grossi e profondi; e per la distanza delle antenne dagli occhi. Ne differisce principalmente pel protorace che ha punti finissimi ed immensamente stivati, con pochi punti più grandi sparsi. Dal *lutulentus* poi si discosta di molto per il vello nero del protorace, che fa contrasto con quello grigio-gialliccio, quasi a splendore dorato, delle elitre.

Parnus sulcipennis, nob.

P. oblongus, brunneus, cinereo-flavescente villosus, pilis intermixtis nigris; pronoto subtilissime aequaliter creberrime punctulato; elytris striato-punctatis, striis latioribus sulciformibus. — Long. mill. 4.

Distinguesi questo Parno dagli altri spettanti alla sezione con elitre striato-puntate per l'ampiezza delle strie delle elitre, le quali divengono quasi ampie quanto gl'intervalli da cui alla superficie sono separate, e che rappresentano ottuse costole; sicchè esse veggonsi ad occhio nudo assai più distintamente che nelle altre specie affini. Nel

fondo le strie presentano punti minuti confusi e stivati, e solo nella metà posteriore hanno punti più grossi disposti in unica serie. Le antenne sono testaceo-fulve distanti tra loro alla inserzione quanto ciascuna dall'occhio del rispettivo lato.

Labidostomis contromaculata, Gen. var.

Distinta varietà nella quale la macchia comune delle elitre si accorcia in lunghezza e si dilata in ampiezza, divenendo trasversale: lo stesso ha luogo nella macchia marginale di cadauna, per modo che tutte insieme sembrano formare una fascia interrotta nel mezzo di ciascuna elitra.

Pachybrachys anoguttatus, Suff.

Questo *Pachybrachys*, che nel catalogo trovasi indicato col nome di *leucurus*, venne descritto da Souffrian sopra unico individuo femmina avuto da Majorque. De Marseul nella Monografia de'Criptocefali di europa (Abeille, vol. XIII) riporta quella descrizione, facendo però notare ch'esso è probabilmente una varietà del *testaceus* descritto un anno innanzi da Perris, della Corsica Il catalogo del Bartolini infatti cita il *testaceus* come trovato in Sardegna. Però noi dobbiam dire che, sia specie o varietà, gl'individui da noi trovati in Sardegna convengono esattamente con la descrizione dell'*anoguttatus* e non con quella del *testaceus*. Aggiungeremo che mentre nella femmina l'uropigio presenta due macchie posteriori oblique marginali giallo-pallide e la fascia ventrale preanale bianca interrotta dalla fossetta; nel maschio l'uropigio à tutta la metà posteriore gialla e la fascia ventrale non è interrotta.

Scymnus zig-zag, nob.

S. breviter ovatus, modice convexus, creberrime subtilissime punctulatus; niger capite, pronoti lateribus, elytrorum summa basi apice fasciisque duabus biangulato-flexuosis tibiisque rufo-testaceis. — Long. mill. 2.

Variat: *elytris nigris, tantum fasciis duabus discoidalibus angulato-flexuosis utrinque abbreviatis.*

Nella relazione del nostro viaggio in Egitto abbiam dato ad uno *Scymnus* il nome *zig-zag*, senza però descriverlo. In Sardegna abbiam trovata la identica specie, che ci sembra tuttavia non riferibile ad alcuna di quelle descritte. Ancora i novelli individui ci han confermata la variabilità, che d'altronde si avvera assai facilmente in specie di *Scymnus*, dipendenti dal maggiore o minore dominio della materia colorante. In mezzo a siffatte variazioni rimangono sempre a farla riconoscere le due fasce trasversali rosse piegate a zig-zag.

Ortotteri

Ctenodecticus costulatus, nob.

Ct. griseo-testaceus, utrinque late nigro vittatus; pronoti lobis inflexis postice flavo marginatis, femoribus posticis extus nigro univittatis, abdominis dorso longitudinaliter quin-

que-costulato: — ♂ lamina anali dorsali profunde scissa ac in processus duos spiniformes producta, in medio subtiliter canaliculata; lam. an. ventr. marginibus lateralibus incrassatis, medio obtuse costata, postice triangulariter excisa, stilis filiformibus, laminae latitudine postica parum brevioribus, pallidis; cercis validis introrsum incurvatis, in margine postico ante mucronem apicalem angulatis. — ♀ terebra subrecta, corpore exsiccato parum breviore.

Long.	corporis exsiccati mill. .	♂ 10	♀ 11
	pronoti	4	
	elytrorum ultra pronotum.	1 ½	
	femorum posticorum . .	9	
	terebrae		9

Del genere *Ctenodecticus* non conoscendosi che due sole specie, l'una di Spagna servita di tipo alla istallazione del genere, e l'altra di Sardegna descritta dal prof. Targioni Tozzetti *(Ct. Bolivari)*, la presunzione farebbe credere che quella che noi possediamo dovesse appunto riferirsi a quest'ultima. Però di essa essendo stata descritta la sola femmina, mancherebbe il principale elemento pel giudizio; i caratteri essenziali stando precisamente nella fattezza delle parti estreme del corpo del maschio. Indipendentemente però da ciò la presenza di cinque delicate carene lungo il dorso dell'addome ci persuade che trattasi realmente di specie diversa: esse non sarebbero sfuggite all'accurata osservazione del prof. Targioni. Sembra ancora che lo *Ct. Bolivari* sia di statura un poco maggiore, giudicando dalle dimensioni. Il pronoto, per esempio, che non è parte variabile per disseccamento, in questa è lungo cinque millimetri, nella nostra è soli quattro; la trivella che nella prima è di undici millimetri, nella nostra è di nove, ecc.

Questa specie non figura nel catalogo degli Ortotteri della presente memoria, perchè essa fu raccolta nel settembre dell'anno precedente, nelle adiacenze di Iglesias e di Alghero.

Odontura calaritana, nob.

Non è già una novella specie che noi presentiamo con questo nome, bensì una specie nota, ma per la quale non sapremmo qual nome meglio adattarle. Essa corrisponde alla *Od. pyrenaea* come la descrive il Fischer, che si è avuta appunto da Sardegna, ma non alla *Barbitistes pyrenea* (sic) quale la descrive l'Audinet Serville che è l'autore della specie. La discrepanza fra le due descrizioni sta nella lamina sottoanale del maschio. Il Serville la dice: *fortement echancré en croissant au bout.* Fischer invece, la vuole *angulatim excisa*, *subtus non carinata.* Il Brunner, che non menziona alcuna *Odontura* di Sardegna accresce la confusione: poichè riporta la *O. pyrenaea* di Fischer come sinonimo della *stenoxipha* Fieb. di Sicilia, cui assegna una lamina sottoanale *medio carinata*, *margine postico rotundate emarginata.* Sicchè la sinonimia è male applicata. Conchiudendo diciamo che la *Odontura* che abbiam trovata abbondante in Sardegna corrisponde alla *pyrenaea* del Fischer, ma non di Serville.

Nevrotteri

Gomphus excelsus, nob.

G. flavus, thoracis lineis octo ferrugineis, interdum exoletis; alis hyalinis, venis fuscis, costali a latere antico flava, pterostigmate flavo, nigro marginato. — Long. millim. 40 ♂, 44 ♀.

♂ *abdominis segmentis 8 et 9 utrinque infra alatis; appendicibus superioribus valde elongatis, subfoliaceis angustis, inde a medio attenuatis, apice corneo obtuso, flavis apice nigro; inferioribus contiguis, extus ante apicem rotundatum angulato-dentatis.*

♀ *Lamina vulvari e lamellis duabus triangularibus, basi contiguis, apice obtusis, pilosis constituta.*

Capo interamente giallo verdastro, fronte superiormente limitata da margine tagliente: vertice dietro gli occhi spianato: lati dell' occipite dietro gli occhi un po' tumidi e con un sensibile infossamento nel mezzo dell'altezza. Occhi bruno-rossicci. Torace nel dorso e ne' fianchi giallo verdastro con otto linee ferruginose, due su ciascun lato del dorso e due sopra ciascuno de' fianchi corrispondenti alle suture delle pleure, tendenti un poco al rossiccio; il petto tendente al carnicino pallido, con due macchie bruno nerastre per cadaun lato. Addome cilindraceo, mediocremente ingrossato alla base e con gli anelli 7° 8° e 9° un po' depressi, a lati paralleli: il colore fondamentale è giallo sporco, col margine posteriore degli anelli nero: nel vivo gli anelli 3 a 8 hanno il terzo basilare occupato da un anello di color verdiccio tendente al ceruleo. Piedi giallastri; le creste delle tibie nerastre. Ali incolori: pterostigma lungo quanto tre cellole e mezzo dietroposte [1]) giallo, a contorni neri: nervi bruni, il costale giallo anteriormente soltanto.

Maschio. Anelli addominali 8° e 9° lateralmente alati. Appendici addominali superiori lunghe quanto gli ultimi due anelli addominali, foliacee, a lati quasi paralleli per quasi la metà della lunghezza, indi gradatamente ristrette, ed incurvate in giù, terminate a punta cornea ottusa; gialle con la estrema punta nera. Appendici inferiori lunghe metà delle superiori, contigue, ritondate all' estremità, avanti la quale nel lato esterno si allargano in ottuso dente: giallo-rossicce.

Femina. Scaglia vulvare consistente in due lamine triangolari contigue alla base, ottuse, pelacciute, gialle.

Le linee ferruginose del torace nel secco non sempre si osservano.

Osservazioni. — La forma delle appendici superiori del maschio allontanano questo *Gomphus* da tutti quelli che conosciamo di europa.

Myrmeleon falcipennis, nob.

M. capite thoraceque cinereo-flavescentibus, fusco notatis; abdomine valde elongato, fusco nigro; antennarum clava dorso profunde excavata; tibiarum anticarum calcare tarsi

[1]) Questo è il caso ordinario: ma per anomalia talvolta in qualcuna delle quattro ali dietro lo pterostigma corrispondono quattro od anche cinque cellole.

articulum secundum vix superante; alis angustis, anticis apicem versus falciformibus, hyalinis, anticis ad costam nigro notatis. — Long. mill. 40.

Per la proporzione degli articoli de' tarsi anteriori e per la lunghezza dello sperone delle tibie corrispondenti conviene col *M. tetragrammicus*. Però la clava delle antenne è fortemente scavata come nel *formicarius*. La forma delle ali anteriori, più anguste e falcate nella porzione estrema contribuisce a far distinguere questa specie.

Imenotteri

Tachytes erythrogastra, nob. (Rapp. prelim. p. 9).

T. nigra, abdomine rufo, segmentis primis tribus postice cano-sericeo micantibus; tarsis fulvis, alis hyalinis; metanoto postice subtilissime transversim striguloso, brevissime cano puberulo: ♀ *valvula anali dorsali laeviuscula, sparse punctata, aculeo partim exerto.* — Long. mill. 10.

Per lo addome interamente rosso è affinissima alla *rufiventris:* ne differisce per le tibie nere, rimanendo soltanto i tarsi fulvi. Il metatorace in un individuo presenta nella faccia posteriore un solco delicato, ma ben distinto, in un altro manca affatto di questo solco. La quale variabilità la troviamo ancora più spiccata nella *T. rufiventris,* di cui taluni individui presentano nella detta faccia un semplice solco lineare, altri una fossetta verticalmente ovato-ellittica ben risentita, in fondo alla quale sta il solco.

Tachytes procera, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 9).

T. nigra, breviter cinereo pubescens, facie clypeoque argenteo tomentosis; abdominis segmentis duobus primis fulvo-rufis, hisce et sequentibus duobus fascia marginali cano-sericea; valvula anali dorsali fulvo-igneo-tomentosa; pedibus rufo-fulvis coxis, trochanteribus femorumque anteriorum maxima parte nigris ♀. — Long. mill. 13.

Molto simile alla *Tachyt. obsoleta* per l'appendice della cellola radiale piccolissima e per l'abito generale del corpo. Ne differisce pei piedi rosso-fulvi, con soltanto le ánche e trocanteri tutti e buona parte de' quattro femori anteriori neri. La valvola anale dorsale è rivestita di peluria coricata di color rosso acceso splendente.

Astata picea, A. Cost.

L' individuo della Sardegna trovato nella collezione di Torino, che ci servì di tipo nella diagnosi di questa specie [1]) presentavasi uniformemente di color piceo. Gl'individui ora raccolti ci àn fatto riconoscere che quel colore era l' effetto di lunga azione della

[1]) Prosp. degli Imen. Ital. p. 34.

luce. Vivo l'animale il corpo, di un bel nero splendente con le ali ancora nero-fuliginose. La frase diagnostica quindi esser deve così modificata:

Atra nitida, cinereo pilosa; alis nigro-fuscis; metanoto coriaceo subtilissime reticulato-rugoso. ♂ ♀.

Affine alla *A. unicolor,* Lep. [1]) dell'Algeria: diversa per la pleuria tutta di color cenerino e per le ali densamente nero-fulginose.

Hoplisus sulcifrons, A. Cost.

Descrivemmo questa specie con la conoscenza della sola femmina. Ora ne abbiamo trovato anche il maschio, per modo da poterne completare la descrizione.

Il maschio ha il flagello delle antenne interamente nero, ed il sesto anello addominale con fascia dorsale gialla. In ambedue i sessi le orbite interne non sono gialle. Ne abbiamo un individuo maschio in cui il quinto ed il sesto anello dell' addome mancano della fascia gialla.

Oxybelus quadrinotatus, Jur. *anomalus?*

Tra gli *Oxybelus* diversi rinvenuti in Sardegna vi ha uno il quale per la scultura e la colorazione del corpo si direbbe senza esitare il *14-notatus:* però manca completamente del mucrone del metanoto. Nè ciò per mutilazione sofferta, dappoichè nel posto su cui doveva quello stare impiantato vi ha un' aja triangolare cinta da delicato rilievo. Per tal modo manca la più interessante delle note caratteristiche generiche. Avendone pertanto un individuo solo, non osiamo pronunziare se ciò alluda a speciale forma organica, ovvero sia semplicemente una anomalia.

Genere Notoglossa, Dahlb.

Dahlbom nella *Tabula synoptica Crabronidarum* [2]) indicò col nome di *Notoglossa* un gruppo generico distinto dall'*Oxybelus* perchè il metanoto in luogo dell'ordinario mucrone, ne ha uno ampio, orizzontalmente piano ed a forma di lingua: *mucro metanoti amplus horizontaliter planus et sublinguaeformis.* Ed in quanto a specie, a pag. 514 ne cita una sola di Affrica, osservata nel museo di Paykull, che nomina *sagittata*, senza però accennare ad alcun carattere specifico, per lo che è rimasta specie puramente nominale. Di un tal genere non troviamo fatta più parola da Imenotterologi seguiti al Dahlbom. Pertanto tra gli *Oxybelus* raccolti ora in Sardegna ve ne ha uno in cui il mucrone si conforma precisamente nel modo da lui descritto. In vero non ci sembra modifica tale da diagnosticare un genere, ma per lo meno il nome merita essere conservato per contrassegnare un sottogenere.

Anche l'Imenottero da noi descritto nella prima memoria col nome di *Alepidaspis diphyllus* rientrar deve in questo gruppo. Sicchè il genere o sottogenere *Notoglossa*, richiamato a nuova vita, conta già due specie.

[1]) Hym. III, p. 258.
[2]) Hymenoptera europaea, genus *Sphex.*

Notoglossa frondigera, nob.

N. nigra, facie argenteo tomentosa; pronoto, callis humeralibus, maculis duabus scutelli, metanoti squamis, maculis binis in segmentis abdominalibus 1-5, pedibusque maxima parte flavis; antennis anoque fulvis; lamina metanoti rufa, subpellucida, quasi e foliolis duabus sutura elevata connatis, apice liberis lanceolatis, longitrorsum concaviusculis ac lineis obliquis elevatis ornatis constituta; alis hyalinis venis nigris ♂. Long. mill. 5 $^1/_2$.

La lamina del metatorace è come costituita da due foglioline saldate insieme nei primi tre quarti per una linea suturale elevata, e quindi libere a foglia di ulivo: ciascuna fogliolina è più larga poco oltre la origine, quindi si restringe gradatamente, è un poco concava nel senso della lunghezza ed è percorsa da gran numero di linee elevate oblique, che dalla sutura si portano al margine opposto o esterno.

Notoglossa diphylla, A. Cost. (Alepidaspis diphyllus, Mem. 1ª, p. 35).

N. nigra, facie argenteo tomentosa; pronoto, callis humeralibus, maculis duabus scutelli, postscutello, squamis, maculis binis in segmentis abdominalibus 1-5, flavis; antennis, ano pedibusque fulvis, his coxis omnibus femorumque anticorum basi nigris; lamina metanoti e foliolis duabus connatis apice liberis rotundatis, nervis longitudinalibus elevatis constituta, nigra, foliolorum apice fulvescente; valvula anali dorsali crasse et crebre punctata; alis hyalinis, venis fusco-testaceis. ♀ — Long. mill. 6.

La fattezza della lamina del metanoto di questa specie è immensamente diversa non solo per la forma totale, che in questa è largamente ovale e completamente spianata, ma pe' nervi che la percorrono, longitudinali e non obliqui: essa si direbbe una foglia rettinerva.

Osservazioni. — Sebbene della prima specie avessimo soltanto il maschio, e di questa soltanto la femmina, le differenze organiche, oltre quelle di colorito, sono troppo rilevanti per far nascere il dubbio che siano i due sessi di una specie stessa. Ad ogni modo ulteriori osservazioni potranno arrecare schiarimento.

Se qualcuna di queste sia simile a quella di Africa cennata da Dahlbom non può determinarsi: ed in tutti i casi non avendone l'autore dato alcun carattere, quella specie rimaner deve puramente nominale.

Priocnemis bisdecoratus, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 9).

Niger, linea anteorbitali aliaque abbreviata postorbitali flavis: abdomine macula dorsali in segmento secundo rufo-fusca, punctisque duobus transversis in segmenti tertii basi flavis; alis fusco-violascentibus, margine apicali nigro-violaceo; metanoto transversim irregulariter striato-rugoso ♂.— Long. mill. 13.

Corpo, antenne e piedi di color nero intenso, poco splendente, quasi nudo. Una linea orbitale anteriore ed altra accorciata posteriore gialle. Dorso del secondo anello

addominale con una grande macchia rosso-fosca, che cominciando dalla base si estende fin quasi alla metà. Terzo anello con due piccole macchie gialle poste alla base e molto distanti tra loro, essendo ciascuna vicina al rispettivo margine laterale dell'anello. Ali nero-fuligginose, con la porzione apicale di un nero più intenso: le posteriori con la cellola anale terminata un poco prima della origine della vena cubitale.

Affine al *Priocn. egregius (Calicurgus)* Lep. di Corsica. Ne differisce per le tibie e tarsi interamente neri; per la mancanza di macchie sul quarto anello addominale e perchè quelle del terzo stanno alla base, non nel margine posteriore.

Priocnemis leucocoelius, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 9).

P. niger unicolor, nitidulus, subnudus, ano tantum pilis rigidis hirto; metanoto medio canaliculato, toto subtilissime transversim striguloso; abdomine laevi, valvula anali dorsali rude crebre punctata; alis nigris, anticis ante apicem macula rotunda lactea notatis. ♀.— Long. corp. mill. 8-10.

Corpo nero, poco splendente, quasi nudo; ad eccezione della parte terminale dell'addome che è guarnita di peli rigidi. Antenne e piedi neri. Ali nere: le anteriori con una macchia bianco-lattea quasi rotonda posta poco innanzi l'estremità. Ali posteriori con la cellola anale terminata innanzi la origine della vena cubitale.

Priocnemis pogonioides, nob.

Pr. niger, nitidulus, subnudus; ano pilis rigidis hirto; metanoto subtilissime punctato-coriaceo; alis nigris, anticis fascia media subhyalina, maculaque transversa lactea ante apicem notatis; valvula anali dorsali crebre rude punctata.—Long. corp. mill. 8.

Questo piccolo Priocnemide simiglia talmente per colorazione e grandezza al *Pogonius variegatus*, che noi stessi l'abbiamo da prima con quello confuso. La struttura delle tibie posteriori soltanto rivela la diversa spettanza generica.

Dal *Pr. leucocoelius*, col quale à grande affinità, distinguesi per le ali anteriori che oltre la macchia lattea presso l'apice, ànno una fascia ialina nel mezzo della lunghezza; ma più ancora per una diversa scultura del metatorace; chè in questo è finamente puntato-coriaceo e manca di solco mediano ben distinto.

Pompilus plicatus, nob.

P. ater unicolor; subnitidus, parce nigro pilosus, alis nigro-violascentibus; metanoto medio anguste canaliculato, postice grosse et irregulariter transversim plicato-rugoso; alis posticis cellula anali in ipsa origine venae cubitalis terminata. — Long. mill. 14-19.

A guardarlo superficialmente questo Pompilo simiglia del tutto all'*holomelas*, tanto che nella caccia riesce impossibile distinguer le due specie. Nulladimeno la scultura del metatorace è tanto diversa, da non far punto esitare a riconoscerle.

Pompilus.....?

È questa la sola specie di veri Pompili finora trovata in Sardegna del gruppo di quelli coi primi tre anelli addominali rossi. Avendone però solo due individui maschi, non possiamo diagnosticare la specie. Essi rappresentano i pigmei de' Pompilidei: il loro corpo assai delicato, ed è lungo soltanto quattro millimetri. Aggiungerò che per le ánche a splendore serico argentino si avvicinerebbe al *chalybeatus*, Dhlb.

Planiceps fulviventris, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 9).

Pl. niger, cinerascenti puberulus, abdomine fulvo unicolore, alis saturate fusco-fuliginosis. — Long. mill. 7.

Diverso dal *Pl. Latreillii* per l' addome interamente rosso-fulvo. La costanza del carattere ci ha consigliato a considerarla come specie diversa, anzi che come una varietà.

Myzine erythrura, A. Cost.

Questa specie venne da noi descritta nella Fauna Napoletana con la conoscenza del maschio, solo sesso che nel volger di tanto tempo avevamo sempre trovato. Ora per la prima volta in Sardegna abbiamo rinvenuta la femmina, la quale, non ostante la variabilità che in detto sesso si osserva nella specie affine *sexfasciata*, si lascia facilmente riconoscere. Crediamo quindi utile darne la descrizione.

Capo interamente nero: le mandibole rosso-ferruginose con la estremità nera: le antenne nere con la estremità del primo articolo e i due seguenti rosso-ferruginosi. Il torace è nero con la metà posteriore del mesotorace e le tegole alari rosso-picee. Addome rosso-ferruginoso, con una macchia nerastra presso i margini laterali di ciascun anello, eccetto l'ultimo; ne' tre medii la macchia nera è seguíta da altra d' un bianco d' avorio. Piedi neri; tibie e tarsi rosso-ferruginosi.

Non possedendone che un individuo solo non possiam dire se sia soggetto a variazioni di colorito, come la femmina del *M. sexfasciata*.

Odynerus laborans, A. Cost. (mem. 1.ª p. 37.)

Nella prima memoria abbiamo dato i caratteri del solo maschio. Ora ne abbiamo ancora la femmina.

La femmina ha il clipeo inferiormente troncato-smarginato con gli angoli dentiformi: nero con una fascia alla base, nera. Lo spazio triangolare giallo che è al disopra della base delle antenne presenta un solco longitudinale. Le antenne sono nere col solo primo articolo inferiormente giallo. I piedi sono giallo-ferruginosi. Nel maschio il primo articolo delle antenne è giallo con striscia dorsale nera accorciata verso la base dell'articolo, i nove seguenti sono inferiormente ferruginosi. La faccia posteriore del metatorace è mediocremente concava, a margini laterali acuti, a superficie finamente coriacea e con punti impressi ben marcati.

Osmia atriventris, nob.

O. nigro-aenea, capite thorace abdominisque segmento primo utrinque fulvo villosis; abdominis segmentis 2-5 fimbria marginali e pilis stratis albis ornatis, ventris scopa atra, lateribus a ciliorum argenteorum serie cincta. — Long. mill. 9.

Femina. Capo con peli fulvi, un po' tendenti al cenerino: il margine inferiore del clipeo è irregolarmente sinuoso ed ha una frangia di cigli di color fulvo acceso, decrescente dal mezzo ai lati. La faccia anteriore delle mandibole è ricoperta di vello rosso-ferruginoso oscuro. Torace rivestito di peli di color fulvo più intenso. L' addome à i lati del primo anello con folti peli simili a quelli del torace; i quattro anelli seguenti ànno una fitta frangia marginale di peli bianchi (nel secondo è interrotta, ma forse per consumo). Lungo tutto il contorno dell' addome vi ha una fila di cigli argentini che forma una cinta ed un contrasto di colore con la spazzola ventrale, ch' è d' un nero intenso. Ali incolori; solo la parte costale della cellola radiale è affumicata, ed il margine apicale è leggermente ombrato.

Osmia igneopurpurea, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

O. purpurea, dense rufo villosa; ventre nigro piloso; pedibus obscurioribus; alis fuliginosis, clypeo mandibulisque muticis. ♀ — Long. mill. 8.

Il colore fondamentale del corpo è uniformemente di un porporino cangiante in rameo: esso però rimane completamente occultato dalla folta peluria di color rosso acceso che ricopre tutto il corpo: solo le palette ventrali sono di un nero intenso. I piedi sono di un colore più oscuro del corpo, con la peluria simile alla rimanente, meno ne' tarsi, ne' quali è molto pallida.

I nostri individui sono tutti femmine. Il sig. Gribodo, che ne ha ricevuti molti individui dalla Tunisia, possiede ancora i maschi.

Megachile carinulata, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

M. nigra, capite, thorace, abdominis basi ventreque albo-cinerascenti villosis; abdominis segmentis primis quinque dorsalibus in margine postico pilis stratis albis dense ciliatis, sexto transverso, dimidio basali carina media longitudinali laminari praedito, inferius concaviusculo, margine toto lacero-dentato; septimo inflexo, triangulari, cuspidato, dorso carinato; alis hyalinis, apice fumatis, venis nigro-piceis. — Long. mill. 14.

Maschio. La fattezza degli ultimi due anelli addominali è molto caratteristica. Il sesto è trasversale, a lati quasi paralleli: la metà basilare o anteriore è convessa e presenta nel mezzo una carena longitudinale ben risentita; la posteriore è trasversalmente cancava. Il settimo, non visibile dal dorso perchè occultato dal sesto, è piccolo, triangolare, elevato a vomero nel mezzo e prolungato in una cuspide, che è continuazione della carena del vomero.

Anthidium rufispinum, nob.

A niger, albido villosum, genis, clypeo, mandibulis apice excepto, maculis binis in segmentis abdominalibus 1-6, tibiis (postice tantum nigris) tarsisque flavis; abdominis segmento sexto utrinque spinoso, septimo quinque-spinoso, spina media lateralibus multo breviore, nigra, spinis quatuor lateralibus validis rufis; alis hyalinis vix fumatis, tegulis flavis disco brunneo. ♂. — Long. mill. 8.

Maschio. Capo nero con peluria bianco-cenerina; le gote per intero ed il clipeo gialli; questo con due piccolissime macchie nere poste al disotto della radice delle antenne. Mandibole gialle con la estremità nera. Antenne interamente nere. Torace nero con peluria simile a quella del capo. Scutello inerme. Addome nero, alla base e ne' fianchi rivestito di peluria simile a quella del torace. I primi tre anelli con una macchia su cadaun lato, gli altri tre con una fascia largamente interrotta, gialle. Il sesto anello à i margini laterali prolungati in spina diritta ed aguzza rosso-ferruginosa. Il settimo anello posteriormente è armato di cinque spine: la spina media è corta, e rappresenta la continuazione di una delicata carena dorsale nera: le altre quattro sono assai valide, rosso-ferruginose; le interne più vicine alla media che alla rispettiva esterna. Piedi neri: tibie e tarsi gialli: le prime con la faccia posteriore nera. Ali appena ombrate. Tegole gialle col disco bruno.

Dioxys moesta, nob.

D. nigra unicolor, cinereo pubescens, abdominis segmentis primis quatuor vel quinque postice fasciola e pilis stratis albis cinctis. — Long. mill. 4.

Molto diversa dalla *pyrenaica*, non solo per avere tutti gli anelli addominali egualmente neri, ma per avere il sesto anello addominale più semicircolare. La grandezza è anche minore.

Sebbene fosse specie molto abbondante presso San Lussurgio, pure gl' individui che ci troviamo raccolti sono tutti femine.

Stelis leucostoma, nob.

S. nigra, cinereo parce pilosella, clypeo, genis labroque albidis, guttis binis in segmentis quatuor anticis abdominis, hujusque segmento sexto flavis; pedibus fulvis, coxis femorumque basi nigris; alis hyalinis vix fumatis. ♂ — Long. mill. 6.

Corpo robusto, finamente e stivatamente punteggiato, nero con scarsa peluria cenerina. Il clipeo, le gote ed il labbro superiore sono interamente bianco-giallicci. Le antenne nere, rossastre inferiormente e verso l'estremità. I primi quattro anelli addominali hanno due piccole macchie trasversalmente ovali, molto vicine al margine esterno, di color giallo; l'ultimo anello è pure giallo. Piedi fulvi con le ánche e la base de' femori nere. Ali leggermente affumicate.

Anthophora procera, nob.

A. nigra, nigro hirta, fronte, thoracis margine antico fasciaque postica, abdominis segmentis primo, quarto et quinto, tibiisque posticis externe cinereo dense pilosis. ♀. — Long. mill. 16; lat. max. abd. 8.

Affinissima è questa Antofora alla *nigrocincta*, ma la disposizione delle fasce nere e cenerine dell' addome è diversa. In quella vuolsi che il primo, secondo e quarto anello abbiano peluria cenerina (o fulva nelle varietà), il terzo nera: nella nostra pel contrario il primo, quarto e quinto sono cenerini, il secondo e terzo neri.

Siffatta distribuzione di fasce presentasi costante nel mezzogiorno. Pria di trovarla in Sardegna la possedevamo della provincia di Lecce. Più tardi il sig. Jatta l' à raccolta nella provincia di Bari.

Eucera subvillosa, Lep.

Non abbiamo esitato a riferire a questa specie originaria di Oran varii individui da noi raccolti. La descrizione del Lepelletier le conviene abbastanza e sopratutto il fatto di essere questa l' unica tra quelle descritte in cui si abbia soltanto il clipeo con macchia gialla. La sola differenza che vi troviamo sta nella peluria, che è cenerina, senza alcuna tendenza al rossiccio; variazioni che si spiegano non solo per la diversità del clima, ma s' incontrano facilmente in molte specie di Apidei, tra individui viventi sotto il medesimo cielo. D'altronde la Sardegna ci offre già molti esempii di specie africane.

Cryptocampus distinctus, A. Cost. (Rapp. prelim., pag. 10).

C. niger nitidus, ore albido, pedibus testaceis tarsis apice fuscis; alis hyalinis, stigmate fusco-albicante. — ♀ Long. mill. 5.

Femina. Corpo oblungo, quasi cilindrico, nero splendente. Labbro superiore trasverso-rettangolare, bianco sudicio con angusto contorno scuro. Mandibole pallide con la estremità oscura. Tegole alari bianche. Piedi, compresi le ánche e i trocanteri, testacei: l'ultimo articolo de' quattro tarsi anteriori e i quattro ultimi de' due posteriori, scuri. Ali trasparenti, vene nere, la costa e lo stigma bruno-bianchicci. Prima cellola cubitale assai lunga e ricevente i due nervi ricorrenti. Le posteriori con due cellole discoidali chiuse.

Blennocampa formosella, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

Nigra, scutello punctis duobus callosis albis, abdomine rufo-testaceo, segmentis duobus basalibus (primo area triangulari pellucida) anoque nigris: pedibus pallide flavis, tarsis anterioribus apice, posticis omnino fuscis. — Long. mill. 4 $^1/_3$.

Femmina. Capo nero; mandibole con la estremità testacea; palpi gialli. Antenne

nere. Torace completamente nero. Addome giallo-rossiccio, col dorso de' due primi anelli (eccettuato il triangolo membranoso del primo, pallido) neri, anello ultimo anale bruno, trivella nera. Piedi giallo-fulvicci: i due anteriori con la estremità de' tarsi, i quattro posteriori con l'estremità delle tibie e gran parte de' tarsi, nerastre. Ali ombrate.

Affine alla *Bl. assimilis.*

Genere **Ametastegia**, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

Ali posteriori senza alcuna cellola discoidale e con la cellola anale brevemente appendicolata. Corpo allungato, depresso, antenne setacee, lunghe quanto il capo e torace, di nove articoli. Ali anteriori con due cellole radiali e quattro cubitali come nel genere *Perineura:* cellola lanceolata divisa da nervo trasversale.

Distinto dal genere *Perineura* per la mancanza di cellola discoidale nelle ali posteriori.

Am. fulvipes, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

A. nigra nitida, pedibus fulvis, tarsis posticis tantum fuscis; alis hyalinis, venis stigmateque nigris. ♀ — Long. mill. 6.

Femina. Corpo interamente nero splendente. Clipeo e metà apicale delle mandibole rossicci. Prosterno con due macchie pallide innanzi le ánche anteriori. Piedi, comprese le ánche, fulvi; i tarsi posteriori e metà apicale de' medii nerastri. Ali incolori; vene e stigma neri.

Cephus quadriguttatus, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 10).

C. niger, abdominis segmentis quarto et quinto guttis duabus dorsalibus flavis; mandibulis, geniculis, tibiis tarsisque pedum anteriorum albidis. ♂ — Long. mill. 6.

Maschio. Capo nero. Mandibole bianche. Antenne e palpi neri. Torace interamente nero. Addome nero; il quarto e quinto anello ciascuno con due macchie dorsali giallo-testacee; le due appendici sessuali che seguono all'ultimo anello dorsale sono spianate, quasi rettangolari, di un bel giallo di cromo. Piedi neri; ginocchi, tibie e 4 primi articoli de' tarsi de' quattro piedi anteriori, bianchicci. Ali leggermente ombrate.

Cephus flavisternum, A. Cost. (Rapp. prelim., p. 10).

C. niger, labro, mandibulis, pectore pedibusque saturate flavis, horum anterioribus coxis, trochanteribus et femoribus postice tantum, posticis etiam tibiarum et tarsorum parte postica nigris; abdominis segmentis dorsalibus tertio, quinto et sexto, ventralibus omnibus margine postico citreo. ♂ — Long. mill. 8 $^1/_2$.

Maschio. Capo più largo del torace, nero; il clipeo ed una parte del margine orbitale, gialli; le mandibole gialle col margine dentario piceo; i palpi gialli. Antenne nere. Torace nel dorso e ne' lati nero: il petto interamente giallo. Addome nero: lo spazio mem-

branoso del primo anello, gli anelli dorsali quarto e sesto per intero, il margine posteriore del settimo prolungato angolarmente in avanti nel mezzo, il margine posteriore degli anelli ventrali e l'ano giallo-cedrini. Piedi, comprese le ánche e i trocanteri, gialli: la faccia posteriore de' femori, quella delle due tibie posteriori in parte, nere: tarsi posteriori bruno-giallicci. Ali incolori.

Ichneumon insignitus, nob.

I. niger, scutello et abdominis segmentorum 3-7 fascia marginali interrupta albis; antennis pedibusque rufis, illis apice nigrigantibus; alis hyalinis, venis fuscis, stigmate testaceo. ♀ — Long. mill. 11.

Femina. Antenne nere con gli articoli 3 a 13 rossi. Capo nero; mandibole rosso-picee; palpi neri. Torace nero col solo scutello bianco: le aje del metatorace separate da forti rilievi, la supero-mediana quasi quadrata, i margini laterali della troncatura con minuto tubercolo acuto. Addome, oltre il picciuolo, ovoidale, assai finamente puntinato, nero; tutti gli anelli, dal terzo (compreso il picciuolo) in poi, con una fascia sul margine posteriore interrotta nel mezzo, bianca. Piedi rossi; i tarsi posteriori neri. Ali incolori, le vene nerastre, lo stigma testaceo, le tegole nere.

Cryptus haematorius, nob.

C. niger, thorace (sterno excepto) pedibusque partim obscure sanguineis; antennarum annulo albo; alis hyalinis, apice fumatis, anticis fascia ultra medium nigro-fuliginosa; terebra abdomen, segmento primo excepto, aequante. ♀ — Long. corp. mili. 11, tereb. 5.

Femina. Antenne nere: gli articoli 9-11 bianchi. Capo e palpi interamente neri. Torace di color sanguigno scuro, col solo sterno nero. Metatorace stivatamente punteggiato; il dorso con due linee rilevate che partono dal mezzo della base e descrivendo un arco di cerchio si portano al rispettivo lato, che raggiungono nel mezzo della lunghezza: la parte posteriore piana, senza alcun rilievo. Addome col primo anello più splendente, levigato, con qualche ruga longitudinale e due linee elevate: nel resto assai finamente puntinato. Trivella robusta, lunga quanto l'addome, dedotto il primo anello. Piedi neri; i due femori posteriori e la base di tutte le tibie di color sanguigno scuro. Ali incolori con la estremità affumicata; le anteriori inoltre con una fascia poco oltre la metà nero-fuliginosa.

Cryptus leucozonatus, nob.

C. niger, metanoto abdominisque segmento primo sanguineis; huius segmento quarto albo; antennis tricoloribus; pedibus anterioribus rufis; alis fumatis; terebra abdomine longiore. — Long. corp. mill. 10, ter. 7.

Antenne co' primi quattro articoli rossi, il 7° ad 11° bianchi, i rimanenti neri. Capo nero: il margine del labbro superiore rosso-picco. Palpi neri. Torace nero: il metatorace per intero di color sanguigno scuro, stivatamente punteggiato; il dorso sepa-

rato dalla parte posteriore da un delicato cordone, che nel mezzo de' lati si eleva in tubercolo acuto. Addome: primo anello sanguigno, con due carene longitudinali non prolungate fino al margine posteriore; il quarto interamente bianco latteo; i rimanenti neri. Trivella lunga quanto l'addome ed il metatorace insieme. Piedi; i quattro anteriori rossi, con le ánche e i trocanteri neri; i due posteriori neri con il disotto de' femori rosso. Ali fuligginose; areola pentagonale.

Paniscus lineolatus, nob.

P. gracilis, facie, orbitis, pronoto ac mesonoti lineis quatuor antice per paria conjunctis, albis. — Long. mill. 10.

Differisce dalle specie affini per le linee bianche del mesonoto simili a quelle dell' *Ophion obscurus*, talchè si potrebbe equivocare con individui piccoli di questa specie ove non si ponesse attenzione alle note generiche della disposizione delle nervature delle ali anteriori ed alla esistenza dell'areola.

Campoplex semiflavus, nob.

C. niger, mandibulis, palpis, antennarum articulo primo infra, pedibus anterioribus, tibiis posticis abdominisque fascia lata media saturate flavis; alis hyalinis, venis nigrofuscis, radice tegulisque albidis; terebra brevissime exerta. ♀ — Long. mill. 10.

Femina. Antenne nere: il primo articolo inferiormente giallo. Capo nero: la faccia con brevissima pubescenza cenerina; mandibole e palpi gialli. Torace nero: il metatorace nella parte posteriore finamente striato per traverso, ed incavato per lo lungo nel mezzo. Addome nero: una larga fascia che occupa la parte posteriore del secondo anello, il terzo per intero e la metà anteriore del quarto di un bel giallo di cromo. Trivella lunga quanto il sesto anello addominale. Piedi: i quattro anteriori gialli con le sole ánche nere; i due posteriori neri con le tibie gialle. Ali incolori, le vene e lo stigma neri, la radice e le tegole giallo-pallide.

Cremastus pleurovittatus, nob.

C. niger, orbitis, ore, mesonoti lineis quatuor mediis posterius cohalitis, vitta longa mesopleurarum, abdominis segmentis 3-5 in margine postico, ventre coxisque albis; femoribus tibiisque pedum anteriorum testaceis; terebra abdomine vix breviore; alis hyalinis venis stigmateque magno nigris, radice tegulisque albis. ♀ — Long. mill. 8, ter. 4.

Specie molto elegante, affine al *C. interruptor*, Grav., dal quale, come da altri, distinguesi per una striscia bianca molto spiccata che scorre obliquamente lungo ciascuno de' fianchi, proprio sopra la pleura media, di cui percorre tutta la lunghezza.

Lyssonota maculipennis, nob.

L. capite thoraceque nigris, orbitis, thoracis lineis quatuor, guttis duabus utrinque pectoralibus, alarum radice et tegulis albis; abdomine pedibusque rufis, illo articulo ultimo, his coxis et trochanteribus tantum nigris; terebra corpore parum breviore; alis hyalinis, macula ante apicem costam tangente nigro-fumata. — Long. mill. 11.

Femina. Antenne nere. Capo nero: il contorno orbitale bianco, interrotto solo nella parte inferiore. Labbro superiore giallo. Mandibole nere con una breve linea gialla nella parte esterna del margine anteriore. Palpi bruni. Torace nero: mezzo del pronoto, una linea innanzi l'attacco delle ali anteriormente dilatata dal lato esterno, altra linea contigua e parallela a questa ed anteriormente dilatata dal lato opposto, una corta linea sotto l'origine delle ali e due macchioline su cadaun fianco (una sulla mesopleura, l'altra sulla metapleura) bianche. Addome rosso con l'ultimo articolo solo nero: trivella lunga quanto il torace ed addome presi insieme. Piedi rossi: le ánche e i trocanteri neri. Ali incolori; vene nere, la costale, la radice e le tegole bianche; le anteriori con una macchia ben determinata nericcia posta poco innanzi l'estremità, toccando la costa.

In uno degl' individui le due linee del torace sono interrotte nel mezzo.

Eupelmus albitarsis, nob.

E. niger, subnitidus, antennarum scapo geniculisque testaceis; tibiarum summo apice tarsisque albis; alis superis abdomine multo brevioribus, mox ultra basim erectis, fere coriaceis, sublanceolatis; terebra abdominis dimidio breviore. ♀ — Long. mill. 2 ½.

Emitteri

Lygaeus gibbicollis, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 12).

L. rufus, antennis ex parte, capite, pronoti maculis duabus posticis, scutello, elytrorum corii puncto medio, pectore ex parte, segmento ultimo abdominali femoribusque nigris; elytrorum membrana abbreviata, nigra, angulo baseos maculaque media lacteis; pronoti parte antica transverse elevata convexa laevi nitida, postice in medio in carinulam protracta. ♂ ♀. — Long. mill. 4.

Siccome abbiam detto nel nostro Rapporto preliminare, questo Ligeo è affinissimo al *punctato-guttatus*, differendone però organicamente per una diversa fattezza del protorace. Qui la porzione posteriore del lobo anteriore si eleva in una specie di grosso cordone, convesso, levigato e splendente. Le elitre ànno la membrana corta e non coprono interamente l'addome. Anche nel colorito vi ha qualche differenza di secondaria importanza.

Osservazione. Il signor Puton, cui abbiamo comunicato questo Ligeo, opina ch'esso possa considerarsi come una forma brachiptera del *punctato-guttatus*, e che la diversità

della fattezza del torace sia una conseguenza di questo fatto. Noi rispettiamo l'opinione del nostro chiaro collega; però non sapremmo vedere un legame organico tra un minore sviluppo dell'elitre ed un cangiamento di forma del torace. Il *Prostemma guttula* è un esempio più spiccato che offre la forma macroptera e la brachiptera; ebbene, il protorace non cambia menomamente di forma. Tra gli stessi Ligeidei il *Lamprodema maurum* ed altri affini presentano del pari le due forme quanto a sviluppo di elitre, ma identiche in quanto a conformazione di torace. Che se qualche volta si osserva un accorciamento e difformazione nel protorace, ciò potrà essere per anomalia. D'altronde noi abbiamo rinvenuti parecchi individui tutti tra loro identici. Sicchè filosoficamente noi conveniamo col signor Puton che esso sia una derivazione della specie comune, ma sistematicamente non possono confondersi in una. Invece noi diciamo che il *L. gibicollis* sta al *punctato-guttatus* come il *Satyrus Neomiris* sta al *Semele*, il *Nurag* al *Janira*, ecc.

Harpactor argenteolineatus.

H. niger, scutelli apice albido, abdominisque maculis lateralibus flavis; pronoto cruce e pilis brevibus crassis erectis, in sulcis congestis, argenteis notato. — Long. mill. 7.

Singolare è questo piccolo *Harpactor* per la croce argentina del protorace risultante da peli rilevati posti nel fondo del solco longitudinale e trasversale. Anche la estremità bianca dello scutello è guarnire di una frangia di peluzzi corti e doppii assai ravvicinati. Altri piccoli peli argentini trovansi sopra i fianchi.

La specie con la quale à maggiore affinità pare sia il *lividigaster*, M. R.

Tibicina luctuosa, nob.

Nella collezione d'insetti sardi esistente nel Museo di Torino, appresso alla *Cicada cisticola* ve n'à un'altra etichettata dallo stesso Genè *C. luctuosa*. Pare però che questa seconda, forse per mancanza d'individui, non l'abbia comunicata ad alcun entomologo; come fece per l'altra che è comunissima; dappoichè, mentre quella à già preso posto nelle opere, della *luctuosa* nessuno fa menzione, nè vi corrisponde alcuna descrizione. Per la qual cosa ne indicheremo i caratteri, conservandole il nome appostole dallo stesso Genè.

Per le fattezze de' piedi e per l'abito generale simiglia moltissimo alla *cisticola*: ne differisce principalmente per la faccia molto meno protuberante e percorsa verticalmente da un canale quasi ellittico (nella *cisticola* è lineare) e per le vene delle ali superiori nere, rimanendo gialla soltanto la costale dalla base fino allo stigma. Lunghezza del corpo mill. 20; con le ali piegate mill. 31.

Trirhacus formosissimus, nob.

Capo giallo-fulviccio pallido; la fronte e la parte superiore della faccia nere con le carene fulve. Torace giallo-fulvo con una grande macchia nera da cadaun lato che occupa lo spazio che rimane tra gli occhi e l'angolo omerale delle elitre. Addome nero coi pezzi genitali gialli ♂; bruno rossastro ♀. Elitre semitrasparenti, di un bianco ceneri-

no: tutti i nervi con granuli neri portanti una setola; anche lo spazio marginale è guarnito di granuli setoligeri, disposi in unica serie prossima e parallela al margine costale. Tra le principali nervature vi ha de' tratti più o meno lunghi brunastri; tre macchie dello stesso colore nello spazio marginale; presso il margine posteriore una serie di cinque a sei macchie di un nero intenso e come verniciate. Ali inferiori di un bruno-cenerino che nella parte esterna ed apicale passa al bianco latteo. Piedi giallicci: base ed estremità delle tibie anteriori più oscura. Lunghezza con gli elitri al posto mill. 5 $^1/_2$.

Quando la materia colorante fa difetto mancano le macchie oscure nell'elitre: prime a scomparire sono le macchie dell'intervallo esterno, indi i tratti interposti ai nervi primari longitudinali; di modo che esse rimangono completamente di un bianco-cenerino con i granuli e la serie di macchie posteriori nere.

Molto affine al *Tr. setulosus* Fieb. di Grecia: ne differisce però essenzialmente per l'intervallo esterno degli elitri guarnito di granuli setoligeri.

Histeropterum areolatum, nob.

H. brunneo-rufescens, elytris obscure griseis margine externo toto albo-flavicante, caeterum pallido reticulatis; fronte subquadrata, vix convexiuscula, carina unica parum elevata et superne fere exoleta: vertice anterius haud angulato, longitudine duplo latiore. ♀ — Long. cum elytr. mill. 4.

Fronte lunga poco più della massima lunghezza, leggermente convessa, con solo la carena mediana, e questa ancora assai poco rilevata: i margini laterali leggermente arcuati. Vertice anteriormente quasi diritto, con delicato solco mediano che lo divide in due aje esattamente quadrate. Colore generale del corpo bruno-rossastro il dorso dell'addome più oscuro coi margini posteriori degli anelli pallidi. Elitre di color pallido: i settori nerastri: gli spazii interposti con una o due serie di macchie di color grigio oscuro assai ravvicinate, per modo che del colore pallido fondamentale rimane quasi una rete. Tutto il margine di un bianco puro.

Questa specie non trovasi nel catalogo perchè spettante alla collezione di settembre. Nella Memoria prima trovasi nominata, non descritta.

Ditteri

Usia taeniolata, nob.

U. fusco-cinerascens, albido pubescens; abdominis dorso atro, segmentis omnibus albo marginatis; pedibus nigris; alis hyalinis, halteribus albidis. — Long. mill. 3 $^1/_2$.

Notevole è questa specie pel colorito della superior parte dell'addome, che è di un nero intenso come velluto, col margine di cadaun anello bianco.

Dioctria concinna, nob.

D. gracilis, nigra, facie argenteo tomentosa, pogonio fulvo-argenteo; pedibus fulvis, tarsis omnibus tibiisque posticis nigris; alis vix fumatis, halteribus flavis. — Long. mill. 8 a 9.

Corpo interamente nero: la faccia a tomento argentino-gialliccio: dello stesso colore è la barba: un simile tomento vedesi su'margini delle pleure. Piedi fulvi: i quattro anteriori con i tarsi più oscuri o nerastri, i due posteriori con le tibie ed i tarsi neri. Ali leggermente affumicate; bilancieri gialli.

Thereva bicinctella, nob.

F. nigra nitida, parce albido pubescens; thoracis vittis quatuor dorsalibus cinerascentibus, duabus mediis approximatis: abdomine cingulis duobus albis (in segmentorum 2 et 3 margine postico); alis nigro-fuliginosis. — Long. corp. mill. 7 ♂, 8 ♀.

Corpo di color nero splendente: faccia con splendore argentino; parte inferiore del capo e petto con morbida peluria bianca; dorso del torace con quattro strisce longitudinali grigio-cenerognole poco marcate: secondo e terzo anello col margine posteriore bianco sì nella parte dorsale, che nella ventrale, formandosi per tal modo due anelli completi delicati di un bianco d'avorio. Ali nero-fuligginose: bilancieri col picciuolo nero ed il capitello o clava bianco d'avorio.

Echinomya tricondyla (coll. Rond.), nob.

E. nigra, facie genisque argenteo micantibus, genis nudis; thoracis lobis humeralibus, scutelloque fusco-rufis, abdomine omnino rufo setis nigris, pedibus fusco-rufescentibus; alis subfumatis, basim versus flavescentibus; calipteris albis. — Long. mill. 9.

Capo a splendore argentino leggermente dorato: un'ampia striscia bruno-rossastra parte dalla base delle antenne e termina al margine occipitale: gote completamente nude. Antenne coi due primi articoli di color nerastro con l'estremità di cadauno rossiccia: il terzo articolo di un nero intenso. Palpi fulvi. Torace nero cangiante in cenerognolo: i lobi omerali, lo spazio innanzi la base delle ali, e lo scutello rosso-fulvi. Addome interamente rosso-testaceo: il primo e secondo anello con due sole setole nel mezzo del margine posteriore: il terzo con dieci setole sul margine posteriore. Piedi rossicci: i femori con una macchia nera nella faccia posteriore presso la estremità. Ali un poco affumicate, giallicce verso la base. Caliptere bianche.

Conserviamo per questa Echinomia il nome stesso col quale ne abbiam trovato etichettato dal Rondani un individuo esistente nella di lui collezione, senza indicazione di provenienza. Pare che sia rimasta inedita, almeno nelle di lui opere che sono a nostra conoscenza non la troviamo.

Chlorops fuscipennis, nob.

C. nigra nitida, capite thoraceque flavis, illo macula verticis triangulari longe anterius producta, hoc vittis quinque nigris; abdomine dorso nigro, ventre utrinque pedibusque flavis vel rufescentibus; alis nigro-fuscis.—Long. millim. 5.

Capo giallo pallido; una macchia triangolare nera parte dal margine occipitale ed anteriormente si prolunga in punta assai acuta fino alla origine delle antenne: dalla base di essa parte da cadaun lato una linea trasversale che portasi dietro gli occhi rasentandoli ed arrestandosi alla meta dell'ampiezza di questi: i margini delle gote e due trattolini verticali sotto la inserzione delle antenne bruno-neri. Palpi gialli con la estremità bruna. Antenne bruno-rossicce. Torace giallo con cinque strisce longitudinali nere: le tre mediane egualmente larghe, l'impare comincia dal margine anteriore e si arresta prima di giungere allo scutello: le due altre cominciano molto più in dietro e pel contrario giungono sino al margine posteriore; le due esterne sono più delicate e limitate alla metà posteriore; una linea obliqua parte dalle strisce laterali, passa innanzi alle esterne e si termina su' fianchi: un punto nero su' lobi omerali. Piedi rossicci. Scutello giallo. Un tratto sulla mesopleura ed una macchiolina sulla metapleura, neri. Addome nero nel dorso: ventre giallo o rossiccio ne'lati. Ali oscuramente fuligginose: vene nere. Bilancieri gialli.

In qualche individuo le linee esterne del torace dilatandosi si uniscono più o meno alle laterali.

Miriapodi

Glomeris lunatosignata, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 5).

Gl. dorso laevissimo, nitidissimo, fusco-nigro, segmento singulo lunulis binis oppositis valde obliquis a medio baseos ad marginem posticum ductis, lineaque utrinque transversa, (in segmento ultimo tantum deficiente) pallide flavis; subtus cum pedibus flava.— Long. mill. 8; lat. m. 5.

Corpo superiormente bruno-nero, levigatissimo e splendente, come verniciato. Il capo ha due tratti trasversali giallo-pallidi. Tutti gli anelli, eccettuato l'ultimo, hanno due lunule, che partendo dal margine anteriore molto prossimamente al mezzo, si portano obliquamente in fuori l'una all'altra opposte per la convessità ed assottigliandosi si terminano sul margine posteriore: più, da cadaun lato un tratto trasversale, attiguo e parallelo al margine anteriore, di color giallo assai pallido o bianco-gialliccio. L'ultimo anello semicircolare ha le sole due lunule, più ampie. Il margine posteriore di tutti gli anelli è bianco. Il disotto co' piedi è giallo pallido.

Geophilus crassicauda, nob.

Non ostante i Geofili, come tutti gli altri Miriapodi, siano molto stati studiati dal prof. Fanzaco, pure noi incontriamo difficoltà a riconoscere nelle descrizioni che se ne

dànno qualcuna delle specie da noi raccolte in Sardegna. Una di queste ha molta affinità col *G. Canestrinii*, Fedr. Però le antenne, sebbene ingrossate e in forma di clava allungata, non sono lunghe quattro volte quanto il capo, ma soltanto due volte e mezzo. I piedi anali sono corti e crassi, con articoli trasversali, privi di uncino. Una massima differenza però deve riconoscersi nella forma totale del corpo, che nel *Canestrinii* dicesi *fusiforme*, mentre nel nostro è angusto, gracile, lineare.

La lunghezza dell'individuo che possediamo è di millimetri 45.

Aracnidi

Formicina Eleonorae, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 5).

F. cephalothorace subovoideo, anterius truncato, posterius magis angustato, abdominis articulo petiolari minuto, subquadrato; brunnea, abdomine dorso maculis utrinque tribus flavidis, argenteo micantibus; pedibus fulvis, femoribus quatuor posterioribus nigricantibus. — Long. mill. 4.

Capotorace ovoidale, troncato in avanti, ristretto e prolungato in dietro: l'articolo che resta tra il capotorace e l'addome quasi tanto lungo, che largo. Colore bruno: addome con sei macchie laterali (tre per lato) di color bianco-gialliccio con cangiante argentino: due presso la base, due più grandi trasversali nel mezzo della lunghezza, due in dietro. Piedi fulvi: i quattro femori posteriori nerastri alla base.

Crostacei

Caridina Desmarestii, Mill.

Questa specie osservata vivente ci si è presentata con due distinte varietà di colorito:

a) Corpo bruno-rossiccio, con una striscia dorsale biancastra, marginata di bruno dall'uno e l'altro lato. — Abbondantissima nel Rio Manno a Decimoputzu.

b) Corpo di color verdastro pallido, tutto puntinato di bruno, con una linea dorsale oscura, trasparenza del canale digerente. — Abbondante nel Tirso presso Oristano. — Le femmine in maggio aveano le frange ventrali cariche di uova giallastre.

Gammarus fontinalis, nob.

Antennae superiores inferioribus longiores, scapo tertiam fere totius antennae partem formante atque apice dimidium articuli ultimi scapi inferiorum attingente, flagello 28-30 articulato, piloso: antennae inferiores breviores, scapo dimidiam fere longitudinem occupante. Abdominis segmenta tria ultima dorso mutica, margine postico spinulis paucis decumbentibus ornata. — Long. mill. 10.

Affinissimo è certamente questo *Gammarus* al *fluviatilis;* ma ne differisce nettamente per la mancanza delle spine che si elevano dal dorso degli ultimi tre anelli ad-

dominali. Invece i detti anelli sono completamente lisci e privi di spine nel dorso, e solo nel margine posteriore presentano poche spinuzze rivolte in dietro.

Osservazioni. — Gervais si avvide che nelle acque dolci de' contorni di Parigi vi ha due specie di *Gammarus*, generalmente confuse co' nomi specifici di *pulex*, *aquaticus* e *fluviatilis;* l'una con gli ultimi tre anelli addominali sormontati da spine, l'altra coi detti anelli lisci ed inermi. Egli applicò alla seconda o inerme il nome di *fluviatilis* e diede alla prima o spinosa il nome di *Roeselii*. Ciò lungi dal distrigare la confusione l'accrebbe; ed i zoologi posteriori, come Edwards e Spence Bate hanno ritenuto il nome di *Roeselii*, qual sinonimo del *fluviatilis*, senza però parlare dell'altra specie. Noi quindi riconosciamo ancora due specie tra quelle trovate in acque dolci, e ci vediamo nella necessità il contrassegnar una di esse con altro nome. Al che si aggiunge che nel nostro vi ha le spinuzze marginali, di cui non parla Gervais. Le antenne sono come nel *fluviatilis*.

Philoscia longistila, nob.

P. appendicibus caudalibus superioribus inferiores quadruplo superantibus: thoracis superficie irregulariter sculpturata, brunnea, flavescente varia. — Long. corp. mill. 8.

Non ostante la grande simiglianza con la specie comune per quanto riguarda fattezze e colorito del corpo, se ne distingue a primo aspetto per la lunghezza delle appendici codali. Le superiori, ossia ultimi falsi piedi addominali, hanno il primo articolo brevissimo, da non eccedere l'estremità dell'ultimo anello dell'addome, il secondo lungo quattro volte più di quello ed in forma di stile trigono. Le appendici inferiori eccedono di poco il primo articolo delle superiori. In oltre l'ultimo anello ha forma diversa, meno acuto ed a margini laterali leggermente arcuati. Gli angoli latero-posteriori degli ultimi tre anelli addominali sono meno prolungati in dietro: la superficie del corpo è minutamente cesellata.

Gen. Iglesius, nob. (Fam. Oniscideorum).

Corpus ovato-ellipticum, capite profunde emarginato, ac inde bifido. Antennae breves, crassae, 6-articulatae, articulis primis tribus brevibus, quarto longiore depresso subrectangulo, duobus ultimis flagellum formantibus, eorum primo brevissimo. Caetera fere ut in g. Platyarthrus, Bran.

Per la costituzione delle antenne simiglia molto al genere *Platyarthrus*, da cui differisce per la speciale forma del capo, che anteriormente si prolunga, ed è profondamente intaccato in guisa da rimaner diviso in due lobi triangolari ottusi. In quanto alle antenne, sebbene molto simiglino, pure vi ha differenza in ciò, che nei *Platyarthrus* il flagello è costituito da un solo articolo (quindi l'antenna intera risulta di cinque articoli) nella cui base vi è un leggiero indizio di divisione annulare; mentre nel nostro è formato da due articoli ben distinti.

Iglesius coccineus, nob.

M. ovato-ellipticus, modice convexus, subtilissime granulosus, dorso costulis decem longitudinalibus parallelis ornato; laete coccineus, unicolor. — Long. mill. 3.

Corpo ovato-ellittico, mediocremente convesso, a superficie minutissimamente e stivatamente granellosa, e con dieci costole parallele che ne percorrono tutto il dorso. Il capo anteriormente si avanza e si divide in due lobi triangolari ottusi: in cadaun lato si spiana in lamina leggermente inarcata in avanti, tagliata obliquamente in dietro. I lati del primo anello toracico si avanzano angolarmente raggiungendo quasi gli angoli del capo. Gli ultimi tre anelli addominali si prolungano obliquamente in dietro da cadaun lato. Le due appendici sono lunghe quasi quanto i due ultimi anelli addominali, di due articoli, il primo lungo e cilindraceo, il secondo men che metà del primo, ovoidale. Il colore è uniformemente cocciniglia; esso si conserva tuttavia nell'animaletto conservato in alcool già da oltre un anno.

Gen. Syngastron, nob. (Syntomagaster, Rapp. prelim. p. 4 [1]).

Corpus armadilliforme. Antennae internae omnino nullae. Abdominis segmenta quatuor anteriora coalita in scutum valde convexum, utrinque incisuris duabus linearibus notatum et postice infra pro segmenti ultimi receptione emarginatum. Appendices caudales lamellosae ab abdominis scuto omnino tectae.

La forma generale dal corpo è quella degli *Armadillo* ed *Armadillidium;* e come in questi suscettivo di ripiegarsi a globo. Il capo anteriormente si termina da una piastra frontale trasversale verticale. Esternamente a questa piastra frontale stanno impiantate le antenne esterne, composte di sei articoli, de'quali il primo grosso rimane incastrato tra la piastra frontale ed il margine del capo, il secondo è brevissimo trasversale, il terzo corto nodiforme, gli altri tre cilindracei. Di antenne interne non vi ha alcun vestigio. L'addome è costituito da uno scudo molto convesso, il quale su cadaun lato presenta due incisure trasversali lineari (limiti degli anelli saldati) e posteriormente-inferiormente ha una smarginatura quasi rettangolare, nella quale prende posto l'ultimo anello. Le appendici codali sono rappresentate da due piccole lamine, le quali rimangono completamente nascoste sotto l'ultimo anello addominale.

Syngastron dasypus, A. Cost. (Rapp. prelim. p. 4).

S. capite thoraceque dorso laeviusculis; abdomine spinulis exilissimis et brevissimis hispidulo carinulisque duabus medianis obsoletis interruptis; griseus, flavescenti variegatus. — Long. mill. 16, lat. 9.

A ragione delle appendici codali laminari e nascoste completamente sotto l'addo-

[1]) Il nome di *Syntomagaster* trovandosi quasi identicamente (*Syntomogaster*) impiegato da Schiner per un genere di Ditteri Muscidei, l'abbiam dovuto abbandonare.

me si avvicina al genere *Tylos*, col quale formar può una famigliuola ben distinta. Se ne distacca per gli anelli addominali, ad eccezione dell'ultimo, saldati insieme, in un grande scudo, rimanendo tracce delle divisioni nelle due rime trasversali che si osservano su' lati. Ancora l'assoluta mancanza di ogni vestigio di antenne interne aggiunge differenza.

Cypris sardoa, nob.

S'egli è difficile dichiarare nuova una specie di *Cypris*, non è men difficile il riconoscere quella tra le già descritte cui meglio si possa riferire. Tra le molte che sono conosciute, e quasi tutte di contrade più o meno settentrionali, ve ne ha certamente qualcuna cui questa di Sardegna maggiormente simiglia; e dessa crediamo sia la *C. conchacea*. Senza però l'immediato confronto degli oggetti in natura il giudizio è sempre non abbastanza sicuro. Per la qual cosa, anzichè apporre un nome che potesse in seguito riconoscersi non conveniente, preferiamo indicarla con un nome nuovo, anche a rischio di vederlo rimandato tra sinonimi. Si crea minor imbarazzo con questo secondo sistema, che col primo.

La conchiglia è oblunga, ha il margine dorsale mediocremente inarcato, col massimo d'incurvatura un poco innanzi la metà della lunghezza; il margine ventrale quasi dritto; i due estremi egualmente ritondati. Il colore, vivente l'animale, è un bel fulvo castagnino: nel secco è fulvo pallido: le valvole prive dell'animale divengono bianchicce e trasparenti. — Lunghezza de' maggiori individui mill. 1 $^3/_4$; amp. mass. mill. 1.

finita stampare il dì 30 giugno 1883

ALCUNI ERRORI A CORREGGERE

Pag.	6	verso	22	*Cythere*	leggi	*Cypris*
»	7	»	41	*Cythere, Daphne*	»	*Cypris, Daphnia*
»	10	»	26	*Holocranum*	»	*Holcogranum*
»	50	»	1	*leucurus*, nob.	»	*anoguttatus*, Suff.
»	64	»	32	*albitarsi*	»	*albitarsis*

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

RICERCHE MICROSCOPICHE SULLE TRACCE DELLE SCINTILLE ELETTRICHE INCISE SUL VETRO, E SUI DIAMETRI DELLE SCINTILLE ISTESSE

MEMORIA

del Prof. EMILIO VILLARI

Letta nell'Adunanza del dì 7 aprile 1883.

Quando si carica o scarica istantaneamente un condensatore si producono sul vetro, a partire dagli orli delle armature, le note frange luminose, che ho distinte in quelle di *carica* e di *scarica*. Esse modificano la superficie verniciata del vetro così, che poscia alitandovi sopra vi si producono delle estese e fugaci ramificazioni o figure roriche, corrispondenti alle due specie di frange, le quali mostransi separate e distinte, come ho indicato in altra occasione [1]). Tali frange o scintille elettriche, col ripetersi, alternano profondamente la vernice a lacca dei condensatori; i quali perciò debbono non di rado essere riverniciati; e consimili alterazioni, ed assai più prontamente produconsi nei dischi mobili della macchina Holtz, per analoghe cagioni.

Se però un condensatore si carica oltremisura, avviene spesso la sua scarica totale spontanea, che ha luogo per mezzo di una grossa scintilla, la quale scavalcando il bordo libero del vetro, mette in comunicazione le due armature. Codesta vigorosa scintilla, formata da uno o più rami, lascia sulla faccia verniciata del vetro una traccia permanente ed assai distinta, che risulta come da due nastrini vicini e paralleli, di una tinta a splendore quasi grafitico; i quali due nostrani mentre racchiudono una sottile zona di vernice inalterata, pure risultano da una decomposizione più o meno profonda della vernice istessa cagionata dalle vigorose scintille.

Ma le scintille possono generare delle tracce assai più cospicue. Il Riess faceva strisciare le scintille elettriche sul vetro duro e sul quarzo, e vi produceva delle tracce ruvide all'unghia e simile alla smerigliatura fatta con sabbia grossa [2]). Sul vetro tenero la scintilla vi lascia, secondo il medesimo fisico, una traccia di una certa profondità,

[1]) *Sulle figure elettriche dei condensatori.* — Atti dell'Acc. d. S. d. Bologna. Serie IV, Tom. III, p. 663, 1882.
[2]) Riess, *Reibungselekhicität*, § 553 e 773.

ruvida all'unghia, e dovuta alla separazione della potassa. Sulla mica finalmente egli ottenne delle tracce più distinte e di profondità decrescenti dal mezzo ai bordi di esse.

Tali sono, per quanto io mi sappia, le notizie intorno a questo soggetto, del quale ho ripreso lo studio; e sono riuscito a produrre sul vetro delle bellissime incisioni elettriche, le quali qui di seguito verrò esaminando.

Le tracce delle scintille si possono produrre su varie sostanze, ma fra tutte quelle da me esaminate, sono più adatte le lastre degli specchi argentati del commercio, sia con lo strato speculare sia senza di esso. Devo bensì far notare che nè tutte codeste lastre, nè le due facce di una stessa lastra, si prestano egualmente bene a ricevere le indicate impronte delle scintille.

L'apparecchio adoperato per queste ricerche è indicato nella fig. 1ª, Tav. I: in essa si vede una delle mie solite batterie [1]) di 12 o 24 bottiglie, BB', isolata ed unita alla bottiglia elettrometrica E, che ne misurava le cariche: la lastrina *l*, sorretta da apposito piede *s*, era tenuta alcune volte verticalmente, fra gli elettrodi isolati *i* ed *i'* d'uno spinterometro *uu*, ed altre volte era orizzontale ed isolata; nel qual caso gli elettrodi *i* ed *i'* appoggiavano inclinati e convergenti in basso sulla faccia superiore della indicata lastrina [2]). Inoltre scorgesi l'elettrodo *i* unito ad un filo di rame che per mezzo della bacchetta d'ebanite *f* si poteva immergere nel bicchierino a mercurio *b*, cominciante con l'armatura esterna della batteria: e l'elettrodo *i'* comunicante con l'eccitatore I, a pallina platinata; la quale quando si abbassava contro quella *p*, scaricava la batteria.

Ciò premesso le esperienze furono praticate nel modo seguente. Si caricava la batteria BB' con una Holtz HH; quindi si riuniva *f* con *b* e poscia s'abbassava con un'asta di ebanite l'interruttore I: la scarica avveniva nella direzione I*i' ib*B', indicata dalle frecce; e la scintilla strisciando sul vetro vi rimaneva la sua impronta. Ad ottenere una seconda immagine si spostava opportunamente la lastra, e si ripeteva l'esperienza. Nel caso della lastra orizzontale le tracce si producano nel medesimo modo, ed esse presentano allora i due poli sulla stessa faccia della lastra; ma spesso accade, così operando, che la scintilla salta fra gli elettrodi, lasciando sul vetro una brevissima traccia. Ad evitare questo inconveniente è meglio disporre la lastra verticale, coi due elettrodi normali alle sue facce, disposti ad opportuna distanza da uno dei bordi, come indicano le figure 2 e 3, affinchè la scintilla di scarica possa passare dall'uno all'altro elettrodo.

Comunque ottenute le immagini sul vetro, esse sono più o meno larghe a secondo dell'energia della scintilla che le ha prodotte; e quando la lastra è adatta e la carica sufficiente, s'ottengono delle tracce assai cospicue, di bella apparenza e formate da una serie di zone a diversi colori e con isplendori metallici. La fig. 1ª, Tav. II, rappresenta una di codeste tracce, lievemente ingrandita, la quale osservata per trasparenza sul vetro mostra: 1° una zona centrale longitudinale e serpeggiante, che è formata da vetro rugoso; quindi procedendo verso uno dei lati s'osserva; 2° una zona sottile, a contorni ben netti; 3° una zona a contorno esterno poco definito, che apparisce come di vetro terso; 4° una zona più larga, opalina e lievemente grigio-perla; 5° una zona assai più larga e trasparente: e finalmente succede una 6° zona trasparente, poco visibile ed a contorni irregolari e mal definiti. Quando poi la traccia s'osserva per riflessione le zone riescono meno distinte e perciò meno numerose.

[1]) Per la descrizione di essa v. la mia Memoria *Sulla lunghezza di una o più scintille*, ecc., R. Acc. d. Lincei. Roma 1882.

[2]) Come eccitatore riesce utilissimo in queste ricerche il sostegno universale di Edelmann indicato nella figura.

Nella fig. 2ª, Tav. II, è riprodotta l'immagine d'una traccia incisa da una scintilla di 96 unità, accumulate in 24 bottiglie[1]) e scattata fra gli estremi di fili di platino. Tale traccia fu ottenuta con la disposizione della lastra della fig. 2ª, Tav. I, e perciò è mancante di uno dei suoi poli. L'immagine è simile alla precedente, solo le zone sono un po' più avvicinate e quindi meno distinti ad occhio nudo. Ma osservata per trasparenza col microscopio Hartnak, con un lieve ingrandimento, circa 30 diametri, essa apparisce oltremodo distinta, così che con la camera chiara ne potei disegnare esattamente l'immagine, un breve tratto della quale è esattamente riprodotto nella fig. 3ª, Tav. II: nella quale le varie zone facilmente possono essere classate nel modo seguente:

1° La prima zona *aa*, che chiameremo assiale o *scagliosa* per la sua natura, risulta formata dalla superficie del vetro rotto in minutissime scaglie, che formano una specie di pavimento a lastre poligonali, irregolari e molto sottili, come può osservarsi in alcune che facilmente si staccano. 2° A questa segue la zona *grigia nn*, che consta di una punteggiatura fine e spessa, e produce come un nastro di color grigio-oscuro, situato su parte della zona scagliosa che vi si estende al disotto. 3° Quindi succede una zona quasi tersa *bb* e poscia una 4ª zona o *gialla cc*, situata sulla solita zona scagliosa che ivi si termina. Codesta zona gialla è formata da una punteggiatura che sembra più fitta e più regolare della grigia. 5° Poi segue una zona quasi tersa *dd*, alla quale succede la 6ª *ee*, consistente in una specie di polviscolo uniformemente disseminato, con dei vani di vetro terso. Poscia segue la 7ª zona *gg* reticolata o *limitante;* quindi l'8ª *hh*, di vetro che sembra terso, e poi la 9ª *ii* che apparisce come di vetro appannato dall'alito o da polviscolo finissimo; e con essa si termina la figura, con un contorno irregolare e sfumato.

Cosicchè lasciando da banda le varie zone terse del vetro, noi potremo dire che nella traccia della figura in discorso si osservano:

1. La zona scagliosa, *aa*,
2. » grigia, *nn*,
3. » gialla, *cc*,
4. » formata dal polviscolo, *ee*,
5. » limitante, *gg*,
6. » ultima, *ii*.

La stessa traccia però vista per riflessione e col medesimo ingrandimento mostra le tre prime zone assai distinte, e le ultime tre si confondono in una sola più ampia ed estesa. Le accennate zone son poi egualmente disposte da ambedue i lati di quella scagliosa, rispetto alla quale la scintilla può dirsi simmetrica.

Ho quindi esaminato codeste zone ad un ingrandimento di circa 700 diametri, dato dall'oculare 3 obbiettivo 9 Hartnak col tubo tutto allungato, ed ho osservato che la zona grigia risulta di punteggiatura, fatta da globettini oscuri irregolarmente disseminati e confitti sul vetro screpolato. La zona gialla consta del pari da punteggiatura, ma i globetti sono sensibilmente più piccoli, più fitti e più regolarmente

[1]) Le bottiglie da me adoperate erano cilindriche (fig. 1, Tav. I) alte 50 cm. 13 cm. di diametro, e rivestite di stagnole pei due terzi della loro altezza. La bottiglia elettrometrica aveva 114^{mm} di diametro ed una armatura esterna di 165^{mm} di altezza: la scarica avveniva fra palline di $22^{mm},2$ di diametro e distanti 5^{mm}.

*

disseminati sul vetro screpolato, così da formarvi uno strato più regolare ed omogeneo. La 4ª zona *ee*, sembra costituita da vetro stato alterato secondo delle linee curve che si intrecciano e prendono l'aspetto d'un reticolato, fig. 4ª, Tav. II, con dei vani di vetro terso; ed inoltre su tutta codesta zona trovansi irregolarmente disseminati di quei globettini che notammo trovarsi nelle zone punteggiate.

L'ultima zona o la 6ª *ii*, osservata con lo stesso ingrandimento ha l'apparenza disegnata nella fig. 5ª, Tav. II, e sembra formata come da un polviscolo uniformemente sparso sul vetro, che si mostra terso in alcuni vani lasciati dall'indicato polviscolo: il quale sembra esservi stato proiettato dall'azione della scarica elettrica sul vetro.

La zona 5ª *gg*, intermedia a queste ultime, osservata a piccolo ingrandimento, mostrasi formata da screpolature del vetro, e limita in modo netto e distinto la traccia così da poterne determinare con sufficiente esattezza il diametro: ed essa può considerarsi come la zona che termina la traccia; giacchè l'ultima *ii*, fig. 3ª, può ritenersi come accidentale e non costituente la vera incisione della scintilla, come meglio si vedrà in seguito.

Tal'è l'aspetto generale delle tracce, prodotte da poderose scintille sul vetro; ma con scintille più deboli, le tracce diventano più sottili, l'aspetto loro si modifica ed alcune delle indicate zone vi fanno difetto. La fig. 6ª, Tav. II, fu ricavata con la camera chiara, e con un ingrandimento di 30 diametri, da una traccia di scintilla prodotta da 8 cariche in 2 bottiglie. Codesta figura è esattissima, e ne rappresenta con precisione l'immagine, nella quale difetta la zona scagliosa mediana, che è sostituita da una zona omogenea, di colore grigiastro. Seguono poscia 8 o 10 zone, che a partire dalla mediana diventano più larghe e distinte, ed hanno tutte una tinta bigio-turchiniccia variamente intensa. La figura inoltre corrisponde ad un sito della traccia che presentava come due nodi o strozzature, che però non si riscontrano sempre, e la traccia spesso si prolunga con grande uniformità.

La fig. 7ª ritrae l'immagine, incisa da una scintilla di sole due cariche accumulate in una piccola bottiglia di 10 cm. di diametro, e con armature alte 205^{mm}. In detta figura, presa con un ingrandimento di circa 30 diametri, scorgesi una zona mediana bigio-turchiniccia, quindi una zona da ciascun lato più estesa ed oscura; e da ultimo la figura si termina con due specie di nastri che la limitano assai nettamente.

Un esame minuto di varie tracce prodotte da scintille diversamente energiche, mi ha mostrato che quando scema l'intensità della scarica, si restringe la zona scagliosa e le due grige, situato su vetro screpolato, si fondono insieme. Poi queste possono ancora far difetto, ed allora sono quelle gialle che si osservano nell'asse della figura, ed al disotto di esse il vetro presenta delle fenditure da formar come una rete a larghe maglie. Tali apparenze osservai in una traccia stata prodotta da una scintilla di 24 cariche impartite a 6 bottiglie. In questa traccia però e verso l'uno dei suoi poli osservai un principio di zona scagliosa e tersa. Laonde possiamo dire che a traccia completa le zone più verso il centro son quelle che per prodursi hanno bisogno di maggiore energia nella scintilla, e forse di maggior colore di quelle successive; quindi nella scintilla è probabile che l'energia termica vada decrescendo dall'asse alla periferia.

Qualunque sia la natura di queste varie zone, è certo che lo stato o condizione fisica della sostanza che le produce è diverso in ciascuna; ed esse rimangono separate e distinte fra loro in modo netto e reciso e senza modificazioni graduali e continue. La qual cosa meglio può scorgersi nella traccia di una poderosa scintilla che scattò fra due

lastre di vetro soprapposte e distante fra loro di $0^{mm},1$, per due strisce di platino interposte che servivano da elettrodi. In tal modo la scintilla venne come schiacciata in un largo nastro, e la fig. 8ª, ritrae ad un ingrandimento di 45 diametri parte dell'immagine della traccia. In essa si osserva la consueta zona scagliosa *aa* tersa, assai più estesa che d'ordinario, e che è parte della zona assiale. Segue poi la zona grigia punteggiata *bb*, la quale quasi in tante guglie si spinge ed inietta verso l'asse e verso l'estremo limite della traccia. Tra codeste guglie, altre simili della zona gialla successiva *gg*, del pari s'iniettano, pur sempre rimanendo ben separate dalle prime. E finalmente in simil modo seguono tutte le altre zone fino all'estremo limite, dando alla traccia tutta, un medesimo aspetto.

Una idea dell'insieme di codesta traccia è data dalla fig. 9ª, ottenuta con un ingrandimento di soli 30 diametri circa. Essa per errore è stata capovolta rispetto alla precedente, con la quale ha comune le lettere: cosicchè la ragione *aa* risponde alla zona assiale o scagliosa e la *nn* rappresenta la zona estrema e più esterna della traccia: al di là della zona centrale *aa* seguirebbe l'altra metà della traccia simile a questa disegnata. È da notarsi però che a cagione del lieve ingrandimento col quale la figura fu disegnata le varie zone tra *nn* e *bb* difficilmente si possono separare e distinguere.

Circa alla natura chimica di codeste zone dirò anzi tutto, che feci incidere delle tracce da scintille scoccanti fra elettrodi di varie sostanze; e cioè di platino, di alluminio, di rame, di zinco, di stagno, di ferro, di argento, di ottone e di carbone da pila; e non riuscii a notare alcuna sensibile differenza fra loro, esaminate sia ad occhio nudo sia col microscopio. Invece esse differiscono d'aspetto se si adoperano vetri di diversa natura, come dirò in seguito, o se s'adopera la mica od il quarzo; giacchè su quella le tracce sono assai distinte e sembrano prodotte da alterazioni chimiche per effetto del calore, e sul quarzo si producono delle immagini a colori cangianti, dovute forse ai fenomeni delle lamine sottili, e che si direbbero generate da particelle metalliche divelte dagli elettrodi.

E ritornando alle tracce sul vetro, dirò come parte di esse sono assai stabili ed aderenti; così stropicciate, ed anche fortemente con l'unghia, rimane inalterata affatto la zona grigia, mentre la gialla un poco si striscia: le altre zone invece più o meno facilmente si alterano, e specialmente quella al di là della limitante, o zona estrema si esporta con facilità, ed apparisce come un semplice polviscolo depositato sul vetro; così che bene a ragione si disse quest'ultima zona accidentale, e non facente parte della traccia propriamente detta. Dalla zona scagliosa facilmente si riesce staccare delle lastrettine; e quando essa è molto screpolata, si può con facilità asportarne tutta intiera la parte superficiale, onde rimane lo strato inferiore e rugoso del vetro. Inoltre le tracce di scintille provenienti da elettrodi di platino o di ottone rimasero pressochè inalterate per l'azione prolungata dell'acido nitrico freddo o bollente, e per l'azione di una miscela dello stesso acido nitrico col muriatico; e solo dopo 10 o 12 ore di azioni di dette sostanze le tracce indicate apparvero pallide e prive delle ultime zone. Da questi fatti adunque io sarei inclinato a credere, che le varie zone delle tracce sieno generate dal calore che accompagna la scintilla nei varii suoi inviluppi, e per l'energia o durata sua il vetro superficialmente si screpola, e più o meno profondamente si decompone.

Quando si fa strisciare intiera la scintilla su una sola faccia d'una lastra, generalmente i due poli non lasciano immagini identiche; pure le differenze sono accidentali

e non si riesce dal loro aspetto determinare la natura dei poli. Inoltre se si dispone verticalmente la lastra come nella fig. 3ª, Tav. I, così da avere sulle due sue facce le tracce, si osserva in generale, che esse hanno diverso aspetto; e spesso una consta solo di una larga zona scagliosa, mentre l'altra si mostra del solito aspetto. Se però s' invertono i poli sulle due facce, si producono due nuove tracce affatto identiche alle prime, così che la loro differenza non è dovuta a diversità dei poli, ma a differenza delle due facce della lastra adoperata.

Lo studio inoltre di codeste tracce, praticate contemporaneamente sulle due facce di una stessa lastra, mi mostrò come le scintille che le producono si attraggo reciprocamente; e ciò per le seguenti ragioni: 1. Quando i poli sono di rincontro, e l'uno di rimpetto all'altro, le tracce che si producono sulle due facce sono alla minima possibile distanza fra loro. 2. Quando una scintilla si biforca sull'una faccia, si biforca anche sull'altra, ed i rami e le tracce sulle due facce si corrispondono così da essere alla minima possibile distanza fra loro. 3. Finalmente in alcune esperienze disponevo contro la lastra i due poli P e N, fig. 4ª, Tav. I, a diversa altezza; quindi fatta scattare la scintilla, le tracce rimaste mostravano che la scintilla dell'un polo, per es. del positivo P s'era abbassata fino all'altezza di quello N, quindi insieme ed alla minima distanza strisciarono sulle due facce del vetro e ne scavalcarono il bordo situato avanti o dietro il piano della carta.

Sulle diverse lastre, le tracce che si producono possono essere fra loro assai diverse: ed invero su quelle di vetro da finestra la scintilla vi lascia una traccia come di vetro smerigliato, e rigato per traverso; ma osservate al microscopio, anche con piccolo ingrandimento, tali tracce si risolvono nella sola zona scagliosa consueta: e ciò fu da me constatato in vari esemplari di lastre ordinarie.

Allo scopo di studiare l'impronta lasciata da una scintilla perpendicolare alla lastra, praticai in una un sottil forellino di circa 1^m e vi feci passare la scintilla a traverso, quindi intorno al foro osservai le solite zone circolarmente disposte. Poscia tagliai due lastre, una col diamante e l' altra col carbone acceso; e riaccostati i frammenti feci scattare la scintilla nella fenditura, fra due elettrodi alla lastra perpendicolari. Le tracce rimaste erano le consuete e sembravano come allungate ed ellittiche, con l' asse maggiore nel senso della fenditura. Sui bordi poi della fenditura mostravasi la sola zona scagliosa, più estesa quando prodotta da scintilla scattata fra palline che fra punte. Da ultimo disposi due lastre A e B fig. 5ª, Tav. I perpendicolari fra loro, ed al piano della carta, e poscia feci strisciare la scintilla sulla A, come indicano le frecce, ed in modo da colpire la B; su questa rimase, dopo l' esperienza, una traccia deformata ed allungata nel senso perpendicolare al piano della carta, e risultante dalle solite zone. Detta traccia però mancava quando la B non era vicinissima alla lastra A.

Le tracce, come già si disse, sono di diversa larghezza, a seconda dell'energia della carica che le produce, onde io ho cercato, con misure dirette, stabilire la relazione che possa fra queste due quantità. Le tracce perciò furono osservate al microscopio, ad un ingrandimento di circa 15 diametri, e con la camera chiara ne disegnai su una carta la larghezza, compresa fra le due zone limitanti *gg*, indicate nella fig. 3ª, Tav. II. Queste zone viste a piccolo ingrandimento sono oltremodo nette e spiccate, così da permettere delle misure assai precise, che venivano sempre prese su tre o quattro punti di una stessa traccia. Qui di seguito sono riportate le misure di varie di codeste tracce incise da

scintille di cariche diverse, ma di potenziali costanti, su pezzi di vetro di specchio, che non sempre erano state tagliate da una stessa lastra.

TABELLA I [1]

N.º Bottiglie	Cariche C	Diametri ingranditi D	Diametri veri D_1	Rapporti $D^2_1 : C$
1	4	14,64	0,732	0,1340
2	8	29,99	1,499	0,2809
3	12	35,62	1,781	0,2643
6	24	43,88	2,194	0,2006
24	96	103,00	5,150	0,2763
		II. Serie		
1	4	10,4	0,520	0,0676
2	8	18,5	0,925	0,1068
4	16	28,2	1,410	0,1243
8	32	38,6	1,930	0,1164
		III. Serie		
1	4	25,53	1,277	0,408
2	8	29,98	1,499	0,285
4	16	37,83	1,891	0,224
12	36	73,00	3,650	0,278
24	96	109,67	5,484	0,3125

Nella tabella precedente sono riportati il numero delle bottiglie, le cariche, i diametri apparenti e reali delle tracce, e nell'ultima colonna i rapporti $D^2_1 : C$ fra i quadrati dei diametri veri e le cariche. Ora tai rapporti, abbenchè oscillano un po' fra loro pure se si considera dall'una parte che dette oscillazioni sono capricciose e saltuarie, e se si pon mente dall'altra alla grande differenza delle cariche adoperate, che variano da 1 a 24 nella prima ed ultima serie, e da 1 ad 8 nella seconda, noi vediamo che tai rapporti possono riguardarsi come approssimativamente costanti.

Dopo questi primi tentativi ripetei nuove misure e con maggiore accuratezza. Feci perciò incidere le varie tracce sopra una stessa faccia di una medesima lastra di specchio tagliata in diverse liste; e tenendo le stesse norme che precedentemente, ottenni una lunga serie d'immagini, assai belle (due per ogni carica), delle quali, nel modo consueto, presi in 3 o 4 punti per ciascuna traccia le misure, ed i risultati medii di esse sono riportati nello specchio seguente:

[1]) Gl' ingrandimenti adoperati furono i medesimi per ciascuna serie di misure, ma non dovettero essere i medesimi per le tre serie. Nel mio giornale non trovo indicazioni in proposito.

TABELLA II.

N.º Bottiglie N	Cariche C	Diametri veri D	Rapporti $D^2:C$
I	II	III	IV
1	4	1,04	0,27
2	8	1,51	0,28
4	16	2,17	0,29
6	24	2,55	0,27
8	32	2,96	0,27
12	48	3,65	0,28
16	64	4,40	0,30
20	80	4,42	0,24
24	96	4,73	0,23

Le misure precedenti, che ancora si riferiscono a cariche diverse, ma di potenziali costanti, furono ripetute due volte e con grande accuratezza ed i risultati furono assai concordi, talmente che possono ritenersi come misure esatte in questo genere di ricerche; specialmente se si pon mente che le tracce non hanno una larghezza costante in tutta la loro lunghezza. Ora dalla IV colonna rilevasi che il rapporto $D^2:C$ è costante, forse oltre quanto si sarebbe potuto aspettare in simili misure, se si considera che le cariche variarono da 1 a 24. È vero però che gli ultimi due valori, relativi alle massime cariche sono un po' minori della media generale: ma se osserviamo quelli della penultima tabella, noi troveremo invece che i medesimi rapporti, relativi alle massime cariche adoperate, sono alquanto superiori alla media, quindi può ritenersi che dette differenze siano accidentali: talmente che da tutte queste misure io credo si possa ritenere come molto probabile, e nei limiti delle mie esperienze che

Il quadrato del diametro delle tracce delle scintille è proporzionale alle cariche, di costante potenziale, che producono dette scintille.

E qui cade in acconcio ricordare come a simili conclusioni pervenni già altra volta misurando il diametro dei fori praticati nella carta da scintille provenienti da diverse cariche di costante potenziale. A tale scopo adoperai della carta da lettera, piuttosto grossa, e propriamente di quella che in commercio vien detta *vergata:* di essa tagliavo delle liste di quattro o cinque centimetri di larghezza, che sostenevo verticalmente per uno degli estremi, fra gli elettrodi in fili di platino di uno spinterometro, e vi praticavo 8 a 10 fori successivamente per mezzo di altrettante scintille. Poscia, con la lanterna Duboscq, proiettavo ingrandite le immagini di codesti fori, e di esse misuravo i diametri

secondo due direzioni presso a poco perpendicolari fra loro, avendo però accorgimento di scansare quelle irregolarità eccessive che qualche volta nelle dette immagini si presentano. Codeste esperienze o misure si riferiscono alla scintilla congiuntiva scoccante fra fili di platino di 1^{mm}, mentre la scarica veniva promossa da un eccitatore a palline di ottone, onde queste nuove esperienze sono eseguite in condizioni analoghe alle precedenti, ed i risultati ottenuti sono qui di seguito riportati:

TABELLA III.

N.° Bottiglie	Cariche C	Diametri I	Fori II	Diametri medi D	Rapporti $D^2 : C$	Differenze da 11,83
5	5	6,6	8,9	7,8	12,15	+ 0,32
6	6	8,5	7,9	8,2	11,20	— 0,63
8	8	9,2	9,6	9,4	11,05	— 0,78
10	10	9,4	12,6	11,0	12,10	+ 0,27
12	12	11,6	12,7	12,15	12,22	+ 0,39
14	14	12,0	14,2	13,10	12,26	+ 0,43
				media	11,83	
			II. Serie		Differenza da	10,74
4	6	6,8	9,0	7,7	9,88	— 0,86
6	9	9,0	11,3	10,15	11,49	+ 0,65
8	12	11,6	11,9	11,95	11,51	+ 0,23
10	15	14,5	11,3	12,9	11,09	+ 0,77
12	18	13,7	13,2	13,45	10,05	— 6,69
14	21	12,9	16,7	14,8	10,43	— 0,31
				media	10,74	

Lo specchio precedente, disposto come gli altri, mostra tanto nella prima serie come nella seconda, che il rapporto $D^2 : C$ è costante: il quale risultato concorda con quello più sopra enunziato. Onde passando dai diametri alle sezioni delle scintille, potremo dire, nei limiti delle mie esperienze, che

La sezione di una scintilla congiuntiva prodotta da cariche a potenziale costante è proporzionale alle cariche istesse.

Quindi ripetei le stesse esperienze e le medesime misure sui fori fatti nella carta dalla scintilla eccitatrice unica, scattante tra fili di platino d'un eccitatore isolato, con una branca fissa ed una mobile, la quale si spingeva contro la fissa, subito dopo avere unito l'eccitatore, per mezzo di contatti a mercurio, alla batteria carica. I risultati medii di tai misure sono qui in seguito indicati:

TABELLA IV.

Cariche C	Diametri dei Fori I	Diametri dei Fori II	Diametri medi D	Rapporti $D^2 : C$	Differenze da 7,58
		I. Serie			
2	3,9	3,1			
2	3,3	3,2	3,4	5,78	— 1,71
3	4,9	4,7	4,8	7,68	+ 0,10
4	5,4	5,25	5,3	7,02	— 0,56
5	7,0	6,8	6,9	9,50	+ 1,92
6	7,2	6,9	7,1	8,40	+ 0,72
8	9,4	8,8	9,1	10,35	+ 2,77
10	8,6	8,2	8,4	7,06	— 0,52
12	7,8	8,4	8,1	5,47	— 1,11
14	10,4	9,1	9,8	6,86	— 0,72
			media	7,58	
		II. Serie con carta oleata			Differenza da 3,12
4	33	3,2	3,25	2,64	— 0,48
6	47	4,1	4,4	3,23	+ 0,11
8	45	4,5	4,5	2,53	— 0,59
10	54	4,8	5,1	2,60	— 0,52
12	68	6,7	6,75	3,80	+ 0,68
14	76	7,2	7,40	3,91	+ 0,79
			media	3,12	

I risultati della I^a serie si riferiscono ai fori fatti nella carta solita, e quelli della II^a serie furono ottenuti adoperando la stessa carta stata prima oleata; ed in essa i fori furono sensibilmente più piccoli, forse perchè detta carta è più coibente. In entrambi le serie i rapporti $D^2 : C$ sono, sebbene con minore regolarità che precedentemente, presso a poco costanti, specialmente se si pon mente che le deviazioni dalla media per una data carica non sono nelle due serie nè eguali nè nel medesimo senso, onde esse devono attribuirsi probabilmente ad errori d'esperienze: e perciò potremo, almeno dire come probabile, e nei limiti delle mie poche esperienze che:

Il quadrato del diametro dei fori praticati nella carta da scintille eccitatrici a potenziali costanti, o forse ancora che la sezione di esse, è proporzionale alle cariche istesse.

Però tutti questi risultati, e specialmente gli ultimi, hanno bisogno di essere confermati da ulteriori ricerche.

Poscia volli determinare l'effetto dei potenziali sulla larghezza delle tracce, e perciò ne incisi varie su di una istessa faccia d' una medesima lastra, per mezzo di scintille congiuntive prodotte da una carica di 36 unità comunicata successivamente ad un diverso numero di bottiglie eguali. Le misure delle tracce eseguite col metodo solito, della camera chiara, dettero i risultati seguenti:

TABELLA V.

Cariche 36. Elettrodi fili platino — Ingrandimento 20 diametri				
N.º Bottiglie	Figure misurate	Diametri ingranditi D	Medie di D	Diametri veri d
8	I	72		
		71,5		
		72,1		
	II	73,0		
		72,2	70,27	$3,51^{m}$
		72,8		
	III	66,5		
		65,3		
		68,0		
16	I	68,5		
		70,4		
		69,0		
		64,2		
	II	68,0	65,71	3,29
		69,1		
		68,0		
	III	60,0		
		61,0		
		61,3		
20	I	56,5		
		58,1		
		56,6		
		60	58,60	2,93
	II	60		
		60,5		
		59,5		
Le misure seguenti furono ricavate da una seconda lastra:				
8	I	77,2		
		77,7		
		80,0		
	II	78,0	79,57	$3,98^{m}$
		81,0		
		83,0		
12	I	65,5		
		65,3		
		66		
		64		
	II	69,8	70,47	3,52
		73,3		
		71,5		
	III	76		
		74		
		74		
16	I	66		
		62,9	63,97	3,20
		63		

*

Dalla tabella precedente risulta chiaro che i diametri delle tracce vanno lentamente, ed assai regolarmente decrescendo, col potenziale delle cariche.

Queste medesime esperienze volli poscia ripetere per mezzo dei fori praticati dalle scintille nella carta; e perciò operando sulla scintilla congiuntiva con carica costante e potenziali diversi, ottenni i dati seguenti:

TABELLA VI.

I. Serie Cariche 8; scintilla congiuntiva 5^{mm}, tra fili di platino			
N.º Bottiglie	Diametri dei fori		Diametri medî
	I	II	D
4	10,9	11,2	11,1
5	10,6	9,0	9,8
6	8,6	9,8	9,2
8	9,3	7,3	8,3
10	8,3	7,1	7,7
12	5,9	5,8	5,9
14	7,66	7,6	7,6
II. Serie Scintilla congiuntiva $2^{mm},5$, fra palline ottone di $12^{mm},5$ di diametro			
4	10,7	11,5	11,10
6	14,7	11,95	13,33
8	11,0	12,0	11,50
10	10,6	11,1	10,85
12	11,1	9,8	9,95
14	7,0	8,8	7,90

Le due serie di esperienze che precedono mostrano che i fori fatti nella carta, dalla scintilla congiuntiva di una carica costante (8 unità), vanno lievemente decrescendo col decrescere del potenziale della carica. Questi risultati adunque, ottenuti con metodo affatto diverso dal precedente, conducono alla medesima conclusione; che perciò acquista maggiore probabilità. E passando, sia dalle tracce, sia dai fori fatti dalle scintille, alla grossezza della scintilla che li produssero, potremo dire che:

La sezione delle scintille di una data carica decresce lentamente col decrescere del potenziale di essa.

Intorno però a tutte codeste misure, io mi propongo eseguire ulteriori indagini.

RIASSUNTO

Le frange o scintille luminose che si producono nei condensatori che si caricano o scaricano istantaneamente, alterano la loro vernice e vi rimangono lievi impronte. Se si fa strisciare una poderosa scintilla d'una batteria su una appropriata lastra da specchio, vi si produce una traccia assai vistosa, e che risulta di più zone a diversi colori; le quali viste con un ingrandimento di 20 a 30 diametri, sono le seguenti principali:

1° Una zona assiale *scagliosa,* formata da vetro quasi terso, tutto screpolato superficialmente, così da formare una specie di pavimento a lastre irregolari poligonali.

Quindi procedendo verso uno dei lati (la traccia è simmetrica rispetto alla zona scagliosa), si ha:

2° Una zona grigia punteggiata, formata come da tanti piccoli globettini irregolarmente disseminati e confitti nel vetro screpolato;

3° Una zona gialla punteggiata, costituita di corpicciattoli più piccoli, più fitti e più regolarmente disseminati dei precedenti, e confitti del pari nel vetro screpolato;

4° Una zona come di vetro appannato;

5° Una zona *limitante,* formata come da una striscia di vetro superficialmente rotto, con la quale pare la traccia si termini;

6° Una zona ultima bianca.

A forte ingrandimento (700 diametri circa) la zona 4ª si vede essere formata come da vetro solcato dà delle linee curve che s'intrecciano a forma di rete, nella quale trovansi pochi di quei corpicciattoli notati nelle zone punteggiate. La 6ª zona pare risulti da polviscolo, forse di vetro, spintovi dalla scintilla; la traccia della quale perciò si terminerebbe colla zona limitante. Le altre zone viste a forte ingrandimento non mostrano particolarità degne di nota.

La zona scagliosa producesi solo con le energiche scintille: perciò le tracce di queste scintille mostrerebbero che la maggiore energia termica loro trovasi secondo il proprio asse, ove formasi la detta zona scagliosa.

Le tracce variano con la natura delle lastre e non con quella degli elettrodi, e sono quasi inalterabili all'acido nitrico ed all'acqua regia; onde io ritengo che essi sieno dovute al calore della scintilla, che screpola il vetro, e più o meno profondamente lo decompone.

Non tutti i vetri, nè le due facce d'una medesima lastra son sempre adatte a queste ricerche.

Sul quarzo le scintille vi lasciano delle lievi tracce, forse dovute a particelle divelte dagli elettrodi.

Quando la scintilla striscia sulle due facce d'una lastra, le tracce su di esse rimaste mostrano esservi stata attrazione fra le due parti della scintilla strisciantì sulle due facce.

Le tracce essendo ben limitate dalla zona limitante, potei eseguire col microscopio e con la camera chiara, una serie di misure sulla larghezza loro. Quindi altre mi-

sure eseguii sui diametri di fori fatti dalle scintille in opportune strisce di carta, ed i risultati tutti abbastanza concordi mostrarono che:

1° Il rapporto fra i quadrati dei diametri delle tracce o dei fori, e le cariche, a potenziali costanti, è costante.

2° Il diametro delle tracce o dei fori decresce un po' col decrescere del potenziale di una carica costante.

E se è permesso risalire da questi risultati alle sezioni delle scintille, potremo anche dire:

1° Che la sezione della scintilla è proporzionale alla carica di potenziale costante, che quella produce.

2° Che la sezione della scintilla decresce lentamente col decrescere del potenziale di una carica costante.

finita stampare il dì 18 aprile 1883

Fig. 1.

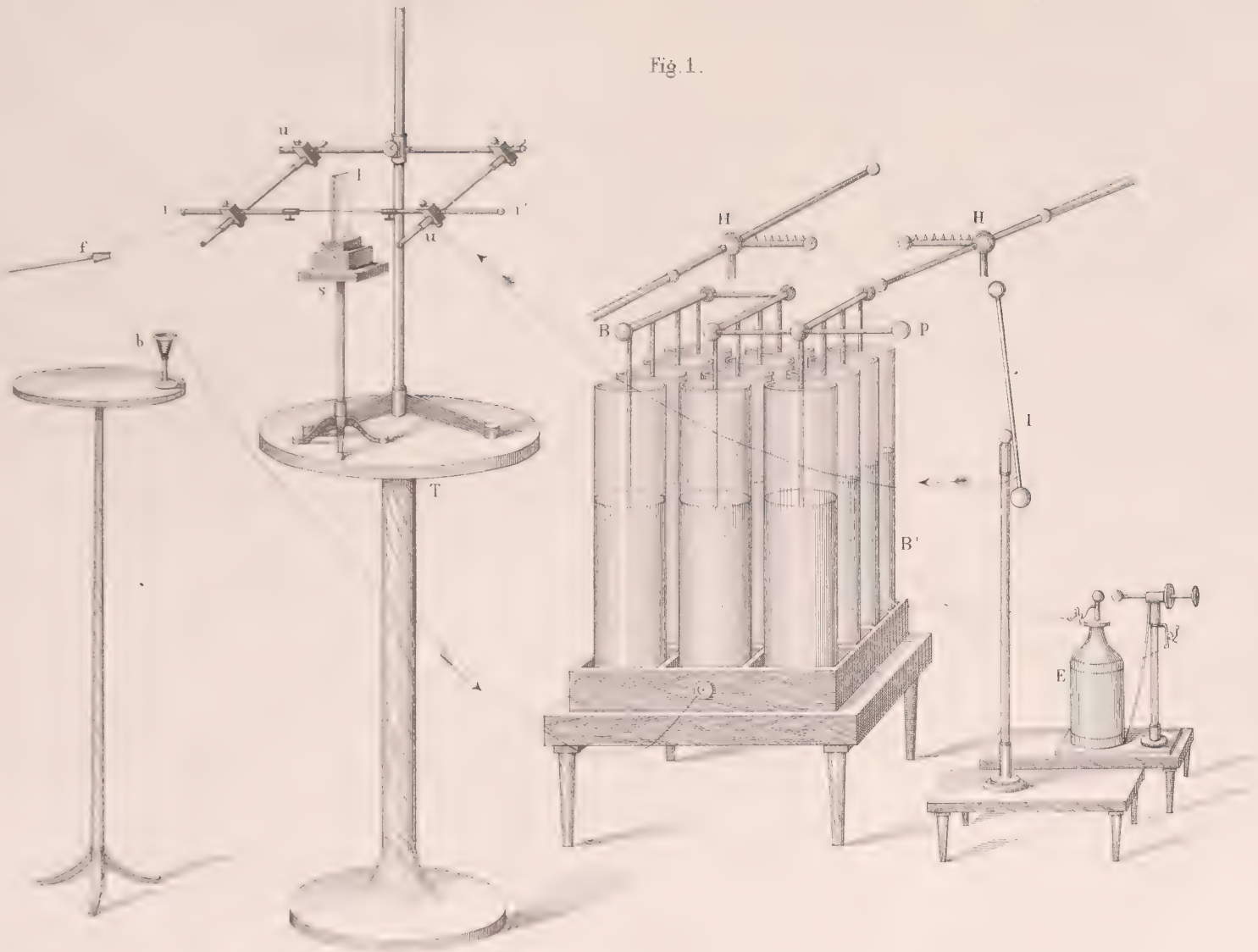


Fig. 2

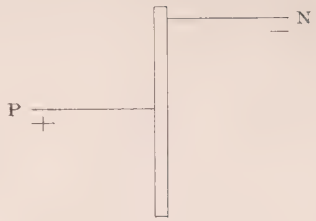


Fig. 3.

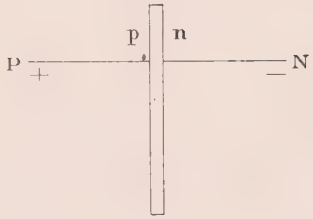


Fig. 4.

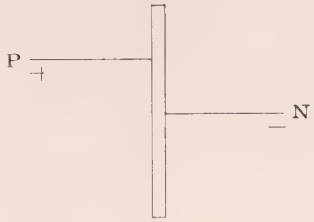


Fig. 5.

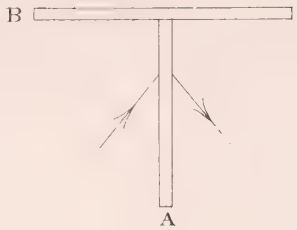


Fig. 5

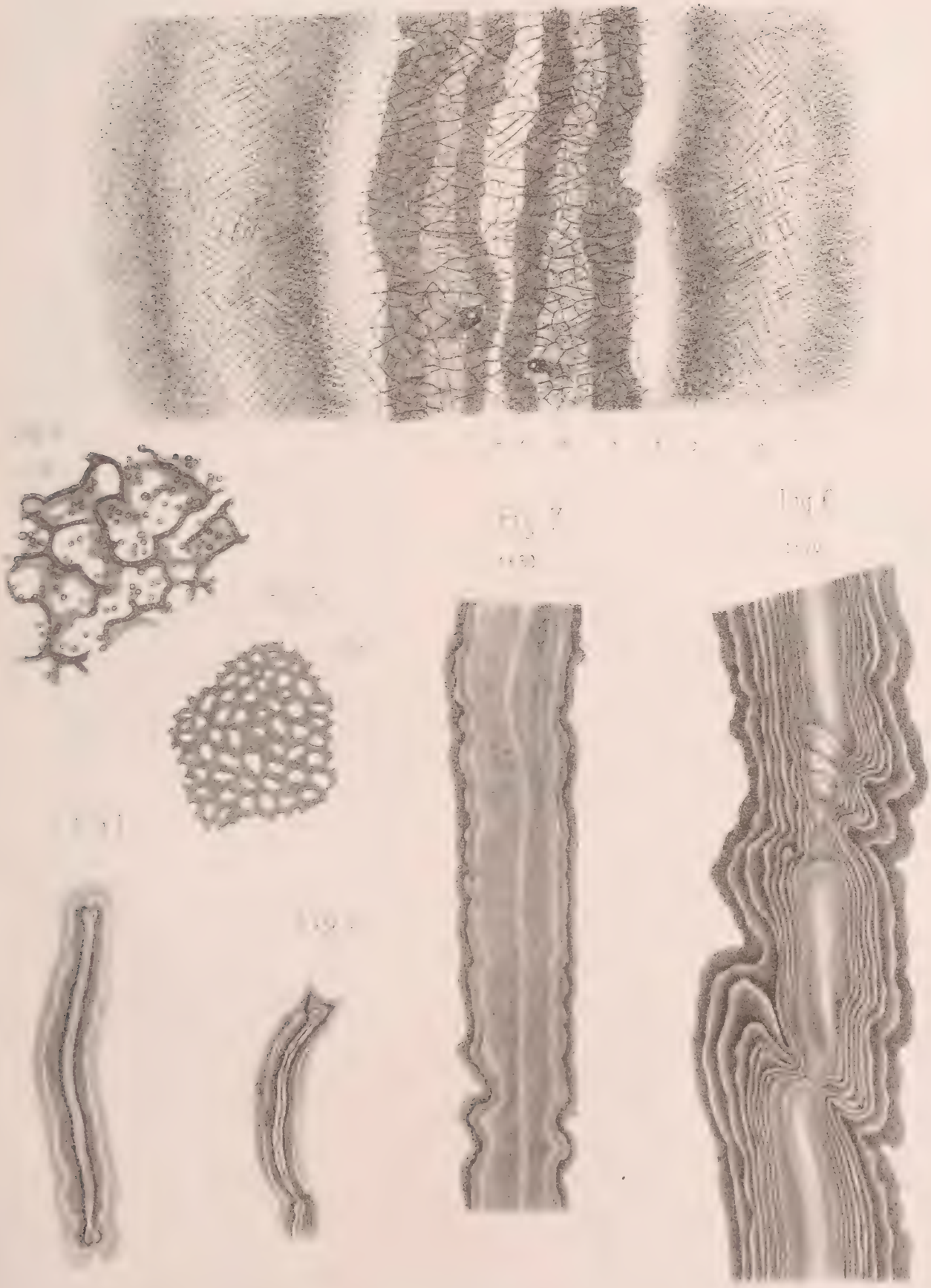


Fig. 9 1 × 30

Fig. 8. 1 × 45

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SUL TERREMOTO DELL' ISOLA D' ISCHIA DELLA SERA DEL 28 LUGLIO 1883

RELAZIONE

dei Socii Ordinarii L. PALMIERI e A. OGLIALORO

PARTE PRIMA

STORIA DEL TERREMOTO

Fra tanti scrittori che in tempi diversi ebbero cura d'illustrare l'Isola d'Ischia o di tesserne la storia, non ne abbiamo trovato uno che ci abbia trasmessa un'accurata notizia delle commozioni alle quali quest'Isola fu esposta.

Gli storici generalmente tramandarono a' posteri le notizie de' terremoti disastrosi; ma non curarono quelle commozioni telluriche le quali riuscirono innocue, e talvolta passarono appena e neppure da tutti avvertite.

Marcello Bonito che primo concepì la importanza di una storia generale di tutte le commozioni telluriche, per la ragione detta di sopra, potè solo ricordare i grandi terremoti. Erede del pensiere del Bonito fu in questo secolo Alexis Perrey il quale pose ogni cura per raccogliere le notizie anche delle minime scosse; e se la sua età innoltrata non lo avesse consigliato a fermarsi, avrebbe probabilmente dovuto mutare indirizzo innanzi agli apparecchi sismici che giornalmente si van propagando, e per fino a microsismici co' loro fautori e co' loro avversarî.

Il Bonito dunque sull'autorità di scrittori antichi ricorda i terremoti che precedettero e accompagnarono gl'incendi vulcanici che si manifestarono nell'Isola [1]).

Il cronista Riccardo di S. Germano parla di uno sprofondamento nell'Epomeo accaduto nel mese di luglio 1228. Ecco le sue parole: *Mense Julii Mons Isclae subversus*

[1]) *Eretrienses simul et Calcidenses Pithecusas Insulas habitaverunt.... teremotibus expulsi, et exhalantibus ignibus, et invalescente mari, et aquarum fervoribus, excessere. Huius enim generis eructationes habet Insula.* Teodoro Zuinger: *Theat. hum. vit.*, vol. 3, lib. 2, fol. 630.

Marino Freccia parlando dell'eruzione avvenuta sotto il consolato di Lucio Marzio e Sesto Giulio dice: *Horum tempore (Syracusanorum) collis in medio Insulae situs, cui nomen Epomeus, terraemotibus frequentibus concussus, mox incendia maxima aperto hiatu evomit. De Subfeud.*, lib. 1, fol. 27.

Monsignor Reggio vescovo di Vico Equense scrive così: « Negli anni del Signore 1301, regnando in Napoli Carlo Secondo, successe nell'Isola d'Ischia un altro incendio per lo quale furono soffocate e morte dalle fiamme e dal fumo molte centinaia di persone, e per l'orribile terremoto caddero a terra diversi nobili edifizi ecc. ».

est, et operuit in casalibus sub eo degentes fere septingentes homines inter viros et mulieres.

Il d'Ascia nella *Storia dell'Isola d'Ischia* afferma, che nel 1557 cadde per terremoto la chiesa parrocchiale di Campagnano, e nel 1767, in cui il Vesuvio eruttò gran copia di lave, crollò la chiesetta del Rotaro che riedificata nel 1859 si è ora notevolmente lesionata [1]).

Or mentre tutti sanno che il suolo dell'isola d'Ischia va continuamente soggetto a terremoti, pure tranne quelli coevi alle vulcaniche conflagrazioni, fino al 1828 pare non ve ne fosse stato alcuno veramente memorabile, e così s'intende il silenzio degli scrittori.

Nel dì 2 del mese di febbraro del detto anno 1828 la parte alta di Casamicciola improvisamente crollò, e dalla breve relazione del Covelli non appare che in altri punti dell'Isola si fosse avvertita alcuna scossa. Ed è degno di nota che in un'isola il cui diametro non supera i 10 chilometri, spesso si avveri che il suolo si scuota con mediocre intensità in una contrada senza che nelle rimanenti alcuno se ne avveda. Lasciamo volentieri parecchi esempi recenti che potremo addurre come quelli del 1852, del 1867, ecc. per ricordarne uno recentissimo del 1880 del quale l'Accademia a suo tempo fu informata [2]). Stimiamo utile rammentare qui alcuni particolari di questo avvenimento il più prossimo al disastro di Casamicciola del 1881 seguito poi dall'altro più esteso e terribile del 1883 che è l'obbietto della presente relazione.

Nel mattino del 24 luglio dunque del 1880, il sismografo della Specola Universitaria segnava leggiere agitazioni del suolo in senso ondulatorio diretto da Ovest ad Est, mentre quello dell'Osservatorio vesuviano parea mantenersi ne' limiti dell'attività eruttiva del vicino Vulcano. La sera del detto giorno il sismografo universitario si rianimò, e nel corso della notte segnò parecchie piccole scosse, una delle quali, la mattina del 25, di sufficiente intensità da essere avvertita in Napoli da moltissime persone, ed il sismografo dell'Osservatorio vesuviano si mostrò anch'esso più risentito del giorno precedente. Verso le 8 del mattino, dal Sig. Coppa funzionante sindaco di Forio d'Ischia, perveniva al Prof. Palmieri un telegramma così concepito: *Ieri oggi molte scosse terremoto, una fortissima. Popolazione agitata desidera consiglio.*

Con lettera poi del dì 28 luglio il lodato sig. Coppa assicura che alcuni giorni prima nel villaggio di Panza appartenente al comune di Forio i pozzi delle acque potabili si erano disseccati, ma le acque de' pozzi di Forio nei giorni delle scosse erano soltanto meno fresche e talvolta torbide. La temperatura delle acque termominerali di *sorgete* pareva abbassata ed elevata invece quella delle acque termominerali di Forio. Notava poi l'Autore della lettera non esservi stata coincidenza di tempo tra le scosse di Panza e quella di Forio, giacchè quelle precedevano queste di 15 ed anche di 30 minuti, ed ora più forti a Panza ora invece più intense a Forio.

[1]) Si è anche detto che nel 1796 vi fosse stato a Casamicciola terremoto con sette vittime, ma non sappiamo i documenti che lo assicurano. Quello che ci pare indubitato è che alcuni terremoti menzionati nell'Isola sono avvenuti per propagazione dal continente come fu nel 1867, e siam sicuri che il terremoto e marimoto di Napoli del 1334, che il Petrarca assicura predetto alcuni giorni prima da un vescovo di un'isola vicina, dovè farsi sentire anche nelle isole del nostro golfo, come ci pare impossibile che il terremoto del 1688 che da Cerreto giunse a Napoli con forza bastante da far cadere le colonne del portico della chiesa di S. Paolo, la cupola della chiesa del Gesù Nuovo, danneggiando molti altri edifizî pubblici e privati, non fosse giunto fino alla vicina isola d'Ischia. Dicasi lo stesso del fortissimo terremoto del 1805 che i Napolitani ricordano col nome di *terremoto di S. Anna.* Sarebbe stato utile avere, se non una storia, almeno un catalogo de' terremoti che ebbero il loro centro nell'Isola, i quali non dovrebbero andare confusi con altri contemporanei a'maggiori incendi del Vesuvio o propagati da centri diversi.

[2]) *V. il Rendiconto della R. Accad. delle Scienze fis. e mat. di Napoli,* fasc. 8, Agosto 1880.

Alcune di queste scosse furono avvertite a Casamicciola, ma con minore intensità, e le persone quivi convenute per l'uso delle acque furono consigliate a rimanersi, essendo le piccole scosse assai comuni nel paese, ma non pericolose.

Veniamo ora al 4 marzo del 1881. La parte alta di Casamicciola crolla in un attimo, il disastro è maggiore di quello del 1828, come notevolmente maggiore fu il numero delle vittime. La parte più bassa del paese, specialmente alla marina, rimase intatta, nè gli abitanti di questa contrada avvertirono tale commozione del suolo da incuter loro grande spavento. I sismografi dell'Università e del Vesuvio restarono perfettamente muti, nè tutt'i paesi dell'Isola avvertirono una scossa che per una parte di Casamicciola fu altamente disastrosa. Si parlò di qualche replica, ma non da tutti avvertita.

Al vedere quel grande disastro, il terreno smosso e fenduto, gli alberi fortemente inclinati per gli scoscendimenti del suolo, la ristrettezza dello spazio così fortemente colpito, e tosto il suolo perfettamente tranquillo, l'osservatore non ignaro della indole de' terremoti disastrosi dovea di necessità rimanere confuso, e cercare oltre l'impulso dinamico occasionale del disastro, qualche condizione locale dalla quale potesse esser derivata sì grande ruina. Dell'area centrale così ristretta e per nulla proporzionata a' guasti avvenuti si potea dar ragione con la piccola profondità del centro impulsivo o *foco* come lo direbbe il Mallet; ma le recenti esperienze fatte da' dotti componenti della Società Sismica del Giappone con le mine di dinamite poste a diverse profondità, non sono punto favorevoli a siffatta interpretazione [1]). E poi l'area centrale o *mesosismica* avendo

[1]) V. *Transactions of the Seismological Society of Japon*, ecc.

Lucrezio espose un concetto de' terremoti che i moderni sismologi Volger, Fuchs, Boscovich ed altri non hanno punto ripudiato. Ecco le parole del Poeta:

Terra superne tremit magnis concussa ruinis
Subter, ubi ingentes speluncas subruit aetas;
Quippe cadunt toti montes, magnoque repenti
Concussu late disserpunt inde tremores.

De Nat. rer., lib. VI.

Parve quindi non solo ragionevole, ma necessario, senza escludere un impeto vulcanico moderato ed occasionale, far ricorso a cagioni locali per intendere la vera origine del disastro del 1881. Le frane e gli scoscendimenti del terreno erano evidenti; anche dopo riempite le fenditure che accennavano al terreno spostato verso il pendìo rimanevano i fusti degli alberi inclinati a 45° della verticale verso il declivio. La naturale incoerenza del suolo parve coadiuvata dal lento lavorìo delle acque termali che scomponendo e disgregando le rocce trachitiche le rende sempre più labili e mal ferme. Le sole sorgenti di S. Restituta, dice un dotto redattore della *Rivista Scientifica* di Franchfort, trasportano ogni anno 1500 quintali di materia dalle rocce che attraversano. Non parve finalmente improbabile ricorrere alle sotterranee spelonche invocate dal vate epicureo, le quali per Casamicciola ed altri luoghi dell'isola non sono punto ipotetiche; imperciocchè fin da'tempi degli Eritresi si cavò di sotterra l'argilla dalla quale, perchè si facevano vasi, l'Isola fu detta Pitecusa. Da circa 20 secoli dunque l'argilla per embrici, mattoni, vasellami ed altro occorrente a Napoli e paesi vicini si estrasse da pochi luoghi dell'Isola, ove si trovano numerose e grandi gallerie che dopo alcuni anni si chiusero per aprirne altre, per cui non è possibile dopo alcun tempo sapere dove si trovano. Si può solo penetrare in talune di data più recente. « Ho visitato, dice il Fuchs, una cava « presso Casamicciola. Parecchie gallerie intrecciate a foggia di labirinto conducono nel monte ad oltre mille piedi di profondità ».

L'ingegnere de'Ponti e strade Alessandro Giordano nel 1834 fu dal Governo Napoletano spedito di urgenza a Casamicciola per provvedere ad una depressione che minacciava sprofondamento del suolo con qualche fabbricato. Questo abile ed animoso ingegnere dopo di esser disceso in alcuna di quelle ampie caverne sotterranee, vide il pericolo cui molti fabbricati rimanevano esposti, e nel suo rapporto dichiarò la necessità di vietare l'apertura delle così dette *fodine*, ossia pozzi d'ingresso nelle cave di argilla, per lo meno fino alla distanza di 300 metri da'fabbricati. Coteste fodine finita la estrazione dell'argilla si chiudevano per aprirne altre. Or se si pensa alla gran copia di argilla che da secoli, non solo si è lavorata nell'isola, ma si è esportata in Napoli, al Granatello ed altrove per fabbricarne embrici, mattoni e stoviglie, si conchiuderà che sotto Casamicciola e nelle adiacenze debbono trovarsi milioni di metri cubici di escavazioni. Ecco perchè da qualche tempo, essendosi verificato che nuove fodine incontravano escavazioni antecedenti, oggi l'argilla è divenuta per Casamicciola un articolo d'importazione.

Ad ogni modo, coteste numerose e grandi cavità avrebbero, senza scoscendimenti, dovuto attenuare l'impeto del terremoto, secondo un canone che da' tempi di Plinio fino a noi fu tenuto per vero. L'ingegnere Cav. Fanzago che alcuni secoli

*

una figura ovale il cui asse maggiore avea una parte di Casamicciola ad un estremo e Fango dall'altro, obbligava l'osservatore a porre il centro del disastro sulla circonferenza dell'area percossa, il che era inconcepibile. Giova notare che l'Isola d'Ischia pare non voglia quasi mai esser sola a tremare giacchè per lo più poco prima o poco dopo i suoi disastri sonosi avute altre commozioni più o meno lontane. Il che per altro non dee recar maraviglia, perchè si sa che il dinamismo tellurico presenta certe ricorrenze per le quali a brevi intervalli il suolo si agita in regioni diverse, e vulcani ancorchè remoti da'luoghi agitati si ridestano con incendî fragorosi. Il Bonito nel citare i terremoti che precedettero o accompagnarono gl'incendii vulcanici dell'Isola, ricorda forti terremoti nelle Calabrie o nella Grecia.

Nel 1867 le piccole scosse avvertite principalmente a Casamicciola furono quasi contemporanee ad un terremoto che si sentì forte a S. Marco in Lamis e più o meno in molti altri luoghi della Puglia, della Basilicata e della Campania.

Nel 1881 prima del 4 marzo si avvertirono sensibili commozioni del suolo in Isvizzera e nel Piemonte e nei giorni 10, 11 e 12 forti e numerose scosse si sentirono a Trevi, Foligno ed altri paesi circostanti, e finalmente venne il tremendo disastro di Scio.

Il recente infortunio di questo anno fu preceduto da qualche leggiera scossa in Cosenza ed altrove seguita dall'orribile catastrofe de'Vulcani dell'Isola di Giava, i quali si commossero anche insieme al Vesuvio nell'aprile del 1872, ma in modo meno disastroso: nè la Grecia ha mancato in ultimo di risentirsi colle recenti scosse di Smirne, di Scio e di altre vicine contrade [1]).

Dopo l'orrendo disastro del 1881 ognuno si aspettava un lungo periodo di riposo, e però gli abitanti di Casamicciola che avean perdute le case si affrettarono a riedificarle o alla meglio ristaurarle; fecero lo stesso i proprietari delle terme e degli alberghi, onde alla stagione de'bagni del 1882 il paese parea interamente rifatto de'danni sofferti. Per la qual cosa gl'infermi che speravano la salute da quelle acque tanto rinomate accorsero nella stagione balneare del 1883 in numero grandissimo, ed invece della sanità andarono ad incontrare la morte insieme a molti naturali dell'Isola.

La sera del dì 28 luglio il sismografo della specola universitaria segnò due piccole scosse ondulatorie S O N E una alle ore 9,10 più piccola della durata di 2″ e l'altra alle ore 9,25′ alquanto più forte di 3″ di durata. In questo momento l'Isola d'Ischia si scuote per intero, con la ruina totale di Casamicciola, Lacco superiore, Pannella, Monterone ch'è la parte più elevata di Forio, Ciglio e poi Moropane, Piejo, Fiajano ecc.[2]). Nella vicina isola di Procida la scossa fu avvertita, ma non recò alcun danno. Non mancarono immunità degne di nota. La città d'Ischia per es. non ebbe alcun danno, ed è meraviglioso il vedere intatti gli antichissimi fabbricati addossati sopra uno scoglio piramidale di trachite che sorge dal mare, che col nome d' *Iscla minor* era un tempo il rifugio di

fu diresse l'ardita costruzione della nostra *guglia di S. Gennaro*, pensò difenderla da'terremoti mercè un pozzo profondissimo cavato sotto di essa.

Fuchs ed altri moderni sismologi che sostengono de'terremoti prodotti da frane o scoscendimenti sotterranei son concordi nel notare che in siffatte congiunture non deve di necessità avverarsi depressione del suolo. Ci reca perciò maraviglia l'obbiezione da molti ripetuta contro la interpretazione da uno di noi data del disastro del 1881.

[1]) Il D.r Ornstein, medico capo al ritiro delle milizie greche, scrive da Atene al Prof. Palmieri dandogli notizie delle recenti scosse di Smirne, Alastata, Scio, ecc., e dice che da 49 anni che si trova in Grecia non ricorda mai tanta frequenza di terremoti, specialmente nell'Asia minore e nelle isole del mare Egeo.

[2]) Il sismografo dell'Osservatorio vesuviano per un piccolo guasto che avea sofferto, non potè in quella sera registrare alcuna scossa, ma dopo gli opportuni accomodi fu tosto in grado di dare importanti indicazioni, principalmente nella replica del dì 3 agosto.

tutti gli abitanti dell'Isola contro le incursioni de' famosi corsari Dragut e Barbarossa, e che rimase inespugnato per fino contro gli assalti di Carlo VIII [1]). Questo scoglio conosciuto poscia col nome di *Castello d'Ischia*, ricco di tante memorie, che ricorda il Panormita, il Pontano, il Sannazzaro, Vittoria Colonna, la famosa Lucrezia, ed il valore d'Inaco del Vasto, convertito oggi in luogo di pena, si è mostrato tetragono a colpi del terremoto, giacchè negli edifizi addossati sul suo ripidissimo pendio non si nota alcuna fenditura.

Nell'ora del disastro tranne poche centinaia di persone che radunate in un teatro di legno a Casamicciola assistevano allo spettacolo, quasi tutti erano in casa, e poichè il crollo si compì in tre o quattro secondi, nessuno si potè mettere in salvo con la fuga, e moltissimi come dimostreremo furono sepolti senz' avere neppure avvertita la scossa provocatrice di così tremenda sciagura.

Lasciando a ciascuno rappresentarsi la orrenda immagine di quella tristissima notte, vogliamo chiamare l'attenzione de' sismologi sulla natura di quella scossa quasi istantanea che nè per durata nè per intensità sembra proporzionale alle ruine accadute.

Istantanea fu giudicata dal Covelli la scossa di Casamicciola nel 1828, e tale fu da uno di noi stimata anche quella del 1881, e l'ultima del 1883 ci sembra una ripetizione, in più vaste proporzioni, delle due precedenti. Abbiamo in nostro favore le testimonianze de' vivi e dei morti.

L'on. Giustino Fortunato testimone oculare dice: « La scossa è vero fu istan-« tanea: alcuni miei amici videro crollare la gran sala della *Piccola Sentinella* prima di « avvertire i movimenti cui accenno » [2]). I movimenti cui accenna l'on. Fortunato corrispondono a quelli registrati dal sismografo.

Tutt'i cadaveri delle persone che perirono al crollare delle case furono trovati in tali atteggiamenti da mostrare che non ci era stato tempo non diciamo a tentare la fuga, ma neppure a spaventarsi. Ecco come il cadavere del P. Paladini, vecchio e benemerito professore di fisica, fu trovato seduto innanzi ad un tavolo in atto di leggere il breviario: ed i fatti di questo genere furono così numerosi da rendere possibile la calunniosa ed indecente novella narrata dal *Figaro*, la quale fu smentita da un nostro elegante scrittore testimone oculare de' fatti, e noi riportando le sue parole possiamo dispensarci dall'aggiunger altro per provare il nostro assunto.

« Questa cattiva novella, risponde dunque lo scrittore citato, è affatto fantastica. « Caso strano del quale possiamo garentire l'esattezza: — in quel terremoto che fu sì « fulmineo da impedire a' passeri ch'eran sulle grondaie, di mettersi in salvo, da far « trovare la suonatrice con le dita sulla tastiera del pianoforte in atto di suonare, e la « signorina Fiorentino in atto di farsi vento col ventaglio. — In quel terremoto nessun « indizio fu scoverto il quale svelasse che in quell'istante due esseri umani si abbando-« nassero all' amore.

« Unica scena di amore — santissima — fulminata dal tremuoto — fu quella tra « la piccola Croce e sua madre. La fanciulla suonava il mandolino, quando avvertì la

[1])
Vedi Carlo Ottavo che discende
Dall' Alpe, e seco ha il fior di tutta Francia;
Che passa il Liri e tutto il regno prende
Senza stringer spada e bassar lancia;
Fuorche lo scoglio che a Tifeo si stende
Sulle braccia sul petto e sulla pancia;
Che del buon sangue d' Avalos al contrasto
La virtù trova d' Inaco del Vasto.
Ariosto, *Orl. Fur.*, c. XXXIII.

[2]) V. il *Piccolo* del dì 7 Agosto 1883.

« scossa: ebbe tempo a gettarsi tra le braccia della mamma: e furono trovate tutte e due « morte, l'una nelle braccia dell'altra, l'una co' labbri sui labbri dell'altra.

« O non è forse questa verità assai più bella della favola inventata dal *Figaro* [1])?

Il D.re E. Fazio che trovandosi come Direttore sanitario delle Terme del Porto d'Ischia, fu tra' primi a giungere da Casamicciola in aiuto dei miseri feriti, dichiara nella sua *nota antropologica*, che non tutti avvertirono la scossa nella stessa direzione e con le stessa intensità, ed alcuni non l'avvertirono nemmeno.

Ci ha chi afferma che la scossa durò 15″; ma in 15 secondi ci ha tempo di arrivare alla porta ed anche a guadagnare la via, e non si resta seduto ad un divano, o assiso innanzi ad un pianoforte come potrebbe rimanere un fulminato.

Se si tien conto del tremito non da tutti avvertito che precedè l'impeto finale provocatore della catastrofe e di quello che pur è stato necessario per iscrollare gli edifizii, certo che supera i 15″. Un corpo che cadesse per la libera verticale in 15 secondi percorrerebbe uno spazio di mezzo chilometro, ma un fabbricato per perdere l'equilibrio, per iscompaginarsi e crollare richiede un certo tempo.

Ne' momenti poi di paura gl'istanti sembrano ore. Nella scossa del 3 agosto, della quale tra poco sarà fatta menzione, il D.r Fazio ebbe appena il tempo di estrarre dalla tasca il suo oriuolo ed il terremoto finì; ed anche questa si disse aver durato 15 secondi.

I terremoti disastrosi non mai esauriscono il loro dinamismo con una sola scossa, per cui fu detto: *Nonnumquam terremotus momento pene absolvitur*, nè questa suol mancare di avere una durata ed un'area corrispondente alla sua intensità.

Il modesto terremoto del mese di luglio del 1880 che abbiamo ricordato di sopra, senza recare alcun danno, ripetè più volte le sue scosse per cinque o sei giorni di seguito, e si fe'sentire da Forio a Casamicciola da una parte, ed a Panza e Serrara dall'altra, cioè quasi dalla metà dell'Isola. Quello del 1828 atterrò in un attimo una piccola parte di Casamicciola e finì; quello del 1881 con la stessa rapidità colpì una maggiore estensione, ma non tutto il paese, e si fe' appena avvertire a Forio ed a qualche altro luogo con tardive repliche, delle quali era permesso per fino di dubitare.

Si disse allora che il terremoto venendo dalla Svizzera, dopo di aver salutato il Piemonte avea percorso in silenzio il resto dell'Italia per andarsi a scaricare sulla infelice Casamicciola nel giorno nefasto del 4 marzo; e poichè alcuni giorni dopo il suolo era scosso nelle Romagne, saria stato mestieri supporre che il terremoto retrocedesse.

Il terremoto del 28 luglio di questo anno 1883 ha avuto le sue repliche la maggior parte piccolissime. Una sola fu di una certa intensità ed accadde nel giorno 3 del mese di agosto. Alle ore 2 e 14′ p. m. dall'Osservatorio vesuviano si segnalava alla Specola universitaria una scossa ondulatoria, ed a pochi minuti d'intervallo, una seconda e poi una terza, rimanendo il sismografo animato fino alle ore 2 e 55′, e le gazzette della sera riportarono i telegrammi che riferivano la forte scossa che fu avvertita nell'Isola intera alle ore 2 e 15′. A Monterone cadde qualche muro ferendo due persone,

[1]) Questa verità è nella coscienza popolare, e la troviamo per ciò espressa anche da'poeti:

Cupo un rumor terribile, improvviso
Un crollo solo, una ruina immane
Ogni vita disperde ed ogni riso.

Molti udirono un rumore sotterraneo che somigliava non il cupo muggito del solito rombo, ma un colpo di cannone in distanza. Il Prof. Palma per altro mi assicura di non averlo neppure avvertito.

ed alla Villa del Bagno presso il porto d'Ischia, rimasta incolume nella sera del 28 luglio, si ebbero alcune lesioni in qualche fabbricato. Il D.r Fazio quivi dimorante ci assicurava di essersi udito un rumore come di forte sibilo che veniva da' pozzi nel tempo della scossa. Questi fatti c' inducono a sospettare che la scossa nel 3 agosto abbia avuta intensità eguale o maggiore di quella del 28 luglio.

Trattandosi di un terremoto disastroso avvenuto sopra un vulcano semispento, ognuno vorrebbe sapere se le fumarole e le acque termali o potabili offrirono alcun segno precursore di così grande sciagura. Si è parlato di rombi sotterranei ed anche di piccole commozioni ne' giorni precedenti, ma ciò non risultando sicuro per testimonianza di tutti, e sapendosi che tali fenomeni sono consueti a Casamicciola senza precedere grandi scosse, non ne nasce alcuna legittima deduzione.

Le fumarole specialmente quelle di Montecito così prossime a Casamicciola avrebbero forse con la loro temperatura, con le loro sublimazioni, con la natura delle loro emanazioni aeriformi e con la disamina della tensione de' loro vapori, potuto dare indizio di una insolita attività. Ma noi possiamo dire quello che ci hanno offerto alcuni giorni dopo la catastrofe e non quello ch'esse presentavano poco prima che questa accadesse. Noi d'altronde dalle osservazioni di Thompson, Breislak, Scacchi, Deville e Fuchs conosciamo che le medesime subiscono certe fasi di maggiore o minore attività senza saperne i limiti. Si potrà sapere qualche cosa di più dopo una serie di osservazioni sistematiche e non interrotte che per deliberazione dell'Accademia saranno intraprese.

È degno di nota che le fumarole che durante le nostre indagini hanno dato emanazioni aeriformi corrispondenti ad un grado più elevato di attività vulcanica con variazioni più cospicue, sono quelle corrispondenti alla regione NW dell'Isola alle falde dell'Epomeo: le altre, comprese quelle de' Maronti, ch'ebbero sempre fama di più elevata temperatura, non sono andate oltre l'anidrite carbonica.

La temperatura delle acque termo-minerali subisce anch'essa delle variazioni; ma ponendo da banda le voci contraddittorie, crediamo di avere assicurato bene qualche fatto in proposito, che stimiamo degno di esser ricordato.

Si sa che quasi in tutte le storie de' grandi terremoti si parla di alterazioni delle acque delle sorgenti, sia per limpidezza, sia per temperatura, sia per diminuzione o per aumento di portata. Diogene Laerzio dice che Ferecide Siro predisse un terremoto, esplorando l'acqua di un pozzo. Plinio ci assicura che le acque de' pozzi divengono torbide e fetide: *Est et in puteis turbidior aqua, nec sine odoris taedio.* Il Bonito poi dice che talora le acque fredde si riscaldano e le calde si rinfrescano.

Ci fu chi disse che le acque de' pozzi a Casamicciola si disseccarono, e chi rispose che a Casamicciola non vi sono pozzi, ma il vero è che al Monte della Misericordia ci ha due pozzi, e che non fu in essi avvertito alcun cangiamento, secondo ci assicura il Prof. Palma.

Nel giorno 3 settembre mentre uno di noi era sulle fumarole di Montecito il Sindaco di Forio spediva in Napoli al Prof. Palmieri una bottiglia ben suggellata piena di acqua di un pozzo di *Bajola* o *Vajola*, piccolo borgo appartenente alla parte elevata di Forio, con la seguente lettera:

« Nella contrada Baiola, ad oriente di Forio, luogo ben bersagliato dal terremoto del 28 luglio, àvvi un pozzo abbastanza profondo, che ha dato sempre acqua abbondante

ottima a bere per freschezza, limpidezza e sapore. Questa sorgente un 8 a 10 giorni prima del 28 luglio incominciò non solo a farsi sensibilmente scarsa, ma quanto meno fresca e torbida propriamente del color di quella in cui vi sono stati cotti dei maccheroni, con odore pronunziatissimo d'idrogeno solforato, di sapore ingrato ed inservibile per qualunque uso.

« Un dieci giorni dopo la catastrofe del 28 luglio in poco tempo l'acqua in esame perdendo le qualità cattive spontaneamente si rese di nuovo abbondante, fresca, limpida e di sapore piacevolissima, e tutta la gente del rione se n'è servita per qualunque uso, essenzialmente per beverla, come la usava prima.

« Da 7 a 8 giorni in qua la medesima acqua spogliatasi novellamente delle sue buone qualità è ritornata cattiva come al tempo del 28 luglio. Per maggior chiarezza ed intelligenza ne fo tenere una bottiglia alla S. S. Ill.ma.

« Queste cose sonomi state narrate dal padrone del pozzo e dalla gente del rione, mentre recatomi sul luogo ho voluto con le mie mani empire la bottiglia che le mando.

« La stessa gente che ha dato le notizie succennate mi ha assicurato che i medesimi fatti si verificarono nel 4 marzo 1881 ; cioè poco prima di questa epoca l'acqua del pozzo in parola, buona e potabile, in breve tempo si fece cattiva e dopo la catastrofe ritornò buona com'era stata sempre pel passato.

Sarò fortunato se la S. S. Ill.ma mi onorerà di riscontro ecc. ecc.

Bonaventura Verde

Esaminata quest'acqua torbida conteneva idrogeno solforato in abbondanza, e la sera del giorno seguente avvennero due piccole scosse le quali evidentemente furono precedute dall'intorbidamento dell'acqua del pozzo di Baiola e dalla maggiore attività delle fumarole di Montecito che nel detto giorno davano oltre l'idrogeno solforato e l'anidrite solforosa, piccole quantità di acido cloridrico che nè prima nè dopo erasi ottenuto. Non tardammo a trasferirci a Forio per visitare il detto pozzo, ed in compagnia del Sindaco, del Can. Monti e di altri Notabili, trovammo che l'acqua del menzionato pozzo era divenuta quasi limpida, serbando appena un tenue residuo d'idrogeno solforato. Furono queste le ultime scosse avvertite nell'Isola, giacchè due posteriori, annunziate sulle gazzette, non ebbero esistenza, nè più l'acqua del pozzo di Baiola si è alterata, essendosi il sig. Coppa di Forio cortesemente offerto di visitarla assiduamente, avvisandoci qualora il fenomeno si riproducesse ed inviandoci prontamente i saggi dell'acqua.

Potrebbe darsi che questo pozzo assiduamente visitato riesca un prezioso indicatore delle commozioni del suolo.

Noi pensiamo che in quel pozzo metta capo una fumarola che, debole o nulla nei tempi ordinari, giunga, allorchè si rinvigorisce, al periodo dell'idrogeno solforato con la corrispondente elevazione di temperatura.

Un altro fatto che concerne la temperatura delle acque vien riferito dal D.r Gaetano Conti addetto alla cura di qualche infermo nell'elegante istituto balneare Manzi. Il Conti dunque in un articolo, in forma di lettera al Prof. Palmieri, inserito nella gazzetta *l'Abruzzo* dice ch'egli regolava l'uso delle docce, delle irrigazioni e de' bagni ad una Signora, e si era proposto di arrivare gradatamente alla temperatura di 42° mescolando l'acqua calda con quella raffreddata. Il dì 27 luglio l'acqua fu portata a 40°,5 e la mat-

tina del 28 non fu possibile andare oltre i 37°, escludendo interamente l'acqua fredda. Afferma poi aver saputo da alcuni feriti i quali raccolti nel teatro di legno, erano da lui medicati, che una signora che solea dopo il caffè prendere un bicchiere di acqua fresca, avendone nel mattino del 28 fatta richiesta, fu trovato senz'acqua il pozzo che il giorno innanzi ne avea in gran copia, di che la Signora atterrita fece subito ritorno in Napoli. Ci piacerebbe sapere il nome di questa Signora per poter avere informazioni più precise, giacchè converrebbe sapere se effettivamente si trattava di pozzi o di cisterne, essendo i primi poco comuni a Casamicciola.

Veniamo ora ad indicare l'indole e la intensità de' disastri. Casamicciola può dirsi interamente distrutta, ma i segni di maggiore ruina si ravvisano in una zona elevata da 50 a 70 metri sul livello del mare. Tenuto conto della varia solidità delle costruzioni, sempre si vede che in preferenza le case sono crollate ove il terreno era in pendìo, e le numerose fenditure del suolo che si vedevano sulle creste delle colline accennavano a spostamento del terreno verso la valle, cioè a frane o scoscendimenti. Per la qual cosa tutti gli edifizî che si trovavano parte sul piano e parte sul pendìo mostravano questa interamente distrutta e quella almeno con qualche muro in piedi. Fra tanti esempî che si potrebber citare ricorderemo il vasto ed elegante albergo della *Piccola Sentinella* che fu la tomba di tante nobili vittime. Di questo grande fabbricato crollò solo quella parte, ove era la sala di riunione degli ospiti, con le poche stanze ad essa soprapposte, e questa parte crollò in una maniera di burrone sottoposto ove un muro di riparo sosteneva il terrapieno, il quale per la spinta accresciuta lo rovesciò e così cadde la parte del fabbricato ch'era dal medesimo sostenuta. La gran sala da pranzo contigua a quella di trattenimento rimase in piedi co' lumi accesi, con le tavole al loro posto e co' cristalli neppure rovesciati. Il pavimento era perfettamente a livello siccome in nostra presenza fu minutamente verificato dal giovane Professore Eugenio Scacchi, ch'era in nostra compagnia. Se il disastro fosse avvenuto mezz'ora prima, gli ospiti si sarebbero trovati a mensa e si sarebbero tutti salvati, come si salvarono coloro ch'erano in altre stanze, tra' quali l'onorevole Fortunato.

Il suolo d'impianto dunque avendo quasi sempre ceduto per parziali franamenti del suolo nella mezza costa, e le spinte de' terrapieni fatte per ciò più considerevoli, vi danno ragione de' grandi disastri avvenuti, anche senza tener conto della deplorevole natura de' fabbricati.

Il D.r Fazio che poche ore dopo il disastro, dal Porto d'Ischia giunse alla marina di Casamicciola, vide la superficie delle acque coperta di pomici cadute per franamento delle coste. Anche l'Epomeo solito a dare delle frane, ne presentò moltissime, non solo in quel terribile momento, ma eziandio ne' giorni seguenti, anche senza scosse.

In tutt'i paesi maggiormente colpiti si notano gli stessi fatti, cioè le stesse fenditure sull'alto delle colline con gli stessi scoscendimenti pe' quali anche i fusti degli alberi sonosi inclinati, e sempre si nota un terreno fragile incoerente e prono agli scoscendimenti, o che si tratti delle così dette marne, o del tufo dell'Epomeo, o del tufo trachitico con pomici interposte a strati. Il tufo dell'Epomeo in certi luoghi è sodo e compatto e quivi i fabbricati hanno notevolmente resistito, e sono rimasti quasi del tutto incolumi quelli fondati sulla trachite compatta, come a Zale e ad Ischia.

A pochi passi della piazzetta della marina di Casamicciola verso oriente trovasi un area di circa 100,000 metri quadrati la quale ha goduto di una maravigliosa immunità.

Quest'area è detta *contrada Perrone* ed è contigua al Monte Tabor ed al mare. Questo fatto richiamò anche l'attenzione della Commissione nominata dal Collegio degl'Ingegneri di Napoli per istudiare il presente disastro. Ed essa con ottimo divisamento fece eseguire degli scavi e trovò che dopo uno strato di terra vegetale di 20 a 60 centimetri ne viene uno della grossezza di 4 a 5 metri di una puzzolana compatta conosciuta col nome di *puzzolana de' Perroni,* e dopo di questa si trova un tufo compattissimo. Aggiungiamo noi a tutto questo, che il terreno è quasi in piano e però i fabbricati poggiati sopra di esso, esenti da spinte e da scoscendimenti, sonosi mantenuti in piedi ad onta della loro vetustà e non lodevole costruzione.

Studiando attentamente le ruine si acquistava il convincimento, che il brevissimo agitarsi del suolo ebbe termine con un impeto a sbalzo o pulsativo, che smovendo un terreno incoerente ed in pendìo provocò la ruina de' fabbricati che per la maggior parte dal lato della solidità lasciavano molto a desiderare. Sebbene in parecchie occasioni oggetti leggieri rimasti in sito par che si oppongano a tale persuasione. Il cav. d'Ascia autore della Storia di sopra citata era a Monterone sua terra natale e preparavasi ad andare a cena per cui avea la mensa apparecchiata con piatti bicchieri e bottiglie; la casa crollò quasi tutta meno due stanze in una delle quali era la mensa che rimase intatta. Potremmo citare molti casi simili.

Figuriamoci un impulso che partendo da una profondità di tre in quattro chilometri attraversi roccie di natura diversa per compattezza e per elasticità, da giungere più o meno obbliquamente al suolo sul quale sono fondate le case, e questo per la sua indole e pel suo pendìo sia facile a smuoversi, ed avrete facilmente la idea di urti ora diretti, ora obbliqui, ora centrali, ora eccentrici, e quindi anche parzialmente rotatorii, che seguono o accompagnano l'impeto primitivo[1]). Chi in tutto quel complicatissimo tramestio volesse vedere delle leggi dinamiche da sottoporsi a computi matematici, si adoprerebbe invano ad imporre l'ordine al disordine.

Alcuni edifizi che nel disastro del 1881 rimasero in piedi perchè, si dicea, erano bene orientati, ora sono spariti.

Se que' desolati paesi ora distrutti fossero stati edificati sopra un suolo di trachite compatta come quella di Zale o del castello d'Ischia, con tutta la loro pessima costruzione sarebbero rimasti almeno in piedi, come vediamo il faro sulla punta dell'imperatore, Montevergine con altri fabbricati a Zale, e le antichissime fabbriche addossate sul ripidissimo pendìo di quello scoglio che abbiamo di sopra menzionato. Noi siamo dunque intimamente convinti che i guasti avvenuti abbiano di gran lunga superato la intensità del terremoto. Con migliore impianto, con costruzioni ben fatte sopra un terreno meno proclive alle frane ed agli scoscendimenti, siam sicuri che il terremoto avrebbe appena lasciata qualche traccia della sua manifestazione.

Nella stessa Casamicciola si vede che dove il suolo non si è mosso per migliore consistenza e dove i fabbricati erano meglio eseguiti i danni sono stati meno gravi e talvolta anche nulli. Poco più in là della *Villa Sauvè,* che quantunque lesionata pure ancora si regge, ci fu additata una casa assai ben costruita da un ufficiale del Genio Russo la quale è rimasta illesa in mezzo alle circostanti ruine, e non è stata forse avvertita da alcuno.

[1]) L'illustre sismologo Roberto Mallet nella dotta introduzione da lui premessa alla traduzione in inglese di una mia relazione dell'incendio del Vesuvio del 1872, ricordando altre sue antecedenti pubblicazioni, dice: *I should state, however, that in it I proved the fallacy of the notion of vorticose shocks* ec.

Passando da Casamicciola a Lacco si notano le stesse cose, e sempre i maggiori guasti ad una certa altezza. Proseguendo il camino verso occidente per le falde dell'Epomeo, dopo le fumarole di Montecito se ne incontrano molte altre: di queste sarà tenuto discorso a parte, essendo esse state studiate principalmente da uno de' componenti la Commissione. In tutta questa plaga di NO le frane, gli scoscendimenti le fenditure del suolo mostrano che quivi l'impulso venne più intenso. Seguendo il giro verso occidente si giunge a Forio. Pochi sono i guasti nella parte bassa del paese; ma la parte più elevata che dicesi *Monterone,* all'altezza di 70 a 90 metri, le ruine sono pari a quelle della zona più flaggellata di Casamicciola. Bajola ove sta il pozzo del quale fu detto di sopra appartiene a questa contrada. Poco più in su nel luogo detto *Tirone* o *Torone* la bella casa de' Fratelli Monti caduta per metà, posta in parte sul ripiano della collina ed in parte sopra un pendìo molto ripido, presenta un caso simile a quello dalla Piccola Sentinella ed a tanti altri che ci fu dato di notare. Salendo più in alto sull'Epomeo qualche fabbricato quivi esistente si vede in piedi come S. Maria del Monte.

Da per tutto intorno all'Epomeo si osserva una zona di massima intensità; di sopra come di sotto di questa i danni sono minori o anche nulli. L'Eremo di S. Nicola, ch'è in cima dell'Epomeo, serba appena qualche segno della commozione sofferta.

Questa zona di maggiore intensità prende Casamicciola all'altezza indicata, va per Fango Frassitelli ecc. a Monterone, ed elevandosi sempre di più, prende Ciglio, passa tra Serrara e Fontana e, sempre salendo, gira per Moropano, Pieio, Fiaiano, ch'è ad oriente sopra le *Cremate* cioè sull'origine delle lave del 1301 all'altezza di 260 metri, sul livello del mare, dove l'amena e grandiosa casa Baldini invita a ripetere le osservazioni fatte alla Piccola Sentinella ed alla bellissima casa de'Fratelli Monti. Questa zona dunque non è *grossolanamente circolare,* come altri disse, ma gira ad elica intorno al monte.

Quindi s'intende che i paesi che più si allontanano da questa zona, sia salendo come Fontana, ad onta che si trovi nell'antico cratere dell'Epomeo, sia scendendo come Barano che ha sofferto meno di Morapane, e Testaccio ch'è rimasto quasi incolume, hanno avuto minori o niun danno a deplorare.

Così s'intende come Molara abbia sofferto ben poco e come nessun danno abbiano patito i fabbricati di Campagnano e d'Ischia senza ricorrere a certi supposti baluardi.

Dal mezzo delle ruine di Casamicciola si vede la così detta *Casa Pizzi* rimasta in piedi sul pendìo del Monte ad un altezza di alcune centinaia di metri di sopra le fumarole di Monte Cito.

Sulla carta che presentiamo all'Accademia per far meglio intendere quello che diciamo è rappresentata la distribuzione delle fumarole che senza dubbio appartengono a diversi periodi eruttivi, perchè non ci pare che le medesime possano giustificare certe supposte fratture.

Questa zona ascendente da noi indicata non è isosismica, ma rappresenta in ciascun versante o in ciascuna generatrice dell'Epomeo il luogo più fortemente colpito dall'impulso sotterraneo.

Casamicciola e Monterone ci sembrano egualmente diroccati, ma la verticale sismica non può passare per la metà della retta che congiunge queste due regioni, perchè Ciglio, Moropano, Pieio e Fiaiano che si trovano nella zona di sopra indicata girando per S fino ad oriente, ci obbligano a penetrare nell'interno dell'Epomeo per porla equidistante presso a poco da Casamicciola e Monterone, entro la curva rappresentata dalla zona anzidetta.

Le maggiori devastazioni delle due menzionate regioni dell'Isola vi danno il primo indizio che la verticale sismica non può coincidere con l'asse dell'Epomeo, dovendo approssimarsi a' paesi più fortemente colpiti. E poi se la verticale sismica coincidesse con

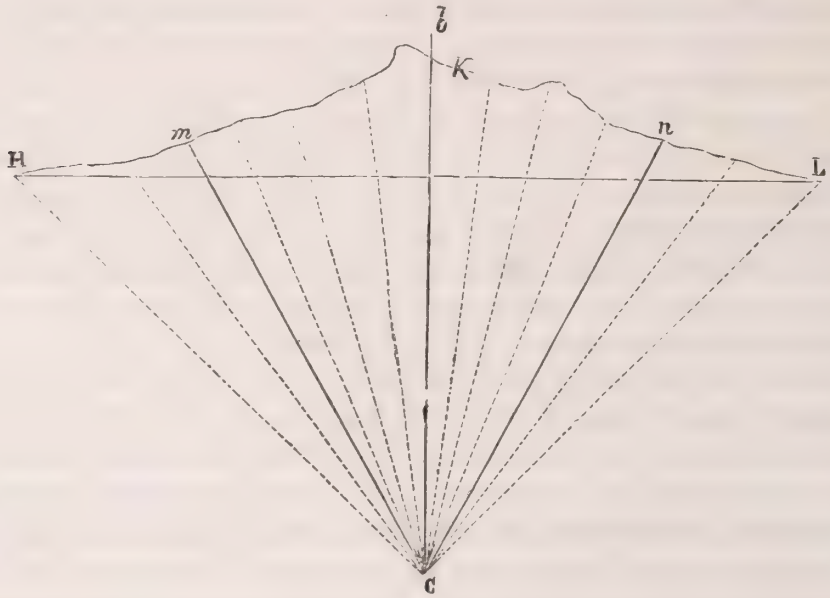


Fig. 1.

l'asse dell'Epomeo, la zona di cui parliamo sarebbe orizzontale, cioè parallela alla base del monte ed isosismica; allora le linee di minima resistenza cioè le perpendicolari alla

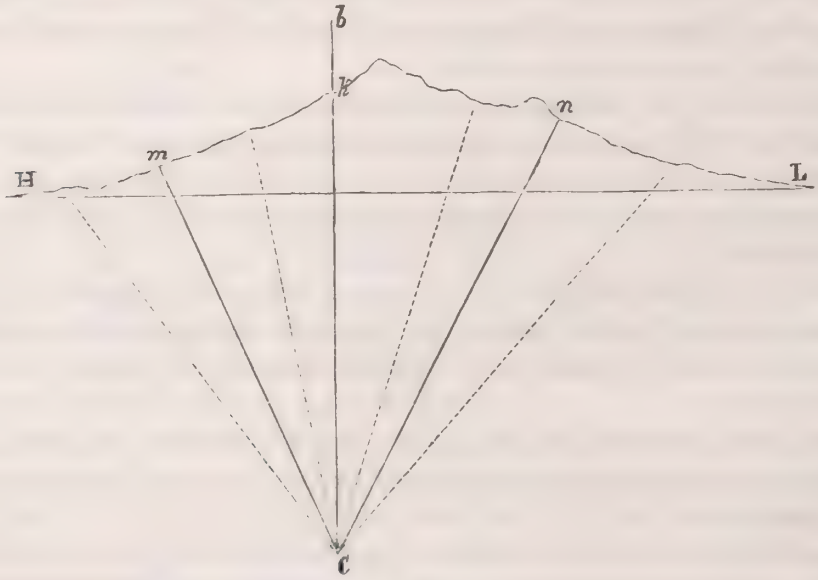


Fig. 2.

superficie di questa zona andrebbero a concorrere verso il centro impulsivo o foco sismico di cui verrebbe a determinarsi la profondità.

La figura 1ª credo che basti a rendere intuitiva questa verità. E per fermo se la verticale sismica *c b* coincidesse con l'asse dell'Epomeo il cui profilo è rappresentato dalla curva HKL, le linee di minima resistenza, cioè le perpendicolari *c m, c n* ecc. menate dal foco sismico alla superficie del monte segnerebbero una zona di massima intensità quasi orizzontale ed isosismica, il che non si è punto verificato.

Ma rappresentiamo con *m* (*fig.* 2ª), il punto più basso della nostra zona a Casamicciola o lì presso e con *n* il punto più elevato della medesima che corrisponde a Fiaiano: se prendete le due inclinazioni e fate partire due perpendicolari *m c, n c* queste dovranno incontrarsi nel foco e la verticale sismica *c b* si troverà eccentrica e più prossima a' paesi più fieramente colpiti.

Misurando con un buon clinometro o con una livella a pendio la inclinazione del profilo del monte ne' punti *m, n* ecc. ognuno intende come si possano determinare i valori degli angoli *m c b, n c b.*

Con una sezione dell'Epomeo fatta a scala piuttosto grande si potrebbe graficamente e senza computi matematici avere tutte le determinazioni di sopra indicate.

Dalla carta a curve continue dello Stato Maggiore ch'è al cinquantamilesimo, il giovane Professore Eugenio Scacchi che ci ha coadiuvati nelle nostre peregrinazioni,

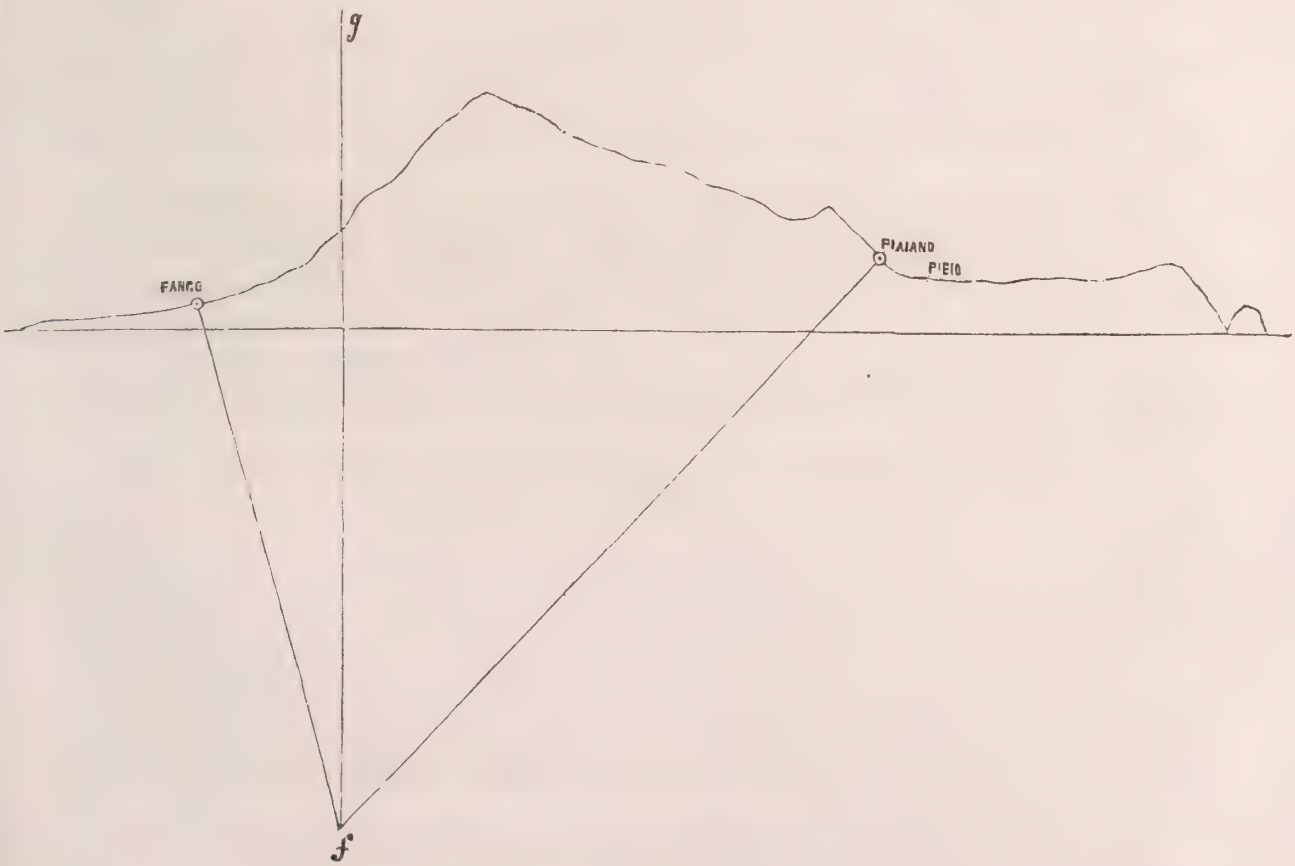


Fig. 3.

ha ricavata la sezione espressa nella figura 3ª nella quale le altezze sono raddoppiate per maggiore chiarezza. In mancanza di una carta a curve continue di grandezza mag-

giore, diamo il profilo di una sezione dell'Epomeo che passa sopra *Fango,* cioè per un punto intermedio tra Casamicciola e Monterone, e rasenta *Fiajano* che rappresenta il paese più elevato della zona ascendente di sopra indicata, che cominciando a tramontana con Casamicciola va ad occidente per Fango a Monterone, a mezzogiorno per Moropano volgendosi ad oriente per Pieio e Fiaiano. Le due linee di minima resistenza menate da questi due punti Fango cioè e Fiaiano, vi determinano il foco in *f* e la verticale sismica *f g*, la quale passa al disopra di Fango sul dorso di *Pizzone* o *Bastia* quasi equidistante da Casamicciola e Monterone. Il foco o centro sismico sarebbe ad una profondità di oltre tre chilometri.

Prescindendo da queste considerazioni, le maggiori frane dall'Epomeo da questo lato, il maggior numero delle fenditure, la maggiore attività dalle fumarole assunta, e finalmente il grande spostamento di terreno, frattura o avvallamento di Pizzone, dicono ad evidenza che la verticale sismica coincide con quella da noi determinata, per modo che il metodo tenuto per determinarla viene per questo ad avere una riprova.

Non crediamo esser questo il luogo di dire le ragioni per le quali in coteste determinazioni non abbiamo creduto di seguire i metodi, senza dubbio ingegnosi, di Roberto Mallet, teoreticamente verissimi, ma per lo più incapaci di applicazione, senza particolari supposizioni delle quali si può dubitare.

E poi se il dotto sismologico inglese osò tentare una via per giungere a certe determinazioni, non ci si negherà il diritto di tentarne un'altra applicabile al caso presente.

I disastri così vicini del 1881 e del 1883 fecero nascere il timore di prossimi incendi vulcanici nell'Isola. Noi senza negarne la possibilità, non ossammo affermarne la probabilità.

1° Perchè credemmo come crediamo tuttavia che queste grandi ruine non sono state proporzionali nè alla intensità nè alla durata nè al numero delle scosse, ma sono in gran parte derivate dal cattivo impianto e pessima costruzione de'fabbricati, e da parecchie cagioni locali. E così si dà ragione del gran numero delle immunità che in una regione così limitata a Perrone, a Zale, alla Punta dell'Imperatore, a Testaccio, alla marina di S. Angelo, ad Ischia e perfino entro le ruine di Casamicciola formano la maraviglia dell'osservatore.

2° Perchè la storia c'insegna che il preludio di nuove conflagrazioni ne'vulcani semispenti sono i terremoti continui, o ricorrenti a brevi intervalli. Nel ridestarsi dal Vesuvio nel primo secolo dell'èra volgare, i terremoti cominciarono molti anni prima ed acquistarono tale frequenza da non più spaventare le popolazioni, secondo narra Plinio: *Precesserat per multos dies tremor terræ minus formidolosus quia campaniæ solitus.*

Se ci mancano notizie precise intorno a'terremoti che precedettero gl'incendii vulcanici dell'Isola d'Ischia, ne abbiamo parecchie di scrittori coevi alla eruzione di Montenuovo. Simone Porzio dice infatti così: *Fuit haec regio biennio fere magnis terremotibus agitata ut nulla in ea superesset domus integra, nullum aedificium, quod non certam et proximam ruinam minaretur.*

Ed il Borgia anch'esso testimone del fatto, dichiara l'incendio di Montenuovo predetto da'terremoti mille volte ripetuti.

Haec mala praedixit toties agitata tremore
Terra gravi: ac pelagi pulsantis moenia murmur.

E finalmente riferiamo le parole di Marco Antonio delli Falconi: « Sono ormai due « anni che in Pozzuoli, in Napoli e nelle parti convicine sono stati spessi terremoti. Ma « nel giorno innanzi che apparve tale incendio, tra la notte ed il giorno, furono sentiti « nelli predetti luoghi, tra grandi e piccoli, più di venti terremoti ». Le stesse cose vengono anche riferite da Pietro Giacomo da Toledo.

A tutto questo aggiungiamo che ne'forti incrementi di attività eruttiva del Vesuvio e specialmente nelle vigorose eruzioni eccentriche come quella del 1861, il sismografo per alcuni giorni innanzi ha sempre dimostrato che il suolo era in continue agitazioni variabili da un momento all'altro, ma sempre con intensità crescenti. Noi intanto con un apparecchio sismico semplicissimo e di maravigliosa squisitezza non abbiamo notato nulla di simile nel suolo dell'Isola, e però non ci parve probabile un prossimo incendio vulcanico, nè osiamo fare predizioni lontane.

Se gli abitanti dell'Isola sapranno nelle future costruzioni scegliere un suolo più conveniente, provvedere all'impianto delle fondazioni, ed al materiale opportuno, per la fabbrica, evitando le volte che, sebbene in antico raccomandate da Plinio, ne'tempi moderni crollano facilmente, a differenza di quelle romane che come il Pantheon hanno resistito a'grandi terremoti, siano pur certi che ripetendosi altre scosse come questa del 1883, non si avranno a deplorare così grandi sventure.

Se non fosse venuto in mente al proprietario della *Piccola Sentinella* o al suo architetto di fondare la gran sala di trattenimento sopra un pendio ripido e franoso, e per soprassello edificarvi sopra altri due piani, quel grande albergo non avrebbe avuta alcuna vittima come non ne ebbe la sua succursale, cioè la *Villa Sauvè.*

Noi senza ripudiare speciali costruzioni in legno, in ferro ec. non avremmo difficoltà di abitare una casa in muratura bene impiantata, ben costrutta e la cui base fosse un quadrato o anche un rettangolo i cui lati siano al più in proporzione sesquialtera. La casa che abbiamo di sopra citata tra la Villa Sauvè e la Grande Sentinella giustifica quello che diciamo.

Imperciocchè noi siamo convinti che l'Isola d'Ischia ha sofferto un immenso disastro, ma non un grande terremoto. Casamicciola e Monterone ora tanto rovinate, se ad onta della pessima struttura delle loro case si fossero trovate sulla trachite del promontorio di Zale tanto vicino e quasi interposto, non si vedrebbero ora adeguate al suolo.

Si è finalmente domandato se a prevedere simili futuri disastri si possano adoperare apparecchi sismografici. Mettendo da banda la difficoltà di avere persone capaci a regolare siffatti apparecchi, diciamo che siccome quasi sempre le forti scosse sogliono esser precedute da piccole commozioni del suolo, così questi strumenti dovrebbero risentirsi prima che una forte scossa si appalesi; ma siccome il suolo dell'Isola è assai spesso agitato da piccole ed innocue commozioni, le quali raro è che siano seguite da scosse pericolose, così converrebbe mettere troppo spesso le popolazioni in sull'avviso, creando un panico pericoloso, che tosto creerebbe la incredulità ai responsi de'sismologi. Con ciò non vogliamo negare alcuni risultamenti scientifici a'quali si potrebbe forse un giorno pervenire con osservazioni fatte da persone competenti e con istrumenti opportuni debitamente impiantati.

Il numero totale dei morti per la catastrofe innanzi descritta, secondo le pubblicazioni ufficiali, è di 2313, 1784 dei quali appartengono a Casamicciola, i cui fabbricati

si trovano per la massima parte, compresi nella zona di sopra descritta. Forio ha dato solo 345 vittime, perchè quivi la zona di massimo ha colpito la borgata di Monterone (parte alta di Forio), recando pochi danni alla parte bassa e più abitata del paese.

Stimiamo finalmente esser nostro dovere di esprimere i più sinceri ringraziamenti al Ministro dei Lavori Pubblici On. Comm. Genala, che tanta cura prese dei superstiti della sventura, trattenendosi lungamente in mezzo ad essi, al Sotto-Prefetto di Pozzuoli Sig. Cav. Battista, che fissò anch'egli la sua residenza nell'Isola per prestare opera più efficace nella sventura, al Prefetto di Napoli Conte Sanseverino, al Colonnello Parodi, al Capitano Bona dei RR. Carabinieri ed ai Sindaci dei comuni dell'isola, i quali tutti coi notabili dei paesi furono larghi verso la Commissione di quelle agevolazioni che poteva desiderare.

L. Palmieri *relatore.*

PARTE SECONDA

PRIME OSSERVAZIONI SULL'EMANAZIONI GASSOSE DELL'ISOLA D'ISCHIA

Carlo Saint-Claire Deville, nel 1862, in una lettera [1]) diretta al fratello Errico, parlando delle variazioni osservate nelle emanazioni più attive dei Campi Flegrei, presso a poco scriveva nel modo seguente: « Sarebbe necessario, per conoscere « con certezza queste variazioni, stabilire una larga serie di osservazioni, ricercando in « che rapporto stanno i mutamenti con la temperatura delle fumarole, con la pres- « sione atmosferica e, sopra tutto, con lo stato di attività dell'apparato centrale del Ve- « suvio, per esempio, con la produzione o sparizione di un nuovo apparato avven- « tizio. Tali lavori, se abbracciassero l'assieme degli eventi vulcanici dei Campi Flegrei « apporterebbero certo nuova luce sui rapporti che legano un vulcano centrale come il « Vesuvio alle manifestazioni eruttive secondarie che lo circondano; ma non potranno « essere fatti che da sperimentatori stabiliti sui luoghi, ed io mi feliciterò vivamente se « le ricerche da me cominciate nel 1855 potranno divenire il punto di partenza di os- « servazioni continue, le sole che possano rischiarare con certezza lo andamento dei fe- « nomeni naturali. »

E il Dumas qualche anno prima, nel 1857 [2]), riferendo alla Accademia di Francia sopra alcune memorie del Deville Carlo, concludeva così: « Le emanazioni gassose « dei vulcani, analizzate comparativamente, potrebbero far prevedere, nello interesse « pratico delle contrade vicine, le fasi che il fuoco di agitazione andrebbe a percorrere. »

Si comprenderà facilmente, adunque, che assai onorato e lieto si è creduto uno di noi ricevendo dalla nostra Accademia lo incarico speciale di studiare appunto in modo continuo le emanazioni gassose dei Campi Flegrei: le fumarole dell'isola d'Ischia e della Solfatara di Pozzuoli specialmente.

La breve nota che oggi vi presentiamo è ben lungi dall'essere la prima parte delle

[1]) *Comp. rend.* T. LV, p. 584.
[2]) Ib. id. T. XLIV, p. 1029.

accurate ricerche che ci proponiamo intraprendere, ma dee solamente considerarsi come il riassunto delle osservazioni fatte percorrendo in fretta una buona parte del nuovo campo da esplorare. Comprenderete perchè le vere ricerche esatte siano da cominciare. La necessità di provvederci d'istrumenti speciali, di avere una esatta conoscenza dei luoghi, dei mezzi dei quali avremmo potuto disporre, e, specialmente, le condizioni tristissime dell'isola d'Ischia hanno fatto ritardare il nostro lavoro.— Non crediamo però che il poco fatto sia del tutto privo d'interesse.

Mentre si ha un grandissimo numero di pubblicazioni, le quali bene o male parlano tutte delle varie sorgenti dell'isola d'Ischia, facendone la storia, descrivendone la chimica composizione od esaltandone fin troppo le virtù medicamentose; poche ed incerte notizie abbiamo sulle numerosissime fumarole che si rinvengono in parecchi punti dell'isola. Le prime notizie che ci fu dato raccogliere sono quelle inedite e molto esatte ricavate dal diario del nostro Scacchi, il quale visitò l'isola nel maggio e giugno del 1840. Si parla pure delle fumarole dell'isola in una lettera di Carlo Sainte Claire Deville pubblicata nel 1865 [1]), ma le osservazioni si riferiscono all'anno 1856. Si trovano ancora alcune notizie nella più recente memoria del Fuchs: Monografia geologica dell'isola d'Ischia.— Tutti gli altri come il Thompson, il Fonseca, il Guarini, ecc. ecc., tutt'al più non dànno che la temperatura delle acque o di qualche fumarola.

Ecco quanto noi abbiamo osservato nelle nostre molte visite. Cominciando dal Bagno d'Ischia faremo il giro dell'isola da est, nord, ovest, sud.

Ischia e Bagno.— Dobbiamo notare le sorgenti termali di Pontano, a sinistra della via che conduce all'Arso, e Fornello e Fontana presso il Lago del Bagno.

Per la temperatura della sorgente Pontano: D'Ascia dà 33°,7; Gussone 28°; Fuchs 33°,7.

La temperatura delle sorgenti di Fornello e Fontana è pure variabile: il D'Ascia dà 55-57° e dice che nel 1845 vi furono raccolte anche le acque di Pontano; Gussone trovò per Fornello 53°, per Fontana 62°; il Fuchs la dice variabile tra 55-58°,7 ed aggiunge che dalle acque si elevano grosse bolle di acido carbonico; Deville Carlo nell'agosto 1856 constatò che una sorgente (quale?) segnava 42° e l'altra 50°; Zinno nel 1881 la trovò oscillante tra 52-55°. La mattina del 29 *agosto,* alle 6,30 a. m., la temperatura della sorgente presso la porta di entrata dello stabilimento balneare fu da noi trovata eguale a 52° C.

Monte Rotaro.—Dal Bagno, girando un poco a sud-est, si viene sul Montagnone, ove fanno bella mostra della loro resistenza due prismi a base quadrata, di 0,50 di lato per m. 2 circa di altezza, vuote all'interno e che servono come sfogatoi all'acqua incanalata che dal Buceto va ad Ischia.— Procedendo a nord-est si passa per il Fondo del Rotaro e si viene poi sul Monte Rotaro, che i paesani chiamano Fondo d'Oglio.

Al lato ovest del bellissimo cratere, cioè dalla parte che guarda Casamicciola, vi sono parecchie deboli fumarole, che non ci è noto siano ricordate da altri. Il 29 *agosto* alle 7 e $^1/_2$ del mattino esalavano vapore acquoso con un poco di anidride carbonica;

[1]) *Comp. rend.* T. LXI, p. 760 e 820.

la temperatura della più attiva fu trovata eguale a 51°; in una si rinvenne una piccolissima quantità di zolfo; ma non si trovò la più piccola traccia d'idrogeno solforato.— Siamo stati altre volte sul luogo, ma l'attività delle fumarole si è mostrata sempre debolissima.

Monte Tabor o Cacciuto. — A nord di queste fumarole vi sono le stufe di Cacciuto o del Monte Tabor. Scacchi il 30 maggio 1840 vi trovò *forti esalazioni di caldi vapori, che non sentono di alcuno distinto odore.*

Deville nel 1856 ne determinò la temperatura, 64°C., e dice che erano costituite di solo vapore di acqua, senza nemmeno acido carbonico. Il Fuchs le descrive nel modo seguente:

« Scaturiscono dalla lava del Monte Tabor, sulla ripida balza occidentale della cor-
« rente, ad una considerevole altezza. Esse furono utilizzate in addietro, e vi furono so-
« praedificati gli stabilimenti di bagni, dei quali non restano più se non alcuni muri di-
« roccati. Ora è persino molto difficile di giungere ad esse, e per ciò fare bisogna arram-
« picarsi sulla ripida lava.

« Sopra una estensione di 160 a 180 piedi, da tutte le spaccature della Trachite
« che là si trova, erompono dense masse di vapori, che s'innalzano in altrettante colon-
« ne dell'altezza di 5 a 6 piedi. Alcune di queste spaccature sono lunghe da 6 a 10 pie-
« di e per tutta la loro estensione ripiene di vapori. Allorchè io visitai il luogo (il 26
« maggio 1870) in tutto erano per lo meno 30 aperture che fumavano: sembra però che
« il loro numero, come pure la quantità del vapore sieno variabili.

« In un punto determinai la temperatura del vapore a 63° C., immergendo comple-
« tamente il termometro dentro una spaccatura; in altro a 64°. Il vapore che usciva dalla
« più grande apertura aveva una temperatura di 68°.

« I vapori sono affatto senza odore, e non formano sulle fessure di uscita alcun de-
« posito. Essi consistono proprio di puro vapore acqueo, e vi mancano completamente
« persino quei gas che si trovano ancora dovunque nelle esalazioni dei Campi flegrei. »

Il Fuchs descrive il luogo con tanta esattezza che non potevamo far di meglio riportando le sue parole. — Il giorno della nostra visita dopo il tremuoto (29 *agosto* alle 9,30 a. m.) abbiamo trovate le cose di poco mutate. Forti getti di vapore; temperatura della spaccatura più attiva eguale a 70° C.; sviluppo di anidride carbonica; reazione dell'acqua acida; ma niente solfo, idrogeno solforato o reazione di cloruri.

Castiglione. — Vicine alle precedenti sono le stufe e l'acqua del Castiglione. — Si possono dividere in due gruppi, uno superiore sulla collina e l'altro inferiore in riva al mare.

Il Deville determinò la temperatura dell'acqua del mare di 68°, e quella delle stufe a 47°. Nel D'Ascia è detto 62°,5-65° e si parla forse di quella del mare. Gussone dà per l'acqua 29° ed al mare 62°. Guarini rispettivamente 35° e 75°. Nel Fuchs si legge:
« Il gruppo inferiore emana vapori di 37° a 50° con 26° di temperatura esterna; il grup-
« po superiore ha nelle stesse condizioni 56° a 57°. Il vapore condensato produce acqua
« paragonabile all'acqua distillata pura.— Lì vicino, la temperatura del mare presso alla
« costa si eleva sino a 75° C. ».

Visitando il luogo il giorno 11 *ottobre* alle 5 p. m. trovammo che le stufe superiori

sono state trasformate in abitazione per conigli domestici; nelle inferiori la temperatura dell'acqua fu trovata di 34° e quella del mare, a tre o quattro metri distante dalla sorgente, di 55°.

Gurgitello.— Dal Castiglione, passando per la contrada Perrone, oggi rione Genala, e girando a sinistra, si viene a Monte, o Rione dei Bagni. Quivi erano i più importanti stabilimenti balneari, quali quelli del Monte della Misericordia e di Manzi.

È detto nel D'Ascia che l'acqua del Gurgitello scaturisce da molte vene copiosissime nel fondo della *valle di Ombrasco* all'Est del Comune di Casamicciola; e seguendo lo stesso autore sembrerebbe che le acque degli stabilimenti della Misericordia, del Manzi e di altri meno rinomati, abbiano tutte la medesima origine.— Non abbiamo avuto il tempo e la possibilità di visitare proprio le sorgenti; ma per la natura del luogo non siamo lontani dallo accettare le idee del D'Ascia.— Lo stesso dice che l'acqua del Gurgitello ha una temperatura di 62°,5-70°; il Gussone la trovò di 70° ed il Guarini di 80°; il Fuchs va di concerto col D'Ascia in quanto alle sorgenti del Gurgitello, ma per la temperatura la dice ondeggiante tra 52° e 95°, ed annunzia che dall'acqua si sviluppa una abbondantissima quantità di anidride carbonica; il nostro socio Palmeri, che analizzò l'acqua del Monte della Misericordia nel 1879 trovò 60°,4, e nel 1881 dopo il terremoto 62° [1]). Scacchi il 31 maggio 1840 per la sorgente del Gurgitello trovò 64° C.

Il 28 *agosto*, nelle ore pomeridiane, noi abbiamo potuto misurare le temperature dell'acqua del Monte della Misericordia, 57°, dei pozzi di Piesco Giovanni, 62°, di Ignazio Barbiere, 45°,5.

Montecito.— Dalla piazza dei bagni passeremo alle importantissime fumarole di Montecito, a sud di casa Mennella.— Troviamo nel diario di Scacchi (31 maggio 1840): « Nel tufo verdiccio come quello di Forio compariscono frequenti grossi blocchi ed ema-
« nazioni di vapori con la temperatura di 89° C., i quali cagionano arrossimento e scom-
« posizione della roccia, formazione di cristalli di zolfo, efflorescenze di solfato di al-
« lumina, e jalite. »

Il Deville, l. c., essendo stato a Montecito nel 1856, chiama il luogo delle emanazioni una molto profonda fessura in un conglomerato rosso alteratissimo. Sopra un primo punto, egli dice, vi ha deposito di allume e di gesso, ma non di zolfo; sopra un secondo, situato a qualche metro più in alto, si trova, con i solfati, una piccola quantità di zolfo.

Nei due casi, la carta di acetato di piombo è annerita, ma l'acido solfidrico non è dosabile. L'analisi sul luogo à dato in agosto 1856:

	1° punto Temperatura: 93,5 a 94°		2° punto Temperatura 94°	
Acido solfidrico. . .	tracce	tracce	tracce	tracce
Acido carbonico . .	1,8	5,7	1,3	0,9
Ossigeno	20,2	94,3	98,7	98,1
Azoto	78,0			
	100,0	100,0	100,0	100,0

[1]) Tolgo dalla memoria del Palmeri i seguenti dati relativi alla temperatura: Aloisio 1757,65°; Adria 1783,62°,5 Lancellotti 1818,75°; Lancellotti 1831,60°; Palmeri e Coppola 1876,60°,45.

Queste fumarole non sono ricordate dal Fuchs.

Noi abbiamo fatto di Montecito il campo delle nostre principali osservazioni. Le fumarole si aprono sui margini e nello interno di un piccolo burrone, che va da S. SO a N. NE e che in tempo di pioggia raccoglie le acque torrenziali degli adiacenti pendî. Esso è formato da un letto di erosione, scavato nel tufo verde dell'Epomeo; variabile in larghezza da due a cinque metri, la sua lunghezza è di quaranta o cinquanta metri. Il suo letto è fortemente inclinato.

Le fumarole possono dividersi, sia topograficamente, sia per la loro attività in tre gruppi. Il primo trovasi alla base del burrone ed è composto da leggere fumarole con pochissime incrostazioni e sublimazioni; il secondo trovasi sulla parete a sinistra di chi guarda verso la montagna e comincia a 4 o 5 metri di altezza per continuarsi sin verso il margine superiore della parete stessa, la quale trovasi tutta ricoperta d'incrostazioni e sublimazioni, ed è fortemente disgregata; questo secondo gruppo è il più forte e ad esso devono riunirsi le fumarole che trovansi alla stessa altezza sulla parete destra, ricche pur esse di sublimazioni ed incrostazioni. Il terzo gruppo comprende infine le fumarole che contornano il margine superiore del burrone aprendosi direttamente sul terreno vegetale. Questo gruppo, benchè abbastanza attivo, resta sempre inferiore al secondo.

Questa divisione corrisponde all'impressione che si ha guardando dal basso le fumarole senza studiare la loro giacitura nella roccia. Nelle prime gite a dir vero ci era stato impossibile studiare tale giacitura: un abbondante trasporto alluvionale copriva il fondo del burrone e permetteva un facile accesso alle fumarole del 2° gruppo, delle quali al tempo stesso mascherava l'origine. Similmente le pareti ricoperte d'incrostazioni e di roccia disgregata, non lasciavano scorgere nessuna linea di fenditura; ma essendo ritornati a Montecito dopo alcuni giorni di abbondante pioggia (26 settembre), l'aspetto del luogo era del tutto mutato. — La parte inferiore piana del fondo del burrone faceva vedere molte fessure, dalle quali venivano fuori piccole fumarole; la parte superiore messa a nudo era formata da una ripida spina di tufo, e la più bassa delle fumarole del secondo gruppo, prima posta in piano e facilmente accessibile, aprivasi adesso verticalmente nella parete, ed era impossibile eseguire, per mancanza di un piano adatto, i lavori progettati, cioè condensazione di vapori, raccolta di gas, ecc. ecc. — Nelle pareti lavate dalla pioggia si delineava poi qua e là una fenditura alla quale pareva si riattaccassero le fumarole del secondo gruppo.

Profittando della circostanza e della necessità di dovere adattare il locale alle operazioni chimiche, i Signori O. Rebuffat e A. Cabella, preparatori nell'Istituto chimico, pensarono di mettere a nudo nel tempo stesso, se c'era, la fenditura donde nascevano le fumarole del 2° gruppo. — Facendo un po' da picconieri ed un po' da muratori, Rebuffat e Cabella, ai quali si deve molta lode, praticarono nella spina di tufo un sufficiente numero di gradini, innalzando, basato sulla spina stessa ed appoggiato alla parete di sinistra, un muro a secco di quasi due metri di altezza sino a mettersi in piano colla più bassa fumarola. Posando su questo muro a secco attaccarono col piccone il tufo, il quale offrivasi non in massa continua, ma in pezzi molto grossi uniti fra loro in punti di minore resistenza. Smossi faticosamente circa due metri cubi di roccia, fu messa a nudo una fenditura, ampia variabilmente da 10 a 20 centimetri, e che pareva prolungarsi profondamente in dentro. Facendo cadere grandi massi di roccia in parte disgregata, ci fu relativamente facile poi verificare che la fenditura prolungavasi sino al margine superiore

della parete, e così constatammo che tutte le fumarole del secondo gruppo non ne costituivano in fondo che una sola sviluppantesi nei punti più liberi della fenditura. Questa, del resto, non è la sola che trovasi a Montecito, ed in vero esaminando attentamente le pareti del burrone, sotto lo strato di roccia decomposta e di sublimazioni, che le ricoprono, è facile convincersi che esse sono segmentate da numerose fenditure di variabile larghezza e per le quali il vapor d'acqua trova sfogo.—Tutte queste fenditure concentriche offrono la stessa direzione di quella superiore ultimamente apertasi, che viene a limitare completamente la piccola regione, e della quale parleremo.

Al di sopra delle antiche fumarole di Montecito, proprio a fianco la strada che da Forio conduce a Frasso, Casa a Pizzi ed a Jetto, sotto Monte di Mezzo, il 28 luglio si è prodotta una nuova spaccatura, nel terreno coltivato a vigneto da Giuseppe Scalisi di Diego.

Essa va da E ad O, curvandosi un poco agli estremi verso le antiche fumarole; la parte visibile è lunga circa 20 metri ed in qualche punto larga sino a 30 centim.; il terreno circostante mostra tutti gl'indizî di sobbalzamento per temporanea pressione sotterranea. Non si osservano incrostazioni bianche, ma solo deposito di zolfo agli orli o nello interno della spaccatura.—Le viti, i pomidoro, ed un albero di fichi, che stanno vicini o proprio dentro la spaccatura, sono morti perchè scottati dal vapore acquoso, e si presentano secchi o quasi. Non vi ha dubbio che questo nuovo sfogo delle emanazioni gassose sia recente, perchè oltre le affermazioni concordi dello Scalisi e di altre persone che non abbiamo trascurato d'interrogare, ne fanno fede le viti già potate, e che ànno ancora grappoli di uva, ma con acini piccoli e secchi, e l'albero di fichi con frutti secchi, ma di una certa grossezza.—Anche il terreno mostra che prima le fumarole non potevano esservi.

Ed ora ecco le osservazioni fatte a Montecito nello antico e nel nuovo recinto di fumarole.

9 Agosto.— *Prima visita.— Vecchio recinto.*—Ore 12 m. Molta attività; abbondante vapore acquoso; odore di anidride solforosa.—Sviluppo di anidride carbonica.

28 Agosto. — *Seconda visita. — Antica regione.* — Ora 1 p. m. — Attività maggiore del 9 agosto. Forti getti di vapore, alcuni intermittenti; alla bocca di alcune fumarole la roccia è nerastra, presso altre scolorita. — Avvicinando alle fumarole la carta di piombo dopo pochi minuti si fa nera.— La carta di tornasole bleu diventa rossa.— I vapori fatti gorgogliare nell'acqua di calce producono un precipitato che in seguito si ridisciogliе. — L'acqua condensata e gocciolante ai bordi delle fumarole ha reazione acida, dà precipitato coi sali di bario, ma non reagisce menomamente col nitrato di argento.

Moltissime incrostazioni, e molte bianche cristalline. — Raccolta con cautela nelle bianche la parte quasi fioccosa superficiale si trovò solubilissima nell'acqua, e la soluzione precipitò abbondantemente coi sali di bario, ma non diede traccia di cloruri.

Grandissima quantità di zolfo in lunghi fiocchi splendenti.—Staccato dalle fumarole immediatamente si fa opaco e friabile.

Temperatura dello ambiente 30°. Di due fumarole molto attive 100°.

Avendo raccolte in appositi fiaschi diverse incrostazioni per farne alcuni saggi in Laboratorio vi abbiamo trovato solfato di alluminio e potassio, gesso cristallizzato sotto forma di belli prismetti addossati gli uni agli altri in modo da formare degli strati fibrosi, ecc.; ma non ci fu dato rinvenire solfuro di arsenico, nè litio.—Non abbiamo avuto

la reazione di cloruri. — Le incrostazioni di solfo osservate al microscopio mostrano la solita forma piramidale costituita dallo aggregato di ottaedri, *ma abbiamo anche trovato alcuni cristalli nettamente prismatici.* — Lo zolfo è tutto solubile nel solfuro di carbonio.

4 Settembre. — *Terza visita.* — *Antica regione.* — Ore 3,30 p. m. — Grandissima attività; nuovi sbocchi con sibilio; pronunciatissimo odore di anidride solforosa; moltissimo idrogeno solforato; molto acido carbonico; temperatura 100° e forse più; incrostazioni molto aumentate. — Aspirando il vapore di una delle più attive fumarole e facendolo passare per soluzione di nitrato di argento, si è avuto opalescenza che si mantiene per l'aggiunta di acido nitrico puro, e sparisce mettendo invece ammoniaca. — Anche le sublimazioni questa volta dànno la reazione dei cloruri.

Francesco Calisi ci dice di avere inteso la mattina forte odore di zolfo bruciato.

Nota. *La notte alle* 10 *circa piccola scossa a Fontana-Serrara e Forio.*

12 Settembre. — *Quarta visita.* — *Antica regione.* — Ore 12 m. — Il primo gruppo poco attivo, il 2° molto; in generale attività quasi come l'ultima visita; odore nettissimo di anidride solforosa; idrogeno solforato in grande quantità; il vapore della più grossa fumarola contiene tracce di *HCl* o cloruri volatili; molta anidride carbonica. Abbondantissimo deposito di solfo e d'incrostazioni bianche o giallette.

Nuova regione. — Forte getto di vapori con idrogeno solforato, e ad intervalli con anidride solforosa. Molto zolfo, ma non incrostazioni.

26 Settembre. — *Quinta visita.* — Ore 10 a. m. — *Nuova regione.* — Getto forte — molto idrogeno solforato — deposito di solfo nell'interno della spaccatura — vapori acidi — qualche momento anidride solforosa — anidride carbonica.

Antica regione. — Ore 6 a. m. — Discreta attività, getti forti ad intermittenza, CO_2, H_2S, di tempo in tempo sensibile odore di SO_2 — Temperatura 100° — Poche incrostazioni per la pioggia dei giorni precedenti. — Si fa la scala ed il muro a secco e si mettono a nudo le spaccature: questo lavoro ci tiene occupati sino alle 12 m.; all' 1 p. m. si comincia la raccolta del vapore di acqua e degli altri gas della fumarola più attiva. Ci siamo serviti del seguente apparecchio. Alla bocca di un fiasco a stretta apertura, del quale si era fatto saltare il fondo, venne fissato con anello di causciù il collo di un matraccio a due tubolature, di quelli detti di Pasteur, mentre la tubolatura laterale del matraccio si univa ad una piccola pompa aspirante. Fissato il fiasco senza fondo al disopra della fumarola e raffreddato il corpo del pallone con acqua e solfato sodico, si praticava mercè la pompa una leggera e continua aspirazione, la quale agevola al vapore di acqua il passaggio a traverso l'apparecchio. — In poco più di due ore abbiamo raccolto circa due litri di acqua limpidissima; ma l'operazione è molto noiosa, perchè oltre alle molte precauzioni che è necessario prendere, per la elevata temperatura delle fumarole bisogna rinnovare continuamente la miscela frigorifera, e raffreddare di tempo in tempo anche la pompa. E se si aggiunge che bisogna stare per ore sopra un terreno scottante ed in una atmosfera asfissiante e caldissima, si comprenderà perchè ci crediamo in dovere di tributare le dovuti lodi al preparatore Rebuffat che vi ha lavorato più degli altri.

L'acqua raccolta, come fu poi constatato in laboratorio, non contiene la benchè menoma traccia di sostanze fisse; nè contiene traccia di acido cloridrico o solforico.

Per raccogliere i gas, non potendosi per la natura del terreno adattare questa volta qualcuno degli apparecchi di Bunsen, fu usato invece il seguente.

Delle bocce a tappo smerigliato della capacità di 100 c. c. furono guarnite di un

tappo di sughero a due fori (il tappo smerigliato si lascia attaccato ad un filo al collo della boccia). In uno dei fori passa un cannello dritto che va sino al fondo della boccia e sporge dal turacciolo per un paio di centimetri portando un pezzo di tubo di causciù ed una pinzetta Mohr.—Nell'altro foro passa un tubo che internamente alla boccia affiora appena il turacciolo ed esternamente si piega al livello di questo ad angolo retto.—Alla branca piegata si adatta per mezzo di tubo di causciù un altro cannello dell'istessa larghezza, piegato anch'esso ad angolo retto, la branca più lunga del quale sale lungo la boccia ed ha uguale altezza della stessa.

Si posa sulla fumarola un imbuto piuttosto grande e col collo stirato finamente e portante un tubo di causciù ed una pinzetta Mohr; si coprono di terra i fianchi dell'imbuto e si apre poi la pinzetta, lasciando che i gas scaccino dallo imbuto tutta l'aria. Quando si giudica ciò essere avvenuto, si chiude la pinzetta e si adatta al causciù un cannello di vetro, alto circa 40 c. m., che si riempie di acqua. Già precedentemente si è riempita d'acqua la boccetta mercè un imbuto attaccato al tubo esterno, e chiudendo la morsetta del tubo ascendente interno, quando l'acqua cola dallo stesso. Unito questo tubo a quello dell'imbuto, si aprono le pinzette, con che l'acqua contenuta nel cannello cade ed i gas dell'imbuto ne prendono il posto.

S'inclina poi il cannello esterno della boccetta onde agevolare colla diminuita pressione la venuta dei gas, e quando, aumentando sempre l'inclinazione del tubo, l'acqua sarà quasi tutta colata, restandone sempre uno stratarello di uno o due c. m., si chiude la pinzetta Mohr del tubo interno della boccetta, si porta questa in un bagno ad acqua, e staccando il turacciolo di sughero coi suoi pezzi vi si sostituisce quello smerigliato, o si fanno quei travasamenti e quelle analisi che si desidera.

Con questo apparecchio molto semplice è facile raccogliere grandi quantità di gas e relativamente in poco tempo.

Non furono allora fatte determinazioni precise in Laboratorio, ma dalle prove eseguite sul luogo il 26 settembre risultò che *più di quattro quinti dei gas raccolti erano assorbiti dalla potassa.*

Lo stesso giorno fu raccolta circa mezzo litro dell'acqua gocciolante ai bordi di una fumarola. Quest'acqua ha reazione leggermente acida, è limpida, contiene piccole quantità di cloruri e solfati e quest'ultimi relativamente più abbondanti.

L'acqua evaporata lascia un residuo bianchissimo, che per lo scaldamento incarbonisce. Nel residuo, sciolto nell'acqua stillata, fu trovato acido cloridrico e solforico, sodio, e tracce di potassio, ferro, alluminio.

Da 25 cc. di acqua si ottennero gr. 0,0306 di solfato baritico.

Da 25 cc. di acqua gr. 0,0075 di argento dal cloruro.

25 cent. cub. di acqua hanno lasciato un residuo, che trasformato in solfati, pesava gr. 0,0281.

12 OTTOBRE. — *Sesta visita* — Ore 11 a. m.

Nuova regione.—Attività mediocre —molto zolfo; discreta quantità di H_2S. Col termometro a massimo a rivolgimento in un punto della frattura, alla profondità di m. 1,50, la temperatura fu trovata 97°, in un altro punto a tre metri di profondità 66°,5.

Antica regione — Attività mediocre — H_2S,CO_2. Temperatura 97°.

18 GENNAIO 1884 — *Settima visita.* — Ore 12 m.

Nuova regione. — Pochi fiocchi di zolfo; attività mediocre; abbondantissimo idro-

geno solforato; poca quantità di anidride carbonica; nessuno odore di anidride solforosa; reazione del vapore quasi neutra; temperatura a tre metri circa di profondità eguale a 97°.

Antica regione. — Ore 8 a. m. — Relativamente ai giorni precedenti minore attività. Abbondante idrogeno solforato, ma niente SO_2 e poca anidride carbonica. Molte incrostazioni bianche; apparentemente poco solfo, ma scavando nella roccia se n' è trovato parecchio. Temperatura 100°.

Fu necessario lavorare di piccone per mettere bene a nudo una spaccatura e formare un piano per la raccolta del vapore. Il vapore condensato col solito mezzo conteneva H_2S, ma non ha dato la reazione dei solfati, nè dei cloruri.

Anche l' acqua gocciolante dai bordi delle fumarole fu trovata esente di cloruri, benchè desse la reazione dei solfati.

Anche questa volta abbiamo raccolto i gas, ma servendoci di uno dei metodi indicati da Bunsen.

Un tubo di vetro lungo poco più di un metro fu introdotto nella fumarola più attiva. Alla estremità sporgente del tubo venne congiunto per mezzo di causciù un pallone a due tubolature, unito ad una serie di tubi collettori, seguiti dalla piccola pompa. Per più di un'ora si fece funzionare la pompa, raffreddando al solito continuamente il pallone; quindi si chiusero alla lampada i varî tubi collettori. Ciascuno di questi aveva una capacità di circa venti centimetri cubici. Esaminati in Laboratorio, non si vedevano sulle pareti interne goccioline di acqua. Rompendo una delle punte dentro il bagno a mercurio, il liquido è salito per circa due centimetri cubici; travasato il gas dentro campanelle graduate, fu trattato con la soluzione di potassa, che lo sciolse quasi per intero. La parte non assorbibile dalla potassa non superò mai il quarto di un centimetro cubico.

Da queste sperienze risulta che il gas sviluppantesi il 18 gennajo 1884 dalla più attiva fumarola del vecchio recinto di Montecito, convenientemente raccolto, può considerarsi come tutto solubile nella soluzione di potassa caustica.

Il nostro compianto Prof. S. De Luca ha dimostrato un fatto simile per la Solfatara di Pozzuoli; risulta infatti dalle sue sperienze che i gas che si trovano nell'interno della grande fumarola a 3 metri circa di distanza dalla bocca non contengono aria atmosferica [1]).

Era nostra intenzione di fare un attento studio dello zolfo, e le nostre ricerche hanno avuto un soddisfacente successo. — Come abbiamo già detto, nella nostra visita del 28 agosto 1883, assieme alla grande massa di cristalli di zolfo trimetrici, noi avevamo trovato alcuni prismetti ben definiti. — Non essendoci sfuggita la grande importanza del fatto, che ci affrettammo a comunicare al Prof. Arcangelo Scacchi, questa volta abbiamo fatto delle minute ricerche, ed appunto scavando nella roccia ci fu dato trovare parecchi prismetti di zolfo molto belli, poco colorati, trasparenti, sottili, ma qualcuno lungo fino a cinque millimetri. Alcuni di questi cristalli, raccolti con molta cura, abbiamo dato al nostro amico Prof. Eugenio Scacchi, per farne lo studio cristallografico. Dallo stesso E. Scacchi ci è stato scritto quanto segue:

« I cristallini di zolfo che mi ha dato ad esaminare sono in forma di prismi rombici « bislunghi e quindi diversi per la loro apparenza dalle ordinarie forme cristalline dello « zolfo naturale. Ma una esatta conoscenza dei loro caratteri cristallografici non è pos- « sibile averla con i minutissimi e poco nitidi cristalli favoritimi nei quali con difficoltà

[1]) *Ricerche sperimentali sulla Solfatara di Pozzuoli. Pubblicazioni dell'Accademia Pontaniana.*

« ho potuto misurare una zona rombica di circa 82°. Le faccette terminali delle quali « importa conoscere le inclinazioni per giudicare del sistema al quale appartengono non « sono capaci di misure goniometriche.

« Spero che le riuscirà procurarsi alquanti cristallini terminati da faccette più niti- « de per giungere a conoscere se essi siano realmente monoclini, come la S. V. sospet- « ta, ovvero trimetrici ortogonali. »

Ed ora dobbiamo fare qualche osservazione e prima di tutto rilevare il fatto da noi osservato della presenza quasi contemporanea dell'idrogeno solforato con l'anidride solforosa.

Carlo Sainte-Claire Deville in una lettera del 26 gennaio 1861 [1]) parlando di alcune fumarole del Vesuvio, e sulla presenza delle sostanze gassose nei varii periodi, dice:

« La presenza dello zolfo prova senza alcun dubbio l'esistenza dell'idrogeno sol- « forato. » Ed in seguito: « che nelle fumarole contenente molto acido solforoso il sol- « fo risulta dalla reazione reciproca delle due sostanze H_2S e SO_2; mentre che le fuma- « role non acide, che anneriscono la carta di acetato di piombo, depositano solfo per la « semplice azione dell'ossigeno atmosferico sugli elementi dell'idrogeno solforato. Lo « zolfo proveniente dalle due reazioni non ha lo stesso aspetto. — Il primo forma masse « compatte, grumose, spesso fuse alla superficie per l'alta temperatura dei vapori che lo « hanno prodotto. Lo zolfo di origine puramente solfidrica è composto di piccoli cristalli « ottaedrici molto netti e puri, addossati gli uni agli altri e formanti fili allungati. » E poi: « Si può facilmente osservare il passaggio di una stessa fumarola per varii stati. « Così emanazioni che la mattina anneriscono l'acetato di piombo senza agire sulla car- « ta di tornasole, la sera, divenute acide, esalano sensibile odore di acido solforoso. »

Ora è molto facile che le fasi sopra cennate avvengano a Montecito, ne' periodi di maggiore attività, in tempo diverso nelle varie e numerosissime fumarole, o, per essere più esatti, è ben probabile che le aperture che meglio permettono il passaggio dei gas, ci accusino prima delle altre i mutamenti avvenuti nel lavorio interno, donde la presenza contemporanea di sostanze, che a prima vista sembra incomprensibile.

Comprendiamo benissimo per questo la necessità e l'importanza di studiare e seguire per qualche tempo le fasi di singole fumarole ben distinte; ma chi conosce il luogo sa già che noi non l'avremmo fin'ora potuto fare, e che questo sarà il lavoro, che chiameremmo più fino dell'avvenire.

Del resto è importante anche notare che il De Luca, l. c., accenna alla contemporanea presenza dell'idrogeno solforato e dell'acido solforoso nei gas della grande fumarola della Solfatara di Pozzuoli.

Lo zolfo che in tanta abbondanza si trova a Montecito attorno ai bordi delle fumarole ha tutto l'aspetto di quello che il Deville dice formantesi per l'azione dell'ossigeno atmosferico sull'idrogeno solforato, ma al di sotto della roccia se ne trova dell'altro a strati compatti e molto probabilmente dovuto alla reazione tra l'idrogeno solforato e l'anidride solforosa.

Ci sia permesso ancora far notare la grande differenza trovata nella quantità di gas assorbibili dalla potassa. Il Deville nell'agosto 1856 ne trovò al massimo otto per cento. Nelle nostre analisi sommarie del 26 settembre ultimo questa quantità era maggiore

[1]) *Comp. rend.*, T. LIV, p. 245.

dell'ottanta per cento; ed i gas raccolti il 12 gennaio 1884, con più attenzione studiati, furono trovati quasi per intero solubili nella potassa.

Da Montecito, per la via che conduce a Casa Pizzi, e salendo poi per il Bianchetto e Cantariello si arriva alla selva detta di Schiappa-Cerasa. Quivi il terreno è tutto smosso e franato [1]), ed una spaccatura, che va da E ad O spezzando la via che portava alle Falanghe [2]) ha lasciato a nudo la roccia per un'altezza massima e quasi verticale di 14 metri circa.

Guardando di su, si osserva sotto un largo avvallamento, con alberi di castagno caduti ed incrociantesi, e di fronte una specie di collinetta, ch'è la continuazione del declivio del monte restato a posto. Dall'uno e dall'altro lato di questa collinetta il terreno è tutto conquassato e franato, e per le numerose spaccature si può percorrere con molta difficoltà appoggiandosi ed afferrandosi agli alberi caduti ed inclinati, e che costituiscono una specie di rete provvidenziale. — Ad Est l'avvallamento, scendendo da S a N va a finire nella grande frana a sud-ovest di Montecito, in alto, ed ove si osservano parecchie fumarole; il lato ovest, egualmente tutto franato, è proprio seminato di fumarole. Questo lato, che si vede da Lacco e Forio, corrisponde alla contrada Gradica sopra Fango.—Le fumarole, almeno in gran parte, non sono certo recenti; ciò ci risulta dalle notizie raccolte, e dallo avere osservato che la roccia è molto alterata. Non si trovano ricordate nè dal Deville nè dal Fuchs; ma lo Scacchi nel suo giornale dice: « Sul Fango (3 giu-« gno 1840) è una fumarola nel tufo ordinario con arrossimento e scomposizione della « roccia, senza formazione di zolfo, solfato di allumina od altro. » Evidentemente in questi ultimi tempi le fumarole si sono aperte altre vie e la loro attività è stata maggiore.

Non vi ha alcun dubbio per noi che in questa parte di Monte Bastia o Pizzone, che sta tra la Selva di Schiappa-Cerasa, Monte Nuovo, ove è un altro gruppo di fumarole, e Monte Cito, siano avvenuti i più importanti movimenti del suolo.

Bellommo — Passato il piano delle Falanghe si perviene alla Cava o Vado di Frassitelli al di sopra di Bocca. Tra Bocca e Frassitelli sono le fumarole di Bellommo.

Scacchi le visitò il giorno 31 maggio 1840 e vi osservò le stesse produzioni delle fumarole di Montecito.

Deville (l. c. 1856) dice: « Le emanazioni di Belluomo, sopra la marina di Cittara « abbondantissime, vengono fuori con pressione e fischio da un gran numero di fessure « che, per 40 metri circa di altezza, si aprono in una roccia biancastra, talmente de-« composta che in qualche posto si è ridotta una specie di pasta grossolana. Da questa « alterazione ne risultano delle concrezioni di allume e di silice. *Non si deposita solfo.* « La temperatura del vapore è, come a Monte Cito, di 93°,5 a 94°. Dànno odore sensi-« bile d'idrogeno solforato ed anneriscono la carta di acetato di piombo. La potassa non « vi scopre notevoli proporzioni di anidride carbonica. Si riducono adunque ad uno svi-« luppo molto vivo ed abbondantissimo di vapore di acqua, con piccole quantità d'idro-« geno solforato e probabilmente di acido carbonico. »

Forse il Fuchs vuol parlare di queste fumarole quando accenna alle sorgenti di vapore del versante occidentale dell'Epomeo. « Queste sorgenti vaporose, egli dice, ap-« pariscono solo periodicamente, o almeno, essendone la temperatura piuttosto elevata,

[1]) L'abbiamo visitato il 4 ed il 26 settembre e l'11 ottobre.

[2]) In un punto, dal lato ovest, ove l'antica via termina bruscamente, il dislivello l'abbiamo misurato di sei metri circa.

« sono tanto poco visibili che non si scorgono se non a piccola distanza. Si trovano « molto in alto sull'Epomeo, e vi si giunge assai difficilmente: intorno alle loro bocche « vedesi la roccia scolorata, e però se ne distingue facilmente il posto. Il loro numero è « quasi uguale a quello del Tabor, ma la quantità di vapore ne è molto inferiore. »

Come ben si vede, se il Fuchs veramente parla delle fumarole di Bellommo, le sue osservazioni sono ben diverse di quelle del Deville. Non bisogna però dimenticare che Fuchs visitava l'isola nel 1870, cioè 14 anni dopo Deville.

Noi siamo stati alle fumarole di Bellommo il 5 *settembre*, e vi abbiamo trovato le cose press'a poco come sono state descritte dal Deville. Numerosissime fumarole, molto attive. Abbondante anidride carbonica. Idrogeno solforato. Temperatura 100°. Niente solfo.

Cittara. — Scendendo da Bellommo alla marina di Cittara si trovano fumarole ed acque termali. — Le fumarole sono parecchie, ma poco attive e stanno lungo la marina a un centinaio di metri sul livello del mare. Non si osservano incrostazioni, nè scomposizione della roccia. — Emettono poco vapore acqueo con pochissima anidride carbonica. — La temperatura della più attiva fu trovata di 51°. — Infine, il 25 *settembre* alle 5 p. m. presentavano lo stesso aspetto di quelle di Fondo d'Oglio o Rotaro. A nord della marina, in alto, si trovano gli avanzi di antiche stufe.

Il Deville (l. c.) ricorda una sorgente termale, con 43°,3 di temperatura e che paragona a quella di S. Restituta e del Castiglione.

Nel d'Ascia si legge che la temperatura della detta sorgente varia da 48° a 52° C.

Gussone e Guarini trovarono rispettivamente 52° e 50°. — Fuchs segna 51°.

Noi visitammo i celebri bagni e varii pozzi. Ai bagni l'acqua segnava circa 50°.— Quella del pozzo di Giuseppe Mattera 52°, e poco vicino, un altro pozzo, come il primo profondo circa otto metri ed appartenente a Vincenzo Castiglione, dava acqua a 70° C.

Forio.—La via che da Cittara porta a Forio, lungo la spiaggia, è pittoresca; quella interna è più sicura, ma poco bella.

A Forio, *il* 13 *settembre*, abbiamo osservato, come fu detto, l'acqua del pozzo Bajola, profondo quasi 18 metri, con mezzo metro di acqua circa, e situato in un terreno coltivato a vigneto e ad ortaggi. L'acqua conteneva piccole quantità d'idrogeno solforato, aveva reazione alcalina, ed una temperatura di 19°, quella esterna essendo di 23°. Filtrando l'acqua raccolta da noi e quella che precedentemente era stata spedita al Prof. Palmieri e da noi analizzata, dal residuo rimasto sul filtro, disseccato e trattato con solfuro di carbonio, abbiamo estratto una discreta quantità di solfo.

Nel pozzo Maltese in piazza Cerriglio, Via Monterone, l'acqua segnava 32°.

Ai bagni detti di Francesco I 34°,5; il Guarini trovò 32° ed il Fuchs 45°.

Vicino a questi bagni, negli altri detti di Castellaccio, la temperatura fu trovata di 33°.

In questi pozzi, con acqua alcalina e termale, non si rinvenne idrogeno solforato.

S. Lorenzo. — Le Stufe di S. Lorenzo al di sopra di S. Restituta, tra Monte Vico e la Valle di S. Montano, quando furono visitate dal Deville nel 1856 emanavano solo vapore acqueo con una temperatura di 41°, senza acido carbonico o solfidrico.

Per la temperatura il Guarini segna 55°; il d'Ascia 57°,5 ed anche 57°,5 trovò il Fuchs nel 1870.

Le stufe sono costituite da varie camerette, in una delle quali si trova una specie di vasca quadrata, di un metro circa di lato, e nella quale, per diversi buchi immette il vapore di acqua. Introducendo il termometro in uno di questi buchi, e propriamente in quello situato in alto, ad uno degli angoli, e dal quale, secondo il padrone delle stufe, suole svilupparsi vapore più caldo ed in maggiore quantità, trovammo il 25 *settembre* alle 4 p. m. la temperatura di 46°,5. — Il vapore era poco e sembrava accompagnato da piccole quantità di anidride carbonica.

In un' altra camera vicina havvi una specie di poggio con tubi di argilla di vario diametro e dove può introdursi o il braccio, o la gamba, od anche sedersi e così esporre le singole e varie parti del corpo all' azione del vapore.

In ultima analisi sono delle esalazioni come quelle che si trovano abbondantissime nella marina di Cittara, ma che per la vicinanza dello abitato conservano ancora una certa rinomanza.

Rita. — La sorgente della Rita, a ponente di Casamicciola, e già piccolo stabilimento di bagni ora completamente distrutto, ha sempre dato una temperatura variabile molto. — Il De Rivaz nel 1833 trovò 70° C. e nel 1834 soli 65°. Gussone 63°, e Guarini 61°.—Il 28 *agosto*, alle 3 p. m., determinando la temperatura come meglio abbiamo potuto in mezzo alle macerie, fu trovata eguale a 51°. Il termometro fu messo proprio alla sorgente, ma l' acqua aveva un difficile sfogo. Si sviluppava dell'anidride carbonica. L' acqua ha dato reazione alcalina.

Arso.—Due piccoli gruppi di fumarole si trovano sull'Arso: il primo presso la strada che dal Lago del Bagno conduce ad Ischia, a sinistra; l'altro al di sopra di Squallitriello sotto Fiajano.

Marina dei Maronti. — Da Bagno per le Cremate, Piejo, Fiajano, Barano, Testaccio, e per la lunga scala di questo nome, si scende alla Marina dei Maronti. — Procedendo da Est ad Ovest si arriva alla Cava dell' Acquaro, ove scorrono, mischiandosi, le acque dello Scarrupato, di Olmitello (Temp. 43°,5, Fuchs) e di Nitroli (Temp. 30° Guarini). Un poco a ponente vi ha la Bocca di Cavascura con la sorgente che ne porta il nome e detta anche di Petrella o dell'Aratro. Quest' acqua è veramente gustosissima, e meriterebbe certo di aversene maggior cura. Fuchs segna una temperatura di 70°; ma il 6 *settembre* alle 9 circa del mattino il termometro segnava 85° C.

Ancora più a ponente, e prima di giungere alla marina di S. Angelo, vi ha una via che conduce a Serrara. Quasi formante croce con questa via, parallelamente alla spiaggia, dietro le collinette lungo la stessa, nella contrada detta Petrilli, si trovano parecchie fumarole. — Queste fumarole fino a un certo punto si possono paragonare a quelle del Tabor. La roccia fu trovata poco alterata; le fumarole non mandavano anidride solforosa od idrogeno solforato, bensì un' abbondante quantità di anidride carbonica; niente solfo. In una la temperatura fu trovata di 90°; in un' altra di 100°.

Alla marina, presso il luogo detto acqua bollente, il termometro nella sabbia segnava pure cento gradi.

Queste ricerche saranno continuate.

Ag. Oglialoro, *relatore.*

finita di stampare il dì 3 marzo 1884.

P.ta di Caruso
Torre
Zale
S. Restituta
Monte Vergine
LACCO (Ameno)
Ledomale
Perrone
Casamonte
P.ta Castiglione
P.ta S. Alessandro
Faro
Maresca
M.te Caba
Pellamo
Sentinella
Pennella
Spadaro
Monte
S. Alessandro
Porto
Bagno
Tresta
Casamicciola
M.te Rotaro
Fango
M.te Cito
P.ta del Soccorso
Najola
Montevone
Montagnone
Fondo del Rotaro
M.te Nuovo
Bastia
Buceto
FORIO
ISCHIA
S. M.ta del Monte
S. Nicola
Castello
L'Arso
M.te Epomeo
M.te Trippiti
Cremate
Frajano
Marina di Cittavecchia
Fontana
Campagnano
Piano
Molara
P. del Lume
Noja
Ciglio
Moropano
Casa Buona
P.ta Imperatore
Pantano
Caruso
Serrara (Fontana)
Barano
Panza
Testaccio
P.ta della Cima
Marina dei Maronti
S. Angelo
Capo Grosso
P. S. Pancrazio
P. S. Angelo
Nota – L'equidistanza delle curve è di m.i 50
La Scala di 1: 50000
Fumarole

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SOPRA UN FRAMMENTO DI ANTICA ROCCIA VULCANICA INVILUPPATO NELLA LAVA VESUVIANA DEL 1872

MEMORIA

del Socio Ordinario A. SCACCHI

(Adunanza del dì 8 Settembre 1883)

L'incendio vesuviano del 1872 fu in particolar modo utile alle ricerche mineralogiche e geologiche, dappoichè la lava invece di uscire dal cratere percorrendo la solita strada sotterranea delle altre lave, venne fuori presso la base del gran cono deviando dall'ordinario cammino. Di qui nacque che essa incontrò molte rocce sotterranee prodotte negli antichissimi incendii del vecchio vulcano che ora chiamiamo Monte Somma, e ne trasportò i frammenti all'aperto; dandoci così la opportunità di studiare quelli ascosi prodotti che non avremmo potuto altrimenti conoscere. Allora si potè leggere una piccola, ma non ispregevole, pagina della storia vesuviana di molti e molti secoli remotissima. E tra i fatti più notevoli svelatici per l'esame di quelle sotterranee rocce va ricordata la produzione per effetto di sublimazioni di molte specie di silicati che sono state descritte nelle contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell'incendio vesuviano del 1872 [1]).

I massi delle suddette rocce giunti alla bocca eruttiva furono per le esplosioni lanciati in alto, e questi proietti quasi tutti cadendo sulla lava fluente furono dalla medesima, per nostra maggiore commodità di studiarli, trasportati in basso come corpi galleggianti senza affondare; dappoichè, come è volgarmente noto, le lave, quantunque scorrevoli, sono di consistenza talmente pastosa che a fatica si può in esse conficcare un bastone [2]).

[1]) *Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli.* Vol. V e VI.

[2]) Sono di avviso che i pezzi di antiche rocce che si son trovati sulla lava del 1872 ricoperti da una crosta della medesima lava han potuto essere, almeno in parte, semplicemente trasportati senza che fossero stati sbalzati per le esplosioni, dappoichè la loro densità, per gl'interni spazietti vuoti, era in generale minore della densità della lava.

Il fatto del quale nella presente memoria mi occorre di far parola riguarda uno dei medesimi massi rimasto profondamente incastonato nella lava, e rinvenuto ove questa di poco aveva oltrepassato Massa di Somma e San Sebastiano. Dai pezzi che mi sono stati recati mi è facile giudicare che esso era del diametro di mezzo metro o poco più. E per le sue parti che sembrano essere rimaste quasi intatte possiamo ritenere che era formato di grossolana sabbia vulcanica con piccoli frammenti di leucitofiro. Sarebbe stato utilissimo alle mie ricerche se altri somiglianti frammenti di antiche rocce inviluppati nella recente lava mi fosse riuscito di esaminare. Persuaso che ve ne siano altri, non ho mancato farne assidue inchieste; ed ho ritardato fin'ora la pubblicazione della memoria da circa due anni presentata all'Accademia sperando rendere più completo il mio lavoro con ripetute analisi chimiche. Ma essendo tornata infruttuosa ogni ricerca, sono astretto a pubblicare quel che mi si è offerto nell' unico saggio rinvenuto.

Ritornando ai massi delle sottarranee rocce in gran numero usciti dalla bocca eruttiva del 1872 importa ricordare. 1.° Che essi per la massima parte erano inviluppati in una crosta formata dalla lava che con essi scaturiva, essendo stati rari quelli che si trovarono non ricoverti da tale crosta. 2.° Che essi nella loro primitiva formazione probabilmente appartenevano tutti a depositi conglomerati formati da frammenti di grandezza molto variabile, la maggior parte di leucitofiro, spesso con cristalli isolati di augite. E l' aver trovato tra i proietti alquanti grossi pezzi di leucitofiro non è pruova sicura che la novella lava li abbia distaccati da antica lava incontrata nel suo cammino; avendo potuto essi, malgrado la loro grandezza, far parte degli antichi conglomerati. 3.° Che tutti i proietti senza eccezione sono stati metamorfizzati, manifestandosi la trasformazione sia per la fusione avvenuta in taluni punti, sia per molte specie mineralogiche che si sono prodotte negli spazietti vuoti del conglomerato. Tale trasformazione poi non saprei dubitare che sia avvenuta in tempi assai remoti per fenomeni di lunga durata riferibili agl'incendii del Monte Somma, essendo essa tanto inoltrata e profonda che non sembra possibile sia l'effetto dell'azione transitoria di un torrente di lava.

Ciò premesso, nel frammento rinvenuto nella lava consolidata convien considerare e distinguere i mutamenti subíti nella sua prima giacitura e quelli ai quali è andato soggetto durante il tempo ch'è stato rinchiuso nella lava infocata. Sulla qual cosa non è sempre facile portare sicuro giudizio; dappoichè si contengono in esso alquante specie mineralogiche in condizioni tali che, come in seguito vedremo, dimostrano la loro formazione nel tempo che l'antica roccia si è trovata immersa nella lava, ed altre che, se han potuto formarsi nel 1872, han potuto pure essere effetto di antico metamorfismo. Si vedrà che cosa potremo congetturare su tale argomento quando di ciascuna specie mineralogica partitamente si farà parola.

Non è facile formarsi una giusta idea dello stato della roccia, variabile da un punto all'altro, come si è trovata nella recente lava, e di quel che si può comprendere esaminandola accuratamente in ogni sua parte, è quasi impossibile darne tale descrizione che sia compresa da chi non ha sotto gli occhi molti saggi della medesima. Nondimeno sperando apportare qualche utilità al lettore che s'interessa di conoscere i fenomeni naturali ed investigarne le ragioni, spenderò alquanti versi a descriverla. Essa per la semplice ispezione si manifesta formata di parti diverse, distinguendosi in alcuni punti un

aggregato di minuti granelli bianchicci; altrove anche un aggregato di piccoli frammenti di grandezza variabile da due a quindici millimetri in diametro di colore somigliante a quello della ruggine con tessitura cellulosa ben distinta nei più grandi, ai quali si aggiunge qualche frammento di leucitofiro con piccoli cristalli di leucite, e della grossezza talvolta di piccola noce. Ove questa composizione si manifesta troviamo la dimostrazione che la roccia nel suo stato primitivo era un conglomerato, e che parte degli elementi che la costituiscono non hanno sofferto che lieve alterazione superficiale. Gran parte poi del conglomerato è andata soggetta a fusione, e la porzione fusa si mescola senza alcuna regola con quella che conserva quasi intatti gli elementi primitivi; e soltanto possiamo notare che i frammenti grandetti di leucitofiro non han patito fusione, quantunque si trovassero parzialmente incastonati nella parte fusa. La sostanza fusa è di color vario tra il rosso bruniccio ed il color rosso lilà di varie gradazioni; ha lo splendore e la traslucidità dello smalto, in taluni punti compatta, altrove quasi formata di granelli che si sono insieme saldati per alcuni punti soltanto. In molti luoghi, e specialmente ov'è la parte fusa, vi sono spazietti vuoti nei quali han trovato le condizioni favorevoli per depositarsi diverse specie di cristalli.

I minerali cristallizzati che vi si rinvengono, facili a riconoscere per i loro caratteri apparenti, sono l'*ematite*, il *gesso*, l'*anidrite*, l'*apatite* e la *mica*. Vi sono inoltre due specie con forme cristalline definibili che reputo affatto nuove ed una sostanza gialla terrosa, ed alcuni rari cristalli difficili ad essere determinati, dei quali mi occuperò più innanzi. Ed ora debbo avvertire che nessuna delle menzionate specie può reputarsi che facesse parte della roccia primitiva, che fosse cioè tra i minuti frammenti dall'unione dei quali essa era in origine costituita. Ce ne porge la dimostrazione evidente il fatto che i cristalli delle medesime specie sono impiantati sulle pareti degli spazii liberi rimasti interposti tra i componenti del conglomerato, o sulle interne pareti delle cellette che si trovano nella sostanza vetrificata. Quindi è chiaro che la formazione di queste cellette, e l'unione dei pezzetti tra i quali sono rimasti interposti quegli spazii liberi, hanno dovuto precedere la formazione dei minerali cristallizzati.

Trovo poi maggiormente meritevole di essere ricordato il fatto che i medesimi cristalli sono anche impiantati sulla novella lava. Quest'ultima condizione, per le conseguenze che ne derivano, stimo opportuno di esporla con alcuni dei suoi più importanti particolari. Il frammento dell'antica roccia si è trovato per la maggior parte della sua superficie tenacemente unita, e potrei dire saldata, alla lava; in qualche altra parte poi era in semplice contatto con essa senza aderirvi. Dove esso è inseparabilmente unito alla lava si ha la pruova che le cinque specie suddette si sono prodotte quando il frammento era già inviluppato; dappoichè i loro cristalli sono con una delle estremità impiantati sulla lava, restando libera la estremità opposta. Questa notevole condizione mi son trattenuto ad esaminarla accuratamente e non posso averne alcun dubbio, quantunque non sia riconoscibile in ogni punto della superficie di contatto tra l'antico conglomerato e la recente lava. La qual cosa è affatto naturale, dappoichè nei punti della medesima superficie ove per gli spazietti vuoti hanno potuto formarsi i cristalli, questi, se talvolta è manifesto che sono fissati sulla lava restando libera la estremità opposta, altre volte era da attendersi che giungessero a toccare con le due estremità la roccia incastonata e la lava, ovvero fossero aderenti alla sola roccia. I medesimi cristalli, e specialmente quelli di mica sono pure talvolta impiantati sulle pareti di

alcune piccole cavità della lava che sono a breve distanza, non maggiore di cinque centimetri, dall'antica roccia. In altre parti della lava più da questa discoste non ci ha esempio che nelle sue cavità si trovino cristalli di mica. Quindi non dubito che la produzione di questi cristalli nella lava, sia conseguenza della precedente immersione in essa dell'antico frammento di roccia. Nella lava del 1631, con la quale non sono da paragonarsi le altre lave vesuviane, talvolta incontra trovare che sulle pareti delle cellette e delle fenditure, sono impiantati i cristalli di mica; ma questa speciale giacitura dei cristalli di mica non ho mai osservato in altre lave del nostro vulcano di epoca istorica, ed in quella del 1872 soltanto nei punti di contatto con l'antica roccia in essa incastonata, o nei punti a piccole distanze della medesima roccia.

Degli esposti fatti non è facile rendersi ragione nello stato presente delle nostre conoscenze, e mentre ritengo che i particolari osservati nell'antico conglomerato della lava del 1872 siano notevoli ed istruttivi per lo studio dei fenomeni naturali, ben piccolo vantaggio trovo al presente di poterne ritrarre. Non pertanto dalle cose osservate, se non si perviene a conoscere partitamente come si sono formate le specie di cristalli innanzi menzionate, resta, a mio credere accertato, che esse si sono prodotte per effetto di sublimazioni, e dopo che l'antico conglomerato è stato involto nella lava.

La produzione di molte specie minerali, non per diretta sublimazione, ma per effetto di sublimazioni, ho avuto occasione di far conoscere nelle citate *contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell'incendio vesuviano del 1872*, e su tale argomento non mi occorre di aggiungere altri chiarimenti. Sembrami poi che alla loro genesi abbia contribuito la scambievole azione della lava infocata, e della roccia straniera senza poter precisare in che consista questa scambievole azione.

È un fatto assai maraviglioso che le lave vulcaniche quando sono fluenti contengono molte sostanze per le quali la loro elevata temperatura è più che sufficiente per farle passare allo stato gassoso; non pertanto ciò non succede, o succede lentamente e quando meno avremmo dovuto attendere che succedesse. L'acqua in primo luogo è dalle lave emanata allo stato vaporoso molti giorni dopo che le lave sono uscite dal vulcano, senza che si potesse dire essere l'acqua delle piogge che cadendo sulle lave superficialmente raffreddate giungesse nelle interne parti ancora caldissime, e queste l'obbligasse a mutarsi in vapore. Lo stesso succede per l'acido cloridrico. Ed il clorammonio ancor esso assai facile a ridursi in vapore col riscaldamento si produce in gran copia sulla superficie consolidata delle lave quando esse da molti giorni hanno cessato di scorrere; e se non vogliamo ammettere che le lave contengono integralmente il cloruro di ammonio, non è facile escogitare l'origine dell'azoto che fa parte di questo cloruro. Aggiungasi il cloruro ferrico che dà origine ai cristalli di ematite i quali si trovano sulle scorie o nelle fenditure delle lave impietrite a grande distanza della bocca eruttiva; ed il trovarsi aderenti alle pareti delle fenditure (lava del 1767 presso la cappella di S. Vito) dimostra che le fenditure già esistevano quando si depositarono i cristalli di ematite, e che per conseguenza il cloruro ferrico si sprigionava quando la lava era giunta al punto di fendersi per ritiramento. Vanno pure ricordati i cloruri alcalini e da ultimo il cloruro di piombo o cotunnia comparso in gran quantità nel fosso della Vetrana molti mesi dopo che l'incendio del 1855 era finito. È dispiacevole il non potere riprodurre nei nostri laboratorii i fenomeni che le lave ci presentano, essendo questo il mezzo sicuro per rendere ragione, senza ricorrere ad interpretazioni incerte,

dei riferiti fenomeni che rimangono inesplicabili. E se mi si concede di manifestare quel che ne penso, sembrami che le suddette sostanze capaci di passare allo stato gassoso col riscaldamento che sono trattenute nelle lave fuse, e si sprigionano quando queste si consolidano, presentino un fenomeno comparabile all'acido carbonico disciolto nell'acqua, ed all'ossigeno disciolto nell'argento fuso. Gelandosi l'acqua e consolidandosi l'argento, manca il solvente, e si sprigionano l'acido carbonico e l'ossigeno.

Ho voluto esporre queste considerazioni sopra i maravigliosi fenomeni delle lave fuse per ritornare sull'azione scambievole tra la lava ed il conglomerato in essa racchiuso. Ci rendiamo facilmente ragione della produzione dei cristalli di ematite per il cloruro ferrico ed il vapore acquoso emanato dalla lava. I cristalli di anidrite e di gesso ci fanno supporre nella medesima lava l'acido solforico e l'acqua. Per la mica, come per molti silicati prodotti per effetto di sublimazioni dei proietti del 1872, dovendo supporre un composto volatile di silicio, potremmo attribuirne l'origine al cloruro di silicio, perchè dal fluorido silicico ne sarebbero derivati o i fluoruri solidi che non si sono rinvenuti, o il fluorido idrico gassoso che avrebbe lasciato i segni della sua azione corrosiva sopra i silicati [1]). Quanto ai cristalli di apatite non si può altrimenti pensare se non che il loro acido fosforico sia provvenuto dalla lava quantunque le analisi delle lave vesuviane non abbiano palesato in esse la presenza dell'acido fosforico [2]) come neppure la presenza del piombo che si è detto trovarsi nella cotunnia. Egli è però che, fatta eccezione dell'ematite, le riferite specie di cristalli, che riconoscono la loro origine da elementi contenuti nella lava, non si sono formati se non dove essa è in contatto con l'antico conglomerato, o a brevissima distanza dal medesimo conglomerato, che sembra essere stato la cagione promotrice della formazione dei cristalli.

Per debito di giustizia debbo dichiarare che la maggior parte delle determinazioni cristallografiche riportate in questa memoria sono state eseguite dal mio Coadiutore Eugenio Scacchi, e da lui pure sono state disegnate le figure.

Massa fusa. La fusione che si riscontra in buona parte del conglomerato son di avviso che sia avvenuta quando esso era già involto nella lava. Egli è vero che tra i proietti del 1872 se ne sono incontrati alcuni che in qualche loro parte erano fusi; ma in essi la sostanza fusa è di apparenza vitrea come l'ossidiana, mentre nel conglomerato contenuto nella lava, come già si è detto, la porzione fusa ha l'apparenza dello smalto, e soggiungo che in alcuni punti manca ancora lo splendore proprio dello smalto, e si direbbe litoidea non essendovi stato che incipiente fusione. Mi conferma in questa opinione l'avere osservato i cristalli di mica, che non è probabile vi si trovassero prima del 1872, per una loro estremità infissi nella sostanza fusa.

[1]) Si dà facilmente ragione dei silicati prodotti per effetto di sublimazione quando il metallo sul quale agisce il cloruro di silicio si trova allo stato di ossido o di cloruro o di carbonato, come si fa manifesto per le seguenti equazioni, chiamando M un metallo qualunque. $SiCl^2 + 2HO + MO = SiMO^3 + 2HCl$; $SiCl^2 + 3HO + MCl = SiMO^3 + 3HCl$; $SiCl^2 + 2HO + MCO^3 = SiMO^3 + 2HCl + CO^2$. Diversamente da quel che succede nei silicati prodotti per effetto di subblimazione del Vesuvio, nei vulcani fluoriferi della Campania abbiamo che le rocce nettuniane sono mutate in silicati e fluoruri, e però non cade dubbio che il composto volatile di silicio che ha dato origine ai novelli silicati sia stato il fluorido silico che appunto contiene il silicio per i silicati ed il fluore per i fluoruri. $SiF^2 + 3MO = SiMO^3 + 2MF$.

[2]) Quantunque nelle lave vesuviane non si siano finora rinvenuti i fosfati, non mancano esempi di altre lave che ne contengono; e mi basta citare la lava di Melfi nella regione vulcanica del Vulture rinomata per la gran copia di Auina che le han fatto dare il nome di auinofiro, ed in essa di tratto in tratto con i cristalli di Auina si associano i cristalli di apatite. Va pure ricordato che tra i proietti del 1872 se n'è trovato uno che ha molti nitidissimi cristalli di apatite impiantati sopra i frammenti dei quali si componeva la roccia conglomerata.

La parte del primitivo conglomerato che si è trasformata nella massa fusa possiamo ritenere essere stata quella che si è detto innanzi trovarsi in forma di minuti granelli bianchicci, intorno a' quali avrò occasione di trattenermi in seguito. Mi conferma in questa opinione ciò che spesso si osserva in diverse parti della massa fusa che si trovano in contatto con i granelli bianchicci. In queste parti si distinguono per il colore bianchiccio e per la forma i granelli già impigliati nella sostanza fusa, e che non si sono con essa immedesimati per non aver subíto la completa fusione. In altri punti della sostanza fusa in contatto con i medesimi granelli, ed alla distanza da questi di uno a due millimetri, si osservano frequenti punti bianchicci che ancor essi non potrebbero essere altro se non gli stessi granelli la cui fusione non è riuscita in tutto completa. Osservate al microscopio le sottili schegge con punti bianchicci, questi si manifestano come corpicciuoli di figura perfettamente sferica, la maggior parte di colore bianco, e taluni di colore giallastro.

Quando è avvenuta la fusione già si era prodotta una certa quantità di cristalli di ematite e di mica, come si fa manifesto per i cristalli di queste specie inviluppati o profondamente impiantati nella sostanza fusa. Nondimeno la maggior parte della mica e dell' ematite è stata di formazione posteriore, trovandosi molti cristalli di queste due specie semplicemente aderenti alle pareti delle cellette della sostanza fusa.

Avendo ridotto in minuti frammenti la medesima sostanza per determinare la sua densità mi ha fatto maraviglia vedere alla superficie dei frammenti che restano aderenti alquanti minuti granelli come se essi fossero inquinati di un corpo deliquescente, e però superficialmente umidi; del qual fatto ho voluto cercare la cagione. Gram. 1,400 di minuti frammenti ripetutamente lavati sino a non manifestare reazione di cloro nelle acque di lavanda, hanno perduto grm. 0,024 del loro peso; cioè 1,78 per 100. Nel liquore filtrato ho avuto forte reazione di cloro, ben distinta reazione di ammoniaca con la carta rossa di tornasole, e vi ho riconosciuto pure la presenza del calcio e dell' acido solforico.

I medesimi frammenti dopo le lavande non hanno dato più segno di umidità superficiale, ed ho trovato la loro densità eguale a 2,724.

La presenza delle predette sostanze che non mi attendeva di trovare nella massa fusa mi ha indotto a ripetere il saggio dopo averla ridotta in polvere, e da gram. 3,988 di polvere ho avuto gram. 0,195 di parte solubile, cioè 4,89 per 100. Con grm. 0,588 della medesima polvere arroventata in cannello di vetro, si è avuta la perdita in peso di grm. 0,011 cioè 1,87 per 100, e la parte fredda del tubo si è coverta di denso velo bianco con i caratteri del cloruro ammonico. Nel liquore filtrato che conteneva grm. 0,195 di materia solubile, oltre le medesime sostanze rinvenute nelle acque di lavanda dei piccoli frammenti, vi ho riconosciuto pure la presenza dell' ossido ferroso.

Altri saggi fatti sulla sostanza fusa mi han mostrato che essa è difficilmente fusibile; i sottili margini delle schegge si fondono in vetro bianco alla fiamma del cannello. La sua polvere, quantunque sottilissima, non è scomposta che in piccola parte nell' acido cloridrico bollente.

Ematite. L'ematite si è trovata molto abbondante, d'ordinario in forma di lamine nelle quali è agevole riconoscere il tipo esagonale con le faccette del romboedro assai minute, quali di necessità debbono riuscire per la sottigliezza delle lamine. Molto va-

riabile è la lunghezza dei loro lati ragguagliati gli uni agli altri nella stessa lamina, nei casi più frequenti due lati paralleli sono assai più lunghi degli altri quattro, e non è raro che dalle lamine vengan fuori alcune protuberanze, o variamente esse si suddividano. In talune di queste lamine bipartite mi è sembrato scorgere gli ammirevoli casi di geminazione che ho rappresentato nelle figure 21 a 24 della seconda parte delle contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell'incendio vesuviano del 1872 [1]), ma per la piccolezza delle medesime lamine, che con grande difficoltà lasciano vedere le faccette del romboedro, non ho potuto assicurarmi se in esse si verifichi ciò che ho osservato nei cristalli di ematite che, in condizione assai rara, si sono generati in una fumarola della lava del 1872. Ove la lava è in semplice contatto con la roccia straniera, senza che ad essa aderisca, vi sono minutissimi cristalli iridati; ed i cristalli assai frequenti che si trovano sulle lamine di mica sono in forma di granelli nei quali non si giunge a scuoprire faccette distinte. I cristalli poi sono magnetici, carattere che non si scuopre così facilmente accostandoli all'ago magnetico pel movimento dell'ago, come per essere i minuti granelli attratti dalla calamita.

I massi rigettati dalla bocca eruttiva del 1872, essendo sempre cosparsi dei cristallini di ematite, dobbiamo ritenere che ne contenesse pure il conglomerato prima di restare inviluppo nella lava, e novelli cristalli della medesima specie han continuato a prodursi posteriormente, come si fa manifesto per quelli che sono impiantati sulle interne pareti delle cellette della massa fusa, e per quelli depositati sulle lamine di mica o sulle pareti della lava.

Tra le laminucce con due lati opposti più lunghi degli altri quattro ve ne sono alcune nelle quali la maggiore lunghezza dei medesimi è di tanto eccedente che i cristallini assumono la forma aciculare. Avendo sottoposto taluni di questi cristallini che hanno apparenza aciculare alle misure goniometriche, talvolta non ho trovato altro che la base del prisma (111) e la solita faccetta del romboedro (100). In qualche caso non frequente ho invece trovato altre forme meritevoli di essere descritte. Nella figura 1ª ho rappresentato un cristallino di molto ingrandito conservando quasi esattamente le proporzioni naturali. In esso si distinguono la parte superiore più sottile nella quale vi è la combinazione ordinaria della base *o* (111) col romboedro *r* (100), e la parte inferiore più larga che ha pure la base *o* e due faccette *r*, *r'* tra loro opposte rivolte verso la stessa faccetta *o*. Avendo misurato l'inclinazione di *o* con *r* e con *r'*, ho trovato la prima di 122°30′ e la seconda di 122°26′. Quindi non cade alcun dubbio che le faccette *r*, *r'* siano della medesima specie, e che la parte inferiore del cristallino figurato sia un cristallo gemino con l'asse di rivoluzione perpendicolare ad (111) e col piano di unione corrispondente ad una faccia laterale del prisma $(2\bar{1}\bar{1})$ o, ciocchè vale lo stesso per l'effetto che ne conseguita, con l'asse di rivoluzione perpendicolare a $(2\bar{1}\bar{1})$ ch'è pure il piano di unione.

Affatto diverso è il cristallino aciculare del quale un frammento è rappresentato dalla figura 2 *a b* con la sezione *b* maggiormente ingrandita nella figura 3. In esso si hanno sei faccette delle quali quelle che portano le lettere *o*, *o'*, *p*, *p'* riflettono due immagini degli oggetti veduti per luce riflessa, poco discoste l'una dall'altra, mentre le faccette *p''*, *p'''* riflettono una sola immagine. Quindi per tener conto delle misure trovate con ciascuna delle due immagini, le prime faccette portano due lettere, una

[1]) *Atti della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli*, Vol. VI.

dell'alfabeto greco, l'altra dell'alfabeto latino. Le inclinazioni trovate sono nel seguente quadro:

o con $\omega = 178^\circ\ 9'$	o' con $\omega' = 179^\circ 14'$
o » $p = 152\ 52$	o' » $p'' = 154\ 23$
o » $\pi = 151\ 58$	
ω » $p = 154\ 43$	ω' » $p'' = 153\ 37$
ω » $\pi = 153\ \ 1$	
o » $p' = 155\ 10$	o' » $p''' = 154\ 44$
o » $\pi' = 154\ \ 0$	
ω » $p' = 153\ 19$	ω' » $p''' = 155\ 30$
ω » $\pi' = 152\ 30$	

Media di tutte le misure $153^\circ 55'$.

Media delle misure di $o'\omega'$ con p'' e p''' $154^\circ 34'$.

Egli è pure da notare che mentre sono nella medesima zona le faccette p, o, p' le altre faccette p'', o', p''' si scostano alquanto dalla posizione che dovrebbero avere per trovarsi nella medesima zona con le precedenti.

Non è agevole stabilire a quali specie delle facce dei cristalli di ematite vadano riferite le faccette o, p. In un altro cristallino ho trovato soltanto le faccette p tra loro inclinate di $128^\circ 35'$ e $127^\circ 42'$, secondo l'una o l'altra delle due immagini riflesse da una faccetta, ed in media $128^\circ 8'$. Quindi esse sarebbero inclinate ad o, se questa faccia si trovasse, di $154^\circ 4'$. Se unite alle faccette trovate ve ne fossero altre di diversa specie si potrebbe trovare il bandolo per eliminare ogni difficoltà. Ma non avendo trovato che due frammenti di cristalli con le riferite faccette, credo non essere possibile una soluzione *sicura* del problema. Fo intanto osservare che assegnando alle faccette o il simbolo (100) ed alle faccette p il simbolo $(13\bar{1})$, si avrebbe l'inclinazione già nota di (100) con $(13\bar{1}) = 154^\circ 2'$ molto prossima alla media delle inclinazioni trovate. È ancora notevole che la faccia (100) è tra i piani di geminazione che si conoscono nei cristalli di ematite; e nel caso presente il cristallo rappresentato dalla figura 2 sarebbe un cristallo geminato per (100) con la condizione, facile a trovarsi nei cristalli gemini, che le facce di un cristallo non siano esattamente nella stessa zona con le facce dell'altro cristallo.

Mica. La mica ch'è la specie più abbondante a trovarsi nella roccia conglomerata che ci tiene occupati, è in forma di cristalli laminari che talvolta giungono ad avere sei millimetri di diametro, ed hanno colore bruno giallastro. Quella che, come ho detto innanzi, si trova nella lava a brevissima distanza dalla medesima roccia è di color bruno rossastro. Se possegga uno o due assi ottici è stato il primo carattere che ho cercato

scuoprire col microscopio polarizzante ed ho trovato che danno la croce oscura come i cristalli che posseggono un solo asse ottico, con questo di diverso che in due quadranti opposti i colori sono alquanto diversi da quelli che si osservano nei due quadranti alterni con i primi. Essendo le lamine assai sottili ben poco si può vedere degli anelli colorati, e la più apparente differenza nei colori dei quadranti è negli angoli della croce oscura ove per due quadranti opposti si ha il verde sbiadito e negli alterni il giallo sbiadito. Quindi credo doversi ritenere che vi siano due assi ottici assai prossimi a congiungersi in uno, come nella *Biotite* alla quale vanno riferite le lamine osservate.

La mica prodotta per effetto di sublimazioni si è trovata nei proietti del 1872 assai rara e sempre in forma di minuti cristalli; e non vi è alcuna ragione per credere che questa specie, anche in piccola parte, si contenesse nel conglomerato prima di essere inviluppato nella lava. Non ho alcun dubbio che essa siasi prodotta durante il tempo che il medesimo conglomerato è rimasto incastonato nella lava infocata, per la ignota e scambievole loro azione, tanto più che a pochi centimetri di distanza si sono formati altri cristalli di mica nella medesima lava.

Spesso la mica, l'ematite, la sostanza terrosa gialla con altre sostanze vitree bianche formano tale intricata mescolanza che a distinguere le diverse parti, difficilissime a separarsi, conviene usare il microscopio. Fra le sostanze vitree credo ve ne siano di diverse specie avendone osservate talune, quantunque rare, in forma di minuti cristalli aciculari riuniti in ciocche raggiate (apatite?) altre in forme prismatiche come l'anidrite, altre in fine di forme irregolari non definibili, e spesso l'ematite granulare ed i grumetti della sostanza terrosa gialla aderiscono siffattamente alle lamine di mica che sembra vi siano infisse.

Gesso ed Anidrite. Queste due specie sono abbondanti come la mica, la prima reperibile in molti punti dell'antico conglomerato, la seconda circoscritta in alcuni punti ove gli spazietti vuoti di una certa ampiezza, prossimi alla lava, si prestavano all'ingrandimento dei suoi cristalli. Delle stesse due specie tra loro diverse per essere una idrata e l'altra anidra, probabilmente la prima a prodursi è stata l'anidrite, ed è venuto in seguito il gesso quando per l'abbassata temperatura le condizioni sono state favorevoli alla combinazione dell'acqua col solfato di calcio. Il gesso si trova in forma di cristalli aciculari, spesso riuniti in ciocche, nei quali non ho osservato cosa degna di nota; ovvero ricuopre come sottile integumento la sostanza smaltoidea. L'anidrite è in forma di lamine ortogonali spesso di oltre cinque millimetri nella loro maggiore lunghezza e della spessezza di circa mezzo millimetro. Le lamine sono nitide e trasparenti, quantunque in alcune parti siano ricoperte di esile pellicola di limonite bruniccia facile a distaccarsi.

La figura 4 rappresenta la forma abituale di queste lamine in **a** con la faccia *A* perpendicolare al piano di proiezione ed in **b** con la medesima faccia parallela al piano di proiezione. D'ordinario sulla faccia *B* vi sono esilissime strie parallele allo spigolo *BC*, e non di raro questo spigolo è troncato dalle faccette *o*. Le migliori misure che ho potuto prendere mi han dato l'inclinazione di *B* con *o* variabile tra 131°30′ e 131°42′, angolo un po' minore di quello che trovo riportato da diversi Autori. Secondo Miller e

Brooke lo stesso angolo sarebbe di 131°42′ (*a*), secondo Hessenberg di 131°45′ (*b*), e secondo Dana di 132°30′ (*c*). Per quello che in seguito dovrò esporre occorrendo scegliere una di queste inclinazioni, ritengo 131°42′ trovata da Miller ch'è pure una delle inclinazioni da me trovate. Quindi si deduce l'inclinazione di *C* con *o* eguale a 138°18′.

Nella figura 5 ho rappresentato un cristallo gemino col piano di geminazione corrispondente alle faccette *o*, conservando nella estensione delle facce le stesse proporzioni che sono nel cristallo che ha servito di modello alla figura.

Nella figura 6 è disegnato un gruppo di tre cristalli le cui facce *B*, *b*, *B′*, sono tutte nella medesima zona come nel cristallo della figura 5, ed il cristallo *a b* ω che sta nel mezzo sporge alquanto sugli altri due dalla parte delle facce *A*, *A′*. L'estensione delle facce è quale si osserva nell'originale, e per comprendere quanto vi è di straordinario in questo gruppetto importa fare attenzione al seguente quadro delle misure geometriche trovate:

C con *B* =	97°29′,	media di tre misure, differenza 0°31′.
C » β =	84 30,	media di due misure, differenza 0°7′.
B » β =	167 7,	media di tre misure, differenza 0°12′.
C » ω =	—179 45,	media di cinque misure partendo da *C* o da ω.
C » *o* =	131 31,	media di quattro misure, differenza 0°21′.
B′ » *o′* =	131 33.	
B′ » *b* =	174 11,	media di due misure, differenza 0°6′.
=	173 39,	seconda immag. riflessa da *b*.
ω » *b* =	132 10,	media di due misure, differenza 0°4′.
=	131 40,	seconda immag. riflessa da *b*.
ω » β =	97 11,	media di due misure, differenza 0°9′.
ω » *B* =	84 20,	media di due misure, differenza 0°2′.

La prima cosa che importa notare nelle precedenti misure è la inclinazione di *C* con *B* che invece di essere ad angolo retto è di 97°29′, ed alla faccia *B* succede l'altra piccolissima β inclinata con *C* di 84°30′. Egli è però che *B* con β formano angolo ottusissimo di 167°1′, o come si è trovato con misura diretta 167°7′. Non vi è alcuna ragione perchè *B* e β si potessero considerare come due diverse specie di facce, e mi sembra più probabile che siano parti della medesima faccia deviata dalla sua posizione regolare in due sensi opposti, una parte formando con *C* angolo ottuso e l'altra parte angolo acuto. Un'altra condizione che pure va ricordata si ha nella inclinazione di *C* con *o* trovata eguale a 131°31′, mentre, come si è detto innanzi, dovrebbe essere 138°18′. Tra le facce *B* e *C* ho ritenuto corrispondere alla faccia *B* della figura 4 quella contraddistinta con la medesima lettera nella figura 6, essendo essa molto più grande della faccia *C*, ed anche perchè rigata da sottilissime strie parallele allo spigolo *BC*. Intanto per l'inclinazione trovata di *C* con *o* vi sarebbe motivo di credere che alla faccia *B* della figura 4 corrispondesse invece la faccia *C* della figura 6. E non avrei difficoltà di accettare questa supposizione se non vi fossero le seguenti considerazioni che vi si op-

(*a*) An elementary introduction to Mineralogy. London 1852, pag. 531.
(*b*) Mineralogische notizen. Frankfurt a. M. 1871, N. 10.
(*c*) A System of Mineralogy. London 1868, pag. 621.

pongono. Abbiamo di fatto che per le inclinazioni di *C* con *B* e di *C* con *o* si deduce l'inclinazione di *B* con *o* eguale a 48°0′, angolo molto prossimo a 48°18′ quale deve essere l'inclinazione di *B* con *o*. E la faccetta β′ essendo, come apparisce, parallela a *B*, si giunge alla conclusione che la faccia *o* abbia la stessa inclinazione di circa 131°42′ con β′ e con *C*. Per le cose fin qui esposte riguardanti il cristallo *ABC* isolatamente preso dobbiamo conchiudere che vi sia una grande irregolarità nella posizione delle sue facce; la quale irregolarità quasi del tutto scomparisce portando la faccia *C* in tale posizione da fare angolo retto con *B*. Rimarrebbe solo la faccetta β inclinata a *B* di 167°7′; ed ove si volesse considerare β come distinta specie di faccetta, assegnando ad essa il simbolo 051, sarebbe la sua inclinazione con *B* 167°37′.

Importa pure considerare la posizione scambievole del cristallo *ABC* col cristallo *abω*. Essendosi trovata l'inclinazione di *b* con ω variabile tra 131°40 e 132°10′, secondo le due immagini riflesse dalla faccia *b*, è manifesto che le facce *b* ed ω corrispondono rispettivamente alle facce *B* ed *o* della figura 4. Ciò premesso è notabile il fatto del trovarsi la faccetta ω del secondo cristallo parallela alla faccia *C* del primo, avendo dato le misure goniometriche l'inclinazione di *C* con ω —179°45′. Quindi non è a maravigliare se altre misure hanno dato l'inclinazione di ω con β 97°11′ quasi eguale all'inclinazione di *C* con *B*, e l'inclinazione di ω con *B* 84°20′ quasi eguale a quella di *C* con β. Intanto l'unione dei due cristalli non è probabile che derivi dalle note leggi dei cristalli gemini. Dai valori angolari del precedente quadro deducendo l'inclinazione di *b* con *B*, si trova eguale a 36°15′, ed ammettendo per il piano di geminazione il simbolo poco probabile 072, l'inclinazione di *b* con *B* avrebbe dovuto trovarsi eguale a 35°34′ con una differenza in meno di 0°41′.

Nemmeno per la posizione del terzo cristallo *A′B′C′* può ritenersi che esso sia unito ad uno dei due primi per geminazione. L'inclinazione di *B′* con *b* eguale a 173°55′, media delle due misure riportate nel quadro, darebbe il piano di geminazione inclinato a *B* ed a *b* di 86°57′.5, e però corrispondente ad una faccia che non è probabile. Dai valori angolari del precedente quadro si deduce l'inclinazione di *B′* con *B* eguale a 30°10′. Quindi il piano di geminazione che incontra le facce *B′* e *B* con angolo di 15°5′; ed ammettendo per lo stesso piano il simbolo 041, l'inclinazione di *B′* con *B* avrebbe dovuto trovarsi di 33°40′, che importa la differenza in più di 3°30′.

Riassumendo le cose fin qui riferite sul gruppo di cristalli della figura 6, abbiamo che i tre cristalli che costituiscono il gruppo hanno le facce riferibili a quelle indicate nella figura 4 con le lettere *B*, *o*, *C*, tutte allogate nella medesima zona senza che la loro unione possa dirsi effetto di geminazione; e che le facce del cristallo maggiore *ABC* sono in modo stranissimo spostate dalla loro posizione regolare.

Apatite. Di questa specie non ho trovato che pochi cristalli d'ordinario impiantati sulla lava ove essa è in contatto con l'antica roccia conglomerata. Essi sono bianchi trasparenti, e nella loro forma non vi sono che le facce laterali del prisma e quelle della piramide esagonale inclinate sulle facce del prisma di 139°42′. È poi ammirevole come i piccoli cristalli di apatite ricuoprono i cristalli di un'altra specie di fosfato che sarà in seguito descritta col nome di crifiolite, adagiandosi su di essi per le facce laterali del prisma.

*

Belonesia (*a*). Ho distinto con questo nome una particolare specie di cristalli in forma di esilissimi aghetti, nitidissimi, bianchi e trasparenti. Le loro estremità libere guardate con lente d'ingrandimento d'ordinario si scuoprono incavate, talvolta si veggono terminate da due faccette che danno a quelle estremità l'apparenza di becco di flauto, e più raramente dalla parte opposta delle medesime faccette ve ne sono due altre più piccole come si scorge nella figura 7 ove il cristallo è disegnato con le faccette *o* parallele al piano di proiezione in **a** e con le medesime faccette perpendicolari al piano di proiezione in **b**. Egli è però che a giudicare dalla maniera come si presentano le faccette terminali, i cristalli di belonesia si crederebbero monoclini. Nondimeno tenuto conto della posizione delle linee di estinzione osservandoli a luce polarizzata parallela, non cade dubio essere essi ortogonali, ed esaminati a luce polarizzata convergente, hanno presentato, quantunque poco distinti, i caratteri del sistema quadratico. Malgrado l'estrema sottigliezza di questi cristalli, in grazia della loro nitidezza si sono avute le seguenti misure goniometriche sufficientemente esatte.

			calcolate	trovate	
* *m*	con	*B*	= 133° 3′	— 133° 3′	media di quattro misure, differenza 0°8′.
m	»	*B′*	= 90 0	— 90 2.	
m	»	*m′*	= 122 16	— 122° 8	media di tre misure, differenza 0°19′.
B	»	*B′*	= 90 0	— 89 52	media di due misure, differenza 0°12′.
B	»	*o*	= 135 0	— 135 2	media di tre misure, differenza 0°4′.
(*mm*)	»	(*BB′*)	= 123 27.		
m	»	*o*	= 118 52.		

$a : b = 1 : 1{,}0705$; *m* 111, *B* 010, *o* 011.

Questi cristalli si possono facilmente confondere con i cristalli aciculari di gesso con i quali sono uniti, non essendo sempre sufficiente il loro splendore più vivace per distinguerli; ma si rimuove ogni dubio quando si espongono in cannello di vetro alla fiamma della lampada ad alcool, perchè i cristalli di gesso diventano opachi e quelli di belonesia restano inalterati, essendo anidri. Alla fiamma del cannello si fondono con qualche difficoltà; quelli meno esili si curvano, diventano opachi e si cuoprono di tubercoletti, i più esili si mutano accorciandosi in un gruppo di tubercoletti opachi bollosi. Fusi col sal di fosforo facilmente scompariscono nella perla, lo stesso avviene col borace con minore facilità. L'acido cloridrico non li discioglie.

Le difficoltà incontrate nel determinare la composizione chimica di questi cristalli è stata la principale cagione che mi ha fatto ritardare la pubblicazione della presente memoria, sperando potermi procurare dei medesimi una quantità maggiore disponibile per le analisi. Non conservando che pochi pezzi per dimostrare l'esistenza di questa per ora rarissima specie, la quantità dei cristallini che ho potuto raccogliere per i saggi analitici è stata di poco maggiore di quaranta milligrammi. Anche la scelta dei medesimi cristallini ha costato non lieve fatica; e per formarsi una giusta idea della loro scoraggiante piccolezza, non sarà inutile sapere che avendone messi insieme circa cinquecento li ho trovati pesare gram. 0,0315; val quanto dire che quindici cristalli non pesano più di un milligramma.

(*a*) Βελόνη, ago.

Fondendo la loro polvere col carbonato sodico i saggi analitici sono riusciti negativi per la silice, per l'acido solforico, per l'acido fosforico e per l'acido borico. Fra le basi ho rinvenuto soltanto la magnesia che ho riconosciuto per il precipitato avuto con l'ammoniaca dalla soluzione neutra, il quale precipitato disciolto con l'acido cloridrico non si è riprodotto facendo la soluzione ammoniacale. Anche il saggio fatto per la ricerca del fluore è stato negativo.

A questi risultamenti era pervenuto quando nella tornata del dì 8 settembre 1883 presentai il sunto che si è pubblicato nel Rendiconto; e però in esso non ho fatto parola della composizione chimica della belonesia, mancando la determinazione della parte più importante dei suoi componenti, e che non poteva essere alcuno degli acidi che sogliono trovarsi nelle produzioni del nostro vulcano. Allora sospesi ogni ulteriore ricerca, sia perchè confidava di ricevere altri frammenti delle antiche rocce vesuviane incastonate nella lava del 1872 per poter riprendere i saggi analitici con maggiore quantità della novella specie, sia perchè la mia attenzione era rivolta sopra i prodotti di recente scoverti nei vulcani fluoriferi della Campania. Ed ora che ho quasi perduto ogni speranza di procurarmi maggiore quantità di belonesia son ritornato ad esaminare ciò che aveva conservato dei primi esperimenti istituiti nel 1883. Ho esposto questi particolari per giustificare il ritardo della pubblicazione della memoria, ed anche perchè avendo trovato, come or ora si farà manifesto, che la belonesia è un moliddato di magnesia, credo mio debito dichiarare che questa scoverta non è anteriore al mese di gennaio del corrente anno 1886.

Nel 1883 aveva fuso col borace in crogiuolo di platino circa sedici milligrammi di cristalli polverizzati, e la sostanza fusa disciolta con acqua stillata era stata quasi per intero abbandonata alla spontanea evaporazione. Aveva pure conservato piccola porzione della sostanza avuta fondendo col carbonato sodico i medesimi cristalli. Nella coppa contenente la prima soluzione, già del tutto prosciugata, ho trovato molti cristalli di borace che ricuoprivano una sostanza di apparenza terrosa bianca. Disciolti con acqua i cristalli di borace, la sostanza terrosa essendo rimasta insolubile, l'ho lavata e l'ho disciolta con acido cloridrico bollente. La soluzione avvenuta lentamente è stata completa e scolorata. Di poi evaporata a secchezza la soluzione acida a circa 90°, ha lasciato residuo di colore azzurro, e questo inaspettato risultamento già mi ha fatto prevedere quale poteva essere l'acido combinato alla magnesia. Anche la piccola quantità della sostanza rimasta dopo la fusione col carbonato sodico, discacciati col calore i sali ammoniacali che vi si trovavano mescolati, e disciolto il residuo con l'acido cloridrico, avendo portato a secchezza la soluzione acida, si è avuto piccolo deposito di colore azzurro.

Essendo per certo poco credibile che tra le produzioni del Vesuvio si rinvenisse un moliddato, prima di procedere ad altri saggi ho invitato il Prof. Mauro a vedere la non attesa sostanza azzurra; e nel tempo stesso sospettando che altri acidi dei più rari fossero uniti a quella sostanza, giovandomi della sua sperimentata perizia nelle ricerche chimiche, ho voluto sentire il suo consiglio negli esperimenti che restavano a farsi.

Il residuo azzurro è alquanto solubile nell'acqua e la soluzione azzurra ha dato con l'idrogeno solforato precipitato bruno, solubile nel solfidrato ammonico restando la soluzione colorata in rosso bruno. Ad una porzione dello stesso residuo azzurro a-

vendo aggiunto acido nitrico, e discacciato col calore l'acido eccedente esso è rimasto di color bianco, insolubile nell'acqua, solubile nell'ammoniaca. E la soluzione ammoniacale portata a secchezza ha dato residuo bianco solubile nell'acqua. In questa soluzione acquosa con l'idrogeno solforato e col solfidrato ammonico si sono avute le stesse reazioni della precedente soluzione acquosa azzurra. Altra sostanza bianca, avuta pure trattando porzione del residuo azzurro con acido nitrico, esposta in piccolissimo crogiuolo di platino alla fiamma Bunsen si è fusa e volatilizzata ricuoprendo le pareti del crogiuolo di cristallini dotati di splendore assai vivace. Questo esperimento è stato eseguito nel laboratorio della Scuola di applicazione degl'Ingegneri.

Per i riferiti caratteri non cade dubio che l'acido combinato alla magnesia nei cristalli di belonesia sia l'acido moliddico. Per la piccolissima quantità di sostanza disponibile non ho nemmeno tentato di fare un'analisi quantitativa, ma credo molto probabile che la formola rappresentante la composizione della novella specie sia MgO, MoO^3.

Se come si è detto innanzi i cristalli di apatite dimostrano la presenza dell'acido fosforico nella lava del 1872, ancora più notevole è la produzione dei cristalli di belonesia per dimostrare nella medesima lava la presenza dell'acido moliddico.

Crifiolite (*a*). Il nome col quale ho distinto questa specie deriva dall'avere trovato i suoi cristalli che sono sempre ricoverti da cristallini bislunghi di apatite che si adaggiano sulle loro facce formando quasi una buccia che tenacemente vi aderisce. La forma dei cristalli, malgrado l'essere ricoverti di apatite, si manifesta distintamente monoclina e per la varia estensione delle facce suol presentarsi come vedesi disegnata nelle figure 8 a, b e 9 a, b, in a con lo spigolo *AB* parallelo al piano di proiezione ed in b con lo stesso spigolo perpendicolare al piano di proiezione. Con questa disaggradevole condizione di essere le facce dei cristalli ricoverti da sostanza straniera non è stato possibile prendere direttamente la misura degli angoli diedri; ma allogando le facce parallele al portaoggetti del microscopio il Coadiutore del Museo Mineralogico ha potuto misurare alcuni angoli piani che meglio si prestavano alla difficile ricerca. Gli angoli misurati, figura 10, sono stati $x = 121°$, $y = 117°$, $z = 94°30'$. Da questi angoli piani, risolvendo il triangolo sferico col vertice in *o*, si sono avuti gli angoli diedri *AB*, *Am*, *Bm*. Essendo gli spigoli *Am Am'* rispettivamente paralleli agli spigoli *An An'*, dall'angolo *y* trovato eguale a 117°, si deduce l'angolo *y'* eguale a 126°; ed essendo lo spigolo *nm* parallelo ad *mB*, dall'angolo *z* eguale a 94°30' si deduce l'angolo *z'* eguale ad 85°30'. Quindi nel triangolo sferico col vertice in *o'* si trovano gli angoli diedri *An* ed *nm*. Colle precedenti misure si giunge a determinare il rapporto delle lunghezze degli assi e l'inclinazione dell'asse *a* con *b*. Per aversi la completa determinazione dei cristalli di crifiolite importerebbe conoscere l'inclinazione di *A* con *e* che non può dedursi dai tre angoli piani misurati. Se la faccia *e* fosse stata tangente allo spigolo *nn'*, essendo il simbolo di *n*, nella posizione del cristallo secondo la figura 8 a, $\bar{1}1\bar{1}$, il simbolo di *e* risulsulterebbe $\bar{1}10$, e da questo simbolo si otterrebbe la inclinazione di *e* sopra *A'* e sopra *B*. Intanto la posizione della faccia *e* è tale che apparisce assai probabile il suo simbolo essere $\bar{1}20$, e ritenendo questo simbolo si è calcolato l'angolo diedro *A'e*. Quindi si hanno le seguenti misure goniometriche le quali non sono che approssimative:

(*a*) κρύφιος, coverto.

A con	$B = 114° 8'$	A con	$n = 110°59'$
A »	$m = 128\ 18$	n »	$m = 130\ 43$
B »	$m = 125\ 21$	n »	$n' = 67\ 24$
A »	$(mm') = 150\ 6$	A »	$(nn') = 130\ 11$
m »	$m' = 91\ 16$	A' »	$e = 101\ 14$

$a : b : c = 1 : 1,180 : 0,601.$

A 100; B 010; m $11\bar{1}$; n $\bar{1}1\bar{1}$; e $\bar{1}20$.

Sono nella medesima zona le facce A,B,e; A,m,n; e B,m',n.

La crifiolite è solubile nell'acido cloridrico bollente, e fusa col sal di fosforo o col borace rimane disciolta completamente nella perla fusa. Nondimeno nell'acido cloridrico è meno solubile dell'apatite, e sia col sal di fosforo, sia col borace si fonde assai più lentamente dell'apatite. Ed ho trovato che il miglior mezzo di liberare i cristalli di crifiolite dai cristallini di apatite che li ricuoprono è appunto la loro fusione col sal di fosforo portata al punto da fare scomparire la crosta esterna. Sciogliendo poi con acqua il fosfato sodico con l'apatite che in esso si è fusa, si ha la crifiolite pura. Così liberata dai cristalli di apatite essa si scuopre di color giallo di mele, trasparente e dotata di vivace splendore vitreo. Non offre alcuno indizio di sfaldature, quantunque per la sua trasparenza lasci scorgere non rare fenditure interne in direzioni varie; è fragile, e quando si cerca polverizzarla in mortaio di agata i suoi frammenti sbalzano proiettandosi con tale impeto che ho incontrato una difficoltà inaspettata a ridurla in polvere. Per la piccolezza dei frammenti dei quali ho potuto disporre non mi è riuscito sperimentare la sua durezza con i metodi ordinarii; nondimeno debbo ritenere la sua durezza quasi eguale a quella dell'ortoclasia, perchè i minuti granelli, stropicciati tra due lamine di vetro, han lasciato il vetro scalfito. La sua densità determinata con grm. 0,112 di piccoli frammenti l'ho trovata eguale a 2,674. Le piccole schegge alla fiamma del cannello diventano opache bianche, si cuoprono di minutissime asprezze e non giungono a perfetta fusione. Fortemente riscaldata in tubo di vetro conserva non diminuito il suo peso.

Della crifiolite non ho trovato che pochi cristalli di circa due millimetri nel maggior diametro, ed un solo, che ha servito di modello alla figura 8, ha poco più di tre millimetri di altezza. Quindi la solita difficoltà di determinare la composizione chimica delle novelle specie vesuviane provveniente dalla scarsa quantità disponibile per le analisi e dall'essere mescolate con sostanze straniere. La prima cura nell'analizzare questa specie è stata rivolta ad averla libera dai cristallini di apatite che la ricuoprono; e questo scopo ho potuto facilmente raggiungere fondendo, come si è detto, i cristalli nel loro stato naturale col sal di fosforo; dappoichè il colore, lo splendore e la trasparenza della crifiolite fanno riconoscere agevolmente quando ad essa non sono più aderenti gli ultimi avanzi di apatite.

Per i saggi qualitativi mi sono assicurato che la crifiolite sia un fosfato di magnesia con notevole quantità di calce di fluore e minime quantità di ferro. Non avendo che poco più di un decigrammo del minerale per analizzarlo, l'ho diviso in due parti adoperando una di esse per la determinazione del fluore, e l'altra per determinare le quantità di acido fosforico, di magnesia e di calce. Grm. 0,048 del minerale sottilmente polverizzato è stato tratto con l'acido solforico, come si usa per lo sprigionamento del

fluorido idrico, sino a che nel peso del residuo non si è avuto novello aumento. Vi è stato l'aumento di grm. 0,0205, dal quale si deduce la quantità del fluore eguale a grm. 0,013, e per conseguenza eguale a 27 per cento. Trattando la polvere con l'acido solforico ho avuto ben distinta la corrosione del vetro che mi ha manifestato la presenza di notevole quantità di fluore; nondimeno la grande quantità di fluore trovata mi sembra poco probabile, ed avrei ripetuto il saggio se avessi avuto maggiore quantità del minerale disponibile.

Per la determinazione quantitativa degli altri elementi non ho potuto disporre che di gram. 0,0685. Ne ho fatto soluzione nell'acido nitrico bollente in tubo di vetro il quale è rimasto fortemente corroso. Dalla soluzione acida col moliddato ammonico ho precipitato il fosfomoliddato ammonico che ho disciolto con l'ammonica, e nella soluzione ammoniacale, aggiuntovi solfato magnesiaco e cloruro ammonico, ho precipitato il fosfato ammonico magnesiaco. Dalla soluzione acida separata dal fosfomoliddato ammonico, discacciata con la concentrazione gran parte dell'acido nitrico eccedente, e neutralizzata con l'ammoniaca ho precipitato prima la calce con l'ossalato ammonico, indi col fosfato di soda la magnesia allo stato di fosfato ammonico magnesiaco. Dai due fosfati ammonico magnesiaci, convertiti in pirofosfati ho dedotto la quantità di acido fosforico e di magnesia. Il pirofosfato per la determinazione dell'acido fosforico è stato di grm. 0,051; l'altro per la determinazione della magnesia è stato di grm 0,064; ed il carbonato calcico è stato di grm. 0,018. Quindi abbiamo:

			in 100 parti	Ossigeno
Acido fosforico	grm.	0,0335	48,91	27,55
Magnesia	»	0,0230	33,58	13,43
Calce	»	0,0100	14,60	4,17
Perdita	»	0,0020	2,91	
		0,0685	100,00	

Nella supposizione che per le quantità degli elementi determinati con l'analisi non vi sia alcuno errore per eccesso o per difetto, ed attribuendo la perdita al fluore ch'è stato sostituito dall'ossigeno, la quantità del fluore sarebbe eguale a grm. 0,00475, ovvero 6,93 per cento; il quale risultamento è ben diverso da quello ottenuto per la determinazione diretta del fluore, e lascia il desiderio di rifare l'analisi della crifiolite, disgraziatamente assai rara, e trovata in condizione di gracitura affatto eccezionale.

La crifiolite è molto affine alla Wagnerite, e la principale differenza consiste nella presenza della calce che sta in luogo di una notevole quantità di magnesia. E come ho fatto innanzi osservare, alla sostanza adoperata per le analisi non potendosi sospettare che vi sia mescolata parte dei cristalli di apatite che ricuoprono quelli della crifiolite, dobbiamo ritenere che la calce faccia parte della composizione della novella specie vesuviana.

Il sistema di cristallizzazione è lo stesso nella crifiolite e nella Wagnerite; e non sarebbe di alcuna utilità ricercare se vi sia o no differenza nelle loro forme cristalline, non potendosi fare assegnamento sulle imperfette misure goniometriche trovate.

Ritornando al fatto precedentemente esposto che i cristalli del fosfato magnesiaco,

ci fa supporre che la prima specie siasi prodotta prima dell'altra, son di avviso che nello stesso fatto vi sia da considerare un fenomeno di metamorfismo: che cioè la parte esterna dei cristalli di crifiolite siasi trasformata in apatite.

Anortite. Anche l'anortite deve riportarsi tra le specie che per effetto di sublimazioni si sono formate nell'antica roccia della lava del 1872. Non vi ho trovato che pochi minuti cristalli, ed un gruppetto di cristalli confusamente uniti, nei quali non tanto per qualche misura goniometrica che non potrei dire decisiva, quanto per la lunga pratica nel riconoscere i cristalli di anortite, giudico che sono da riferirsi a questa specie.

Sostanza terrosa gialla. Quantunque i caratteri apparenti di questa sostanza non mi sembrassero tali da farmi credere che essa costituisca una particolare specie mineralogica, pure ho stimato conveniente allo scopo del presente lavoro esaminare la sua chimica composizione. Essa forma larghe croste di varia spessezza sulla sostanza fusa innanzi descritta, ed in alcune parti è nella stessa sostanza fusa talmente impigliata ed aderente da lasciar credere che da essa derivi. Non è facile distaccarla completamente, ed operando con piccolo scalpello si ottengono granelli pelverosi o minuti frammenti. Guardata ad occhio nudo è di colore giallo che sembra uniforme, ed osservata con lente di forte ingrandimento si scorge composta di parti varie, alcune in forma di granelli bianchi terrosi, altre ancora terrose di colore rossastro, e vi si rinvengono ad esse mescolati, facile a riconoscere, alquanti cristalli di ematite e di mica, tal fiata abbondanti. Vi son pure di forma indefinibile frequenti gruppetti di minutissimi cristalli bianchi, trasparenti, e dotati di vivace splendore.

Esposta in cannello da saggio alla fiamma della lampada ad alcool, si raccolgono nella parte fredda d'ordinario poche gocciole acquose, ed inferiormente si deposita tenue velo bianco con i caratteri del clorammonio. Altre volte lo sprigionamento dei vapori aquei è tumultuoso, ed in diversi saggi la perdita in peso per le sostanze volatili sprigionate è stata variabile tra 2,05 ed 8,17 per cento. Sottilmente polverizzata e lavata con acqua stillata bollente, il liquore filtrato ha dato debole reazione di cloro abbondante di acido solforico e calce; e riscaldato col carbonato sodico, oltre il precipitato del carbonato calcico, si è svolta sostanza gassosa che ha restituito il colore azzurro alla carta rossa di tornasole. Per questi caratteri si fa manifesto la presenza di piccola quantità di clorammonio, e quantità maggiore di gesso, forse anche di anidrite, le quali specie si è veduto trovarsi pure distintamente cristallizzate.

Mi sarei arrestato a questi saggi, se non avessi osservato i suddetti cristallini splendenti che m'interessava sapere a quale specie appartengono. Isolati con diligenza alcuni di essi, non mi è stato possibile riconoscere la loro forma, nemmeno osservandoli col microscopio. Sembrandomi probabile che essi appartenessero ad alcuna delle specie precedentemente descritte, ed in particolare all'apatite o alla crifiolite, ho ricercato la presenza del fluore e dell'acido fosforico.

Col solito metodo dell'acido solforico ho sempre riconosciuto la presenza del fluore per la corrosione del vetro, talvolta assai profonda, altre volte leggiera; e cercando conoscere la quantità di fluorido idrico sprigionata per l'aumento del peso che si ottiene quando un fluoruro è scomposto dall'acido solforico, ho incontrato tale difficoltà ad eliminare l'acido solforico eccedente, che mi è sembrata strana: e mi ha indotto a ripetere più volte la prova. Per nulla omettere di ciò che può tornare utile alle future

ricerche riferisco i seguenti saggi eseguiti con la sostanza terrosa gialla sottilmente polverizzata, e fortemente riscaldata per eliminare le materie volatili.

1.°

Grm. 0,204 della polvere trattata con l'acido solforico, e ripetuto per quattro volte l'arroventamento del residuo, si è avuto l'aumento di grm. 0,068, e lo stesso residuo con l'esposizione all'ambiente ha dato notevole aumento di peso. Persuaso che non era stato eliminato tutto l'acido solforico eccedente, ho ripetuto il riscaldamento al calor rosso dello stesso residuo aggiungendo carbonato ammonico, ho dovuto ripetere più volte questa operazione per avere le ultime due pesate eguali. L'aumento sul peso primitivo della sostanza adoperata è stato di grm. 0,015, dal quale si deduce la quantità del fluore eguale a grm. 0,00646, ovvero 3,27 per cento.

2.°

Grm. 0,207 della polvere trattata con acido solforico, ed il residuo arroventato più volte sino ad avere due pesate eguali, si è avuto l'aumento di grm. 0,036 che dà di fluore grm. 0,02269, ovvero 11,73 per cento. Il residuo esposto all'aria ha dato piccolo aumento di peso dovuto al solfato di magnesia anidro anzichè all'acido solforico; dappoichè lo stesso residuo lavato con acqua calda la soluzione non ha dato reazione acida.

3.°

Grm. 0,3685 trattati come nei casi precedenti sino ad avere due pesate eguali, si è avuto l'aumento in peso di grm. 0,045 che dà di fluore grm. 0,029, ovvero 7,87 per cento. Della parte solubile del residuo, che non ha dato reazione acida, separata con l'ossalato ammonico piccola quantità di calce ho avuto di pirofosfato magnesico grm. 9,081 dal quale si deduce la quantità del magnesio eguale a grm. 0,0164. Nella supposizione che l'aumento del peso nella sostanza primitiva fosse dovuto soltanto alla sostituzione dell'acido solforico al fluore, e che il fluore fosse combinato soltanto al magnesio, grm. 0,029 di fluore richiederebbero grm. 0,0183 di magnesio.

4.°

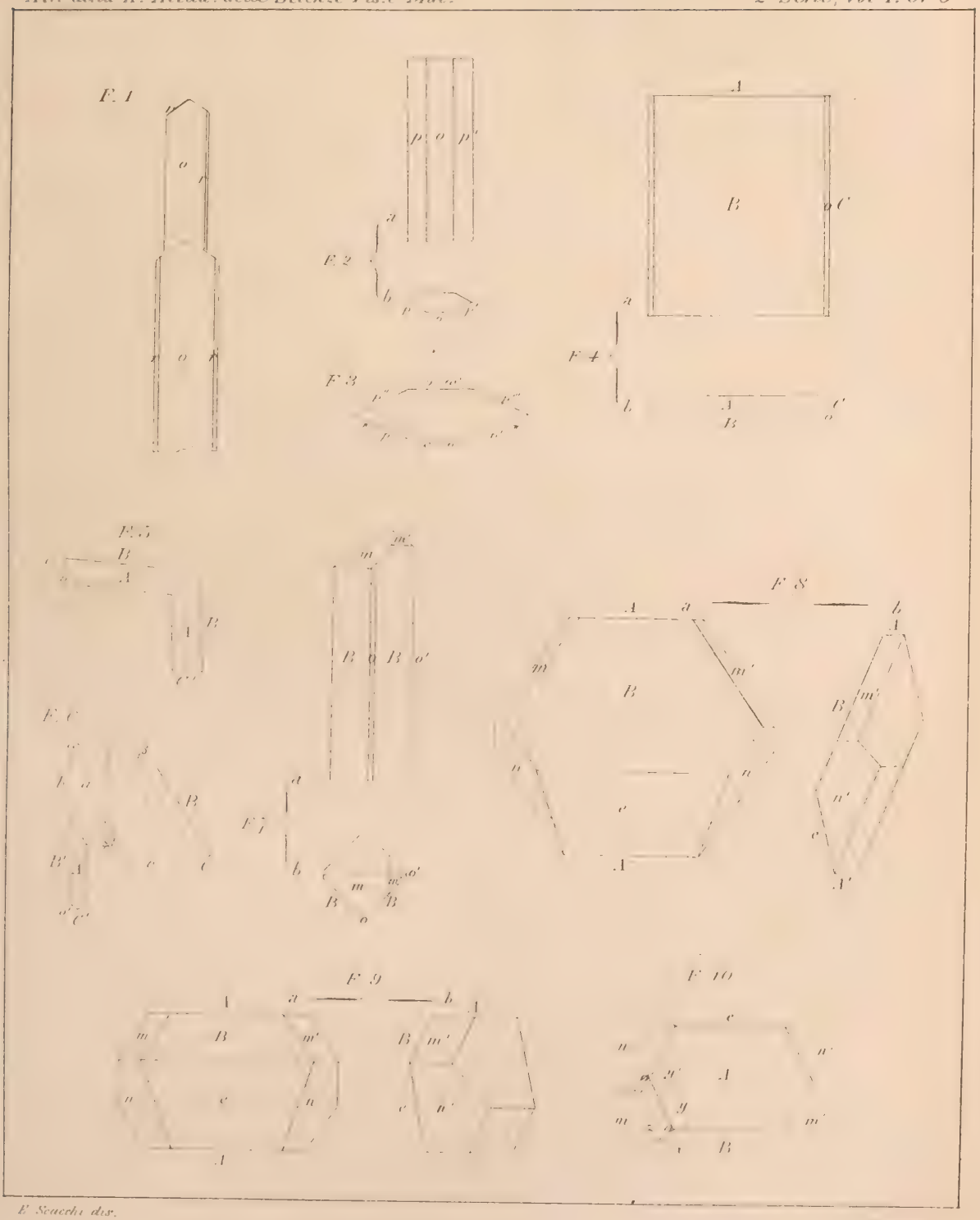
Grm. 0,135 trattati con l'acido solforico hanno dato debole reazione di fluore, e nel residuo arroventato ho trovato l'aumento di grm. 0,201 sul peso della sostanza adoperata. Ripetuto per altre tre volte il riscaldamento del residuo al calor rosso, l'aumento sul peso primitivo si è di continuo scemato sino a grm. 0,102. Con l'esposizione del residuo all'ambiente per circa venti ore il suo peso si è aumentato di grm. 0,038. Aggiungendo allo stesso residuo carbonato ammonico, dopo il primo arroventamento l'aumento di peso si è ridotto a grm. 0,068. Ripetuta l'operazione dell'arroventamento col carbonato ammonico, soltanto dopo quinto esperimento si è giunto ad avere le ultime due pesate eguali con l'aumento sul peso primitivo di grm. 0,004; e per conseguenza il fluore eguale a grm. 0,00262, ovvero 0,60 per cento.

Per i precedenti saggi, indipendentemente dalla difficoltà incontrata nel discacciare l'acido solforico eccedente, la sola cosa che si può ritenere rigorosamente dimostrata è la presenza del fluore in quantità variabile. Non saprei dubitare che il fluore

si rinvenga nei cristallini splendenti che s'incontrano nella terra gialla, i quali cristallini probabilmente costituiscono un fluoruro di magnesio. E la quantità variabile di fluore rinvenuta deriva sì dall'essere molto variabile la quantità dei medesimi cristallini, come pure dal perchè la sua determinazione quantitativa per l'aumento del peso dopo il trattamento con l'acido solforico, trattandosi di un fluoruro mescolato a grande quantità di sostanze straniere, è soggetta per opposte cagioni a dare risultamenti che non sono esatti. Da una parte il fluorido idrico sprigionato, attaccando i silicati dà luogo allo svolgimento del fluorido silicico, e per conseguenza ad un difetto nella quantità di fluore trovata. E di fatto nei saggi eseguiti ho potuto verificare che le minute laminucce di mica di color bruno inseparabili dalla terra gialla, dopo il trattamento con l'acido solforico osservate al microscopio si appalesano scabre di color bianco con vivace splendore argenteo. Per l'opposto l'acido solforico combinandosi con le basi dei silicati scomposti produce aumento nel peso del residuo, e fa presumere una quantità di fluore maggiore di quella contenuta.

Nella ricerca dell'acido fosforico col mezzo della soluzione nitrica di moliddato ammonico ho avuto risultamenti che debbo credere negativi. Quando ho fatto bollire la terra gialla con l'acido nitrico, e discacciato nella soluzione la maggiore quantità di acido nitrico eccedente, essa con l'aggiunzione del moliddato ammonico in principio è divenuta gialla, e nel corso della giornata ho avuto deposito cristallino giallo non diverso nell'apparenza dal fosfo-moliddato ammonico. Ma raccolto questo deposito per aver dal suo supposto acido fosforico il doppio fosfato ammonico magnesiaco, esso non si è ottenuto; ed ho dovuto persuadermi che il deposito cristallino giallo non era altro che acido moliddico idrato. La soluzione nitrica di moliddato ammonico che ha servito di reattivo era stata preparata con le proporzioni di acqua, di acido nitrico della densità di 1,2 e di cristalli di puro moliddato ammonico suggerito dal Fresenius e nella soluzione, trascorsi circa due mesi si erano depositati alquanti cristalli gialli di acido moliddico idrato.

finita stampare il dì 31 Dicembre 1886



E. Scacchi dis.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA LATITUDINE DEL REALE OSSERVATORIO DI CAPODIMONTE

MEMORIA

del Socio Ordinario E. FERGOLA

Adunanza del dì 1° dicembre 1883

Recenti ricerche relative ai valori della latitudine di alcuni Osservatorii, e la pubblicazione di nuovi Cataloghi fondamentali di stelle, avvenuta in questi ultimi anni, e propriamente dopo la stampa della mia Memoria: « *Determinazione novella della latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte* », mi hanno indotto ad una parziale revisione di quel lavoro, che trovasi inserito nel vol. V di questi Atti. Nella presente comunicazione mi propongo dare un breve ragguaglio delle modificazioni da portare ai risultamenti ottenuti nella Memoria anzidetta, e le ragioni di tali modificazioni.

Il metodo da me seguito nel 1871 per la determinazione della latitudine, è quello detto di Talcott, e consiste nel misurare micrometricamente, con uno strumento che rimane sempre egualmente inclinato all'orizzonte, la semidifferenza delle distanze zenitali Nord e Sud di due stelle che passano al meridiano in breve intervallo di tempo. Per ogni osservazione di tal fatta, il valore L della latitudine è dato dall'equazione:

$$L = \frac{1}{2}(\delta' + \delta) + \Delta_1 + \frac{1}{2}(m' - m) + \frac{1}{2}(c' - c) + \frac{1}{2}(l' + l) + \frac{1}{2}(r' - r)\,, \qquad (1)$$

in cui $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ è la semisomma delle declinazioni medie delle due stelle pel principio dell'anno delle osservazioni, e Δ_1 la riduzione di questa semisomma alla posizione apparente; mentre i termini rimanenti rappresentano ordinatamente la semidifferenza misurata delle distanze zenitali, e le tre correzioni per la riduzione al meridiano, e per le differenze di livello e rifrazione. I primi due termini menzionati dipendono solamente dai Cataloghi usati, e dai valori ritenuti per le costanti di precessione, nutazione, etc. Conservando inalterati i valori di queste costanti, e nulla mutando nella riduzione delle osservazioni, la semplice sostituzione di un Catalogo all'altro, produrrà un cangiamento nei soli primi due termini del valore della latitudine, cioè nella semisomma delle declinazioni medie delle due stelle della coppia, e nella riduzione alla loro posizione appa-

rente, quando i movimenti proprii dati dal nuovo Catalogo sono differenti da quelli usati prima. Quest'ultima correzione sarebbe alquanto più sensibile se inoltre si sostituissero alle costanti di Bessel quelle di Struve-Peters, che sono ora più generalmente adottate. Si avrà dunque in ogni caso una correzione nel risultamento finale, la quale è affatto indipendente dalle osservazioni propriamente dette, e dal metodo seguito per la loro riduzione.

I Cataloghi usati nella redazione della Memoria citata furono:

1.° Quello dell'Almanacco Nautico inglese.
2.° Il Catalogo di Pulkowa inserito nel vol. IV dei Vierteljahrsschrift della Società astronomica di Germania.
3.° I cinque Cataloghi di Greenwich per le epoche 1840, 45, 50, 60, 64.
4.° I due Cataloghi Radcliffe del 1845 e del 1860.
5.° Il Catalogo B. A. C. (per due sole delle 104 stelle osservate).

I Cataloghi che uso attualmente per la revisione che mi sono proposto sono:

a) Il fondamentale di Auwers, in cui sono modificate le posizioni delle 539 stelle del catalogo di Pulkowa tenendo conto delle osservazioni di Greenwich, Cambridge (S. U.). Leida e Lipsia.
b) Il Catalogo delle declinazioni di 500 stelle, di Lewis Boss, dedotto dalla discussione dei risultati ottenuti in un gran numero di Osservatorii, e che serve di fondamento alle effemeridi di stelle che si pubblicano nell'*Almanacco Nautico Americano.*
c) Finalmente il Catalogo delle declinazioni di 2018 stelle calcolato da Safford su molti Cataloghi anteriori, per uso del Comitato Geografico degli Stati Uniti.

Delle 52 coppie di stelle da me osservate nel 1871 se ne trovano 23 nei tre Cataloghi anzidetti, che sono pel 1875; ma le declinazioni che se ne ricavano riescono sensibilmente differenti da quelle risultanti dai Cataloghi usati prima, con notevole prevalenza di correzioni positive; risultando ben 33 declinazioni, sopra 46, più grandi dai nuovi Cataloghi che dagli antichi. Ammettendo quindi che siano più precise le nuove determinazioni, apparisce evidente la convenienza di escludere provvisoriamente quei valori della latitudine che risultano da osservazioni di stelle non comprese nei tre Cataloghi sopradetti.

Nel seguente quadro sono riportate insieme con le declinazioni medie per 1871.0, i movimenti proprii adottati, l'indicazione del Catalogo usato, e le differenze fra questi valori delle declinazioni e quelli ritenuti nella Memoria del 1872 (pp. 32-36). I numeri romani premessi a ciascuna coppia sono gli stessi che si trovano nella Memoria citata.

Confronto delle declinazioni medie per 1871.0 delle stelle osservate per la latitudine.

Numero	Stelle	Declinazione	Movimento proprio	Diff. decl. Cat. nuovo — Cat. antico	Catalogo
I	ε Cassiopejae	+ 63° 1′ 59.″88	— 0.″020	+ 0.″32	Auwers
	γ′ Arietis	18 39 36.33	— 0.086	— 0.66	»
II	Bradley 348	72 15 5.35	+ 0.011	+ 0.28	Auwers
	μ Ceti	9 34 4.39	— 0.020	+ 0.03	»
XIV	ξ Geminorum	13 1 56.00	— 0.195	+ 0.27	Auwers
	43 Camelopardi	69 2 1.23	+ 0.038	+ 1.36	»
XXII	o Ursae maj.	61 8 47.56	— 0.112	+ 1.17	Auwers
	η Cancri	20 52 38.88	— 0.047	+ 0.40	»
XXV	83 Cancri	18 15 2.44	— 0.139	+ 0.10	Auwers
	h Ursae maj.	63 37 25.83	+ 0.026	+ 0.38	»
XXIX	37 Ursae maj.	57 44 46.00	+ 0.039	+ 1.35	Auwers
	41 Leonis min.	23 51 46.47	+ 0.026	+ 0.65	»
XXXI	Piazzi XIX, 371	58 30 8.16	— 0.02	+ 1.78	Safford
	17 Vulpeculae	23 14 38.68	— 0.005	+ 0.17	»
XXXII	32 Cygni	47 19 8.14	0.00	+ 0.59	Safford
	35 Cygni	34 34 50.98	+ 0.003	+ 0.73	»
XXXIII	Bradley 2673	72 5 40.09	— 0.020	+ 0.08	Boss
	ϰ Delphini	9 37 59.96	+ 0.012	— 0.35	Auwers
XXXIV	λ Cygni	36 1 3.40	+ 0.018	— 0.12	Auwers
	55 Cygni	45 38 10.97	— 0.016	— 0.73	Safford
XXXV	57 Cygni	43 53 59.10	+ 0.007	+ 0.14	Safford
	61 Cygni	38 6 58.44	+ 3.230	— 0.04	Auwers
XXXVI	69 Cygni	36 6 39.58	— 0.017	+ 0.14	Safford
	Radcliffe 5239	45 51 21.03	— 0.050	+ 1.07	»
XXXVIII	13 H. Cephei	56 54 22.63	— 0.015	+ 0.79	Auwers
	ϰ Pegasi	25 3 10.82	+ 0.013	— 0.25	»
XXXIX	15 Pegasi	28 11 26.90	— 0.063	+ 0.65	Safford
	Bradley 2867	53 23 23.67	— 0.003	— 0.41	»
XLI	19 Cephei	61 39 9.88	— 0.04	+ 0.14	Safford
	28 Pegasi	20 20 42.10	+ 0.014	+ 0.87	»
XLIII	30 Cephei	62 54 51.26	— 0.039	+ 0.44	Auwers
	45 Pegasi	18 41 13.82	+ 0.072	+ 1.20	Safford
XLV	2 Cassiopeiae	58 38 0.18	— 0.01	+ 0.40	Safford
	τ Pegasi	+ 23 2 4.03	— 0.014	+ 0.08	Auwers

Numero	Stelle	Declinazione	Movimento proprio	Diff. decl. Cat. nuovo — Cat. antico	Catalogo
XLVI	13 Andromedae	+ 42° 12′ 7″.16	+ 0″.02	— 1″.10	Safford
	15 Andromedae	39 31 31.78	— 0.034	+ 0.27	»
XLVII	ι Piscium	4 55 37.88	— 0.443	— 0.05	Auwers
	γ Cephei	76 54 44.60	+ 0.135	+ 0.38	»
XLIX	γ Pegasi	14 27 58.42	— 0.013	+ 0.51	Auwers
	68 B. A. C.	67 6 25.45	— 0.05	— 3.48	Safford
L	Bradley 27	19 25 54.67	0.00	+ 0.27	Safford
	ϰ Cassiopeiae	62 13 9.92	— 0.022	— 0.29	Auwers
LI	21 Cassiopeiae	74 16 56.58	— 0.036	— 0.08	Auwers
	ε Piscium	7 11 42.02	+ 0.039	+ 0.55	»
LIII	ψ Cassiopeiae	67 27 19.91	+ 0.009	+ 0.53	Auwers
	101 Piscium	+ 14 0 3.45	0.00	— 0.28	Safford

La semisomma delle declinazioni delle stelle di ciascuna coppia rappresenta il valore del primo termine del secondo membro dell'equazione (1). Il secondo termine Δ_1 è stato calcolato mediante l'equazione

$$\Delta_1 = Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + Dd_1 + \tau\mu_1 ,$$

dove A, B, C, D, τ sono presi dal *Nautical Almanac*, e a_1, b_1, c_1, d_1, μ_1 sono dedotti dalle equazioni:

$$a_1 = \operatorname{tg}\varepsilon \cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta') - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta'\operatorname{sen}\alpha' ,$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta\cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta'\cos\alpha' ,$$

$$c_1 = 20''.0546\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') ,$$

$$d_1 = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha') ,$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\mu+\mu') ;$$

in cui α ed α' sono le ascensioni rette *medie* per 1871.0; δ e δ' le declinazioni *medie;* μ e μ' i movimenti proprii delle due stelle; ε l'obbliquità dell'ecclittica. Da ultimo al valore in tal modo determinato si è aggiunta la piccola correzione dei termini lunari. Nella memoria del 1871 la riduzione Δ dalle posizioni medie alle apparenti fu invece eseguita ritenendo le costanti di Bessel, e i moti proprii dedotti dai Cataloghi allora usati. Per ciascuna osservazione di una medesima coppia fu calcolato il valore di

$$\Delta + \frac{1}{2}(m'-m) + \frac{1}{2}(c'-c) + \frac{1}{2}(l'+l) + \frac{1}{2}(r'-r) ,$$

che è eguale ad $L - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$; e dal medio aritmetico di tutti i valori così ottenuti fu ricavato quello di L aggiungendovi il corrispondente termine $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$. Ora la sostituzione di Δ_1 a Δ può essere evidentemente eseguita aggiungendo al medio aritmetico anzidetto, il medio aritmetico dei valori della differenza $\Delta_1 - \Delta$, che si trova nella seconda colonna del seguente quadro. La terza colonna contiene i valori di $\Delta +$ etc. quali furono trovati nel 1871; e la quarta, risultante dalla somma delle due precedenti, rappresenta i valori di $\Delta_1 +$ etc. Aggiungendo a tali valori quelli di $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$, che si deducono dal quadro precedente, si avranno i valori di L risultanti dalle varie osservazioni di ciascuna coppia. Gli errori probabili ε_0 di ciascun valore di $\Delta_1 +$ etc. sono quelli ottenuti nella Memoria precedente quali errori probabili di $\Delta +$ etc.; e il peso P di ciascun valore di L è stato calcolato supponendo rigorosamente esatte le declinazioni, e attribuendo il peso 1 al valore cui corrisponde l'errore probabile eguale al medio di tutti gli ε_0.

Numero	Medio di $\Delta_1 - \Delta$	$\Delta +$ etc.	$\Delta_1 +$ etc.	$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	L	ε_0	P
	″	″	″	° ′ ″	° ′ ″	″	
I	+ 0.019	+ 57.761	+ 57.780	40 50 48.105	40 51 45.89	± 0.071	1.57
II	+ 0.035	— 169.000	— 168.965	40 54 34.870	45.90	0.089	1.00
XIV	+ 0.023	— 612.270	— 612.247	41 1 58.615	46.37	0.064	1.93
XXII	+ 0.051	— 537.407	— 537.356	41 0 43.220	45.86	0.057	2.44
XXV	+ 0.060	— 268.584	— 268.524	40 56 14.135	45.61	0.072	1.53
XXIX	+ 0.076	+ 209.394	+ 209.470	40 48 16.235	45.70	0.099	0.81
XXXI	+ 0.036	— 37.362	— 37.326	40 52 23.420	46.09	0.085	1.10
XXXII	+ 0.032	— 314.317	— 314.285	40 56 59.560	45.27	0.109	0.67
XXXIII	+ 0.059	— 4.454	— 4.395	40 51 50.025	45.63	0.074	1.45
XXXIV	+ 0.051	+ 128.731 *)	+ 128.782	40 49 37.185	45.97	0.104	0,73
XXXV	+ 0.063	— 522.754	— 522.691	41 0 28.770	46.08	0.108	0.68
XXXVI	+ 0.050	— 434.276	— 434.226	40 59 0.305	46.08	0.149	0.36
XXXVIII	+ 0.049	— 420.990	— 420.941	40 58 46.725	45.78	0.109	0.67
XXXIX	+ 0.059	+ 261.102	+ 261.161	40 47 25.285	46.45	0.119	0.56
XLI	+ 0.059	— 490.044	— 489.985	40 59 55.990	46.00	0.096	0.86
XLIII	+ 0.050	+ 223.502	+ 223.552	40 48 2.540	46.09	0.105	0.72
XLV	+ 0.052	+ 103.539	+ 103.591	40 50 2.105	45.70	0.079	1.27
XLVI	+ 0.052	— 3.285	— 3.233	40 51 49.470	46.24	0.056	2.53
XLVII	+ 0.042	— 205.714	— 205.672	40 55 11.240	45.57	0.067	1.76
XLIX	+ 0.012	+ 273.441	+ 273.453	40 47 11.935	45.39	0.074	1.45
L	+ 0.022	+ 133.901	+ 133.923	40 49 32.295	46.22	0.111	0.64
LI	+ 0.071	+ 446.164	+ 446.235	40 44 19.300	45 54	0.079	1.27
LIII	+ 0.023	+ 483.832	+ 483.855	40 43 41.680	45.54	± 0.072	1.53

*) Questo valore differisce di 1″.007 da quello che si trova a pag. 66 della Memoria citata; essendo ivi incorso un errore di calcolo di 0″.10 nella riduzione dell'osservazione del 3 novembre, e un errore tipografico di 1″ nel valore medio di

$$L - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

Di quest'ultimo errore non c'è traccia nel corrispondente valore di L, che dovrebbe quindi aumentarsi solamente di 0″.007.

Il valore finale della latitudine che si deduce dai numeri del precedente quadro è *)

$$L_1 = 40^0\ 51'\ 45''.86 \pm 0''.04$$

mentre con le declinazioni e i moti proprii dedotti dai Cataloghi anteriori aveva trovato

$$L = 40^0\ 51'\ 45''.41 \pm 0''.07\,.$$

La sostituzione dei nuovi Cataloghi agli antichi, e delle costanti Struve-Peters a quelle di Bessel ha prodotto dunque l'aumento di 0''.45 nel valore della latitudine anteriormente da me stesso ottenuto, e una diminuzione di 0''.03 nell'error probabile di questo valore, non ostante che abbiano concorso all'ultimo risultato meno della metà delle osservazioni che furono adoperate nella primitiva riduzione **).

Dalle osservazioni del Brioschi, nel 1820, avevasi la latitudine

$$40^0\ 51'\ 46''.63$$

superiore ad entrambi i valori L e L_1. Ammettendo però la correzione fatta recentemente dal Prof. Nobile alla riduzione delle osservazioni di Brioschi ***), l'antico valore sarebbe ridotto a

$$40^0\ 51'\ 45''.70 \pm 0''.57$$

abbastanza vicino al valore L_1 trovato dalle osservazioni del 1871.

Le osservazioni fatte dallo stesso Prof. Nobile nel 1883 col Cerchio meridiano Reichenbach-Heurtaux darebbero ****)

$$40^0\ 51'\ 45''.445 \pm 0''.085$$

che come si vede concorda benissimo col valore L, ma non con L_1 che è il risultato più probabilmente vicino al vero, che può dedursi dalle mie osservazioni del 1871.

---

*) La media aritmetica di tutti i valori di L è 40° 51' 45''.865.

**) La primitiva determinazione era fondata sopra 850 osservazioni di 52 coppie di stelle: nella presente riduzione sono usate 372 osservazioni di 23 coppie.

***) *Terza determinazione della latitudine Geografica del R. Osservatorio di Capodimonte, per* A. Nobile. Napoli 1883.

****) Riducendo dal parallelo del Cerchio al centro della cupola occidentale.

finita di stampare il dì 8 maggio 1884.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

PREMIERS FONDEMENTS POUR UNE THÉORIE DES TRANSFORMATIONS PÉRIODIQUES UNIVOQUES

par M. S. KANTOR

(à Prague)

Mémoire couronné par l'Académie dans le concours pour 1883

« Tout doit être préparé par un long et constant effort pour l'apparition d'une vérité nouvelle ; alors il vient un moment où elle s'élance d'elle-même, comme par une nécessité divine ».

JACOBI

INTRODUCTION.

Parmi les transformations de deux variétés, l'une dans l'autre, ce sont surtout les transformations mutuellement univoques (birationnelles) qui jouent un rôle important. Quand il s'agit de variétés d'une définition quelconque et, *in concreto,* de variétés algébriques d'un ordre arbitraire, on recherche les lois et les propriétés caractéristiques, de ces transformations et, particulièrement leurs accidents singuliers, en regardant chacune des deux variétés F comme partie d'une variété M d'un plus grand nombre de dimensions. On peut disposer de ces deux nouvelles variétés M en les choisissant linéaires; et alors on se trouve en face d'un problème plus étendu, qui consiste à transformer entre elles deux variétés linéaires tellement qu'une au moins soit rendue univoque *). Rattachée à cette conception générale la théorie des transformations planes se présente alors selon deux points de vue. Ou l'on pense les deux plans comme objets F, comme surfaces transformées et de premier degré et on s'en occupe les considérant comme parties d'un espace linéaire à trois dimensions, où il y aura une transformation capable de contenir celle des deux plans: ou l'on voit déjà dans les deux plans des variétés M, entre les quelles cette fois on s'efforce d'établir une transformation mutuellement univoque.

*) On ne peut pas, pour chaque relation univoque imaginable entre deux courbes planes du même ordre ou d'ordres différents obtenir une affinité univoque entre les deux plans qui contienne celle-là.

S'acheminant par cette direction qui n'est que apparemment la moins accessible, M.r Cremona a abordé le problème.

Lorsqu'on passe du champ binaire au champ ternaire les deux domaines restant encore différents, le problème acquiert une extension bien plus grande, par ce que les nouveaux éléments que l'on doit considérer exigent aussi de nouveaux points de vue: ainsi par exemple les ressources de l'algèbre n'ont pas encore été appliquées à la question. Et si l'on fait coincider les deux plans, cela donne origine à une foule de problèmes nouveaux et originaux sur les transformations isolées aussi bien que sur les systèmes de transformations, problèmes, dont quelques uns seulement ont été mentionnés ou abordés jusqu'à présent.

Un de ces problèmes et —suivant mon opinion — un des plus importants, problème fondamental et de nombreuses applications, est celui, que l'illustre Académie a bien voulu proposer aux géomètres et qu'on peut exprimer en ces termes:

« En considérant la transformation birationnelle entre deux plans coincidents, trouver les conditions et construire la transformation de manière qu'en appliquant la même transformation plusieurs fois de suite, on retourne à la figure, dont on est parti ».

De ces *transformations périodiques* les suivantes sont connues jusqu'à ce moment:

1. Les homographies périodiques.
2. Les transformations périodiques à l'indice 2 de la périodicité.
3. Quelques classes de transformations quadratiques à un indice arbitraire de la périodicité.

Les transformations 2, qui sont au seuil de la théorie, mais qui même ne sont pas nécessaires à son développement, ont été étudiées par M. Bertini; et un travail de M. Kantor se rapporte, avec d'autres travaux analogues, aux transformations 3. Dans ce dernier travail se trouve énoncé avec toute la clarté un principe, qui sera beaucoup utilisé dans ce Mémoire. On trouvera, en effet, qu'il répond entièrement à notre question pour ce qui se rapporte seulement à la possibilité de la périodicité : et, combiné avec d'autres idées, il peut résoudre complètement le problème.

Les travaux, qui sont relatifs aux transformations de ces trois classes et y ont apporté des contributions plus ou moins singulières, sont cités dans le tableau suivant:

B. .... Battaglini — *Sulle involuzioni dei diversi ordini*. Atti di Napoli I, II, III.

Bt. 1. .... Bertini — *Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie*. Ann. di Mat. VIII, p. 11.

Bt. 2. .... » — *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*. Ann. di Mat. VIII, p. 244.

Bt. 3. .... » — *Sulle trasformazioni univoche ed in particolare sulle involutorie*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo 1880, p. 443.

C. .... Caporali — *Sulle trasformazioni univoche involutorie*. Rend. di Napoli 1879.

K. 1. .... Kantor — *Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene? Beantwortung derselben Frage für Cremonasche Transformationen*. Ann. di Mat. t. X, p. 64.

K. 2. .... » — *Über successive lineare Transformationen*. Wiener Sitzungsberichte, 82 Bd., p. 39.

K. 3. .... » — *Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene*, ib., p. 237.

K. 4. .... » — *Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformation.* Denkschriften der Wiener Akademie; 4°, 1882, 56 Bd., p. 83.

H. ....Hirst — *On quadric transformation.* Quarterly Journal for pure and applied math., 1881, p. 301.

De tous ces travaux aucun n'est d'usage *indispensable* sauf le Mémoire K. 2 relativement au principe déjà allégué. Ainsi sans insister sur une critique de l'importance de ces travaux je puis dire, que sauf ce principe, le Mémoire que je soumets au jugement de l'Académie, *est tout à fait original.* Quelques résultats de K. 1 se présentent sous un autre point de vue; le résultat le plus important de Bt. 2 à savoir l'existence des 4 types pour les involutions peut être tiré comme conséquence de nos recherches.

Que l'Académie veuille bien me permettre une remarque se rapportant aux progrès que je rétiens d'avoir apporté à la théorie générale et par lesquels j'espère d'avoir satisfait aux désirs exprimés par l'honorable Académie. Après avoir exposé la théorie des homographies périodiques enrichie de certaines considérations nouvelles, après avoir donné une théorie complète et approfondie des transformations quadratiques, après avoir développée une discussion embrassant toutes les transformations périodiques irréductibles du 3ᵉ et 4ᵉ degré — dans la 4ᵉ partie je tâche de surmonter les difficultés au premier aspect in abordables du vaste et compliqué problème général.

L'ordre de la matière proposé par l'énoncé du concours étant ainsi renversé par des motifs que, je l'espère, l'honorable Académie voudra bien apprécier, j'ai, guidé par les idées que les parties antérieures m'ont suggérées, pû trouver un nombre de lois, qui peuvent servir à résoudre tout le problème. Bien que la voie qui m'a conduit à ces principes, soit inductive et en partie conjecturale, pourtant je crois d'avoir fixé un point éminent, de la hauteur duquel on pourra revoir tout le champ, et découvrir le chemin qui doit conduire à la solution finale, de la hauteur duquel on pourra exclure, réduire, séparer et classer. Je continuerai mes recherches dans cette direction déterminée et je pense que trois ou quatre semaines suffiront aux réductions préalablement nécessaires pour établir un tableau complet. Alors je serais à même, d'adjoindre un appendice à ce Mémoire en cas, que l'Académie aurait trouvé satisfaisants les données de mon travail. Enfin je me permets de fixer l'attention de l'Académie sur le § 5 de la quatrième partie, où se trouve énoncé à la hâte un autre principe pour un traitement systématique et complet du problème.

[*Ces lignes étaient écrites devant l'expédition du manuscrit à l'Académie. Dès lors les méthodes à traiter les transformations périodiques ont été augmentées, les moyens pour découvrir leur nature, se sont multipliés et notamment pour les transformations d'un degré quelconque j'ai trouvé un nouveau et actif principe qui permet à démontrer décisivement la réductibilité de toutes les transformations périodiques* *).

*) Voir C. R. de l'Académie des Sciences de Paris 9 février 1885.

Ces augmentations seront ajoutées aux divers endroits du travail, auxquels elles correspondent et l'appendice dont j'ai fait mention, fera suite à la quatrième partie. Pour distinguer les raisonnements et les paragraphes subséquents des autres, je les mettrai entre deux crochets [ ].

Voici un court récit du contenu:

La 1ᵉ partie est consacrée à une recherche générale des homographies périodiques, qui tout en étant connues et souvent appliquées n'étaient pas jusqu'à présent l'objet d'un exposé complet. Dans cet abrégé de leur théorie, les points de vue principaux sont réunis. Un grand nombre des méthodes et des résultats de ces paragraphes devront être considérés comme nouveaux.

La 2ᵉ partie contient une théorie complète, sans restriction, des transformations périodiques quadratiques. On y trouve décrits tous les cas possibles, puis la réduction de ces cas (qui sont récapitulés dans le § 23) à un nombre de types et enfin l'examen minutieux de quelques transformations intéressantes et surtout des transformations typiques. Certaines propriétés fondamentales de ces transformations jettent bien de lumière sur leur nature singulière et deviennent la source de leurs constructions et de leur répresentations algébriques. Les tableaux fréquents de cette partie pourront être dans maintes occasions d'une grande utilité.

Dans la 3ᵉ partie toutes les formes périodiques possibles des degrés 3 et 4 sont réduites à un mince nombre de types irréductibles en degré.

J'ai achevé dépuis peu la discussion difficile de ces types et donné la construction des constructibles. Toutefois il serait désirable, d'exécuter la construction en s'appuyant sur la théorie des *systèmes de transformations* analogues à ceux, qui étaient appliquées § 2 et §§ 24, 29 de la II partie.

Enfin dans la 4ᵉ partie j'arrive aux principes déjà allégués. Il s'y trouvent en outre les contours pour la théorie d'une classe importante de trasformatios de Jonquières. Pour ces transformations il existe ainsi que pour toutes les autres un lien étroit avec les courbes transformées univoquément en soi-mêmes, courbes dévenues fameuses dans ce dernier temps.

[*Ober-Krč, le 25 mars 1883*].

Ière Partie

HOMOGRAPHIES PÉRIODIQUES

---

§ 1.—Caractères—Espèces.

Pour la nature d'une homographie, qui lie ensemble les éléments du même plan, les trois points doubles qui existent ont une signification décisive. On les détermine par le discriminant de l'homographie, en égalant à zèro l'éxpression

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix};$$

deux ou trois racines ρ égales conviennent à l'éxistence d' un triple *biponctuel* ou *uniponctuel,* comme on peut le désigner. Ces deux cas sont à exclure, car le point double auquel un autre est infiniment voisin porte une homographie de rayons avec deux éléments doubles coincidents, qui n'est jamais périodique. On tire la même conclusion aussi des formules connues en coordonnés cartésiennes

$$x' = ax \quad ; \quad x' = x + a$$
$$y' = y + b \quad ; \quad y' = y + bx\,.$$

Elles donnent pour le $n^{ième}$ transformé les équations

$$x^{(n)} = ax \quad ; \quad x^{(n)} = x + na$$
$$y^{(n)} = y + nb \quad ; \quad y^{(n)} = y + bx + \binom{n}{2} ab\,,$$

qu'on ne peut jamais vérifier pour $x^{(n)} = x$, $y^{(n)} = y$.

Reste donc le cas de trois points doubles isolés, celui compris, où il y en a une infinité. Chacun des points doubles porte une homographie de rayons jouissant d'un invariant absolu. Ces trois valeurs, caractéristiques qu'elles sont pour l'homographie ternaire, doivent en être appelées les invariants absolus *). On voit aisément, que deux seulement d'elles sont indépendantes. Car si p_1, p'_1 désignent deux points correspondants, d_1, d_2, d_3 les trois points doubles et si $p_1 d_1$, $p_1 d_2$, $p_1 d_3$, $p'_1 d_1$, $p'_1 d_2$, $p'_1 d_3$ rencon-

*) Voir l'application conséquente de cette notion dans le Mémoire K. 4.

trent les côtés respectivement opposés en π_1, π_2, π_3, π'_1, π'_2, π'_3 par le théorème de Ceva, on a

$$\frac{\pi_1 d_2}{\pi_1 d_3} \cdot \frac{\pi_2 d_3}{\pi_2 d_1} \cdot \frac{\pi_3 d_1}{\pi_3 d_2} = -1 \quad , \quad \frac{\pi'_1 d_2}{\pi'_1 d_3} \cdot \frac{\pi'_2 d_3}{\pi'_2 d_1} \cdot \frac{\pi'_3 d_1}{\pi'_3 d_2} = -1 ,$$

d'où par division s'ensuit cette relation entre les trois rapports anharmoniques λ_1, λ_2, λ_3 des trois homographies:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 .$$

L'homographie périodique a les rapports anharmoniques λ_1, λ_2, λ_3 égaux à des racines de l'unité. Supposons qu'ils soient des racines primitives des dégrés l_1, l_2, l_3. Tout rayon passant en d_1 retourne après l_1, tout rayon par d_2 après l_2 transformations en lui-même; donc tout point du plan retourne après un nombre n de transformations, n étant le plus petit multiple commun de l_1, l_2.

Une homographie sera dite périodique à l'indice n ou brièvement douée de l'indice n, si on ne retombe sur un point quelconque du plan qu'après n applications. À cause des propriétés des homographies binaires se trouve immédiatement le théorème suivant:

Quand il y a un seul point libre *) du plan, qui rétourne après n transformations, l'homographie est périodique à l'indice n.

Des points, qui déjà après f transformations se reproduisent, où f est necessairement un facteur de n, ne peuvent exister que sur les droites doubles. Les trois nombres f_1, f_2, f_3 sont égaux à l_1, l_2, l_3.

2. Les trois points doubles étant donnés s'offre le problème: Chercher tous les points qu'on doit prendre comme premiers transformés d'un point donné p_1 pour obtenir une périodicité homographique.

En se bornant aux homographies d'indice n on construira en d_1 les droites qui déterminent avec $d_1 p_1$ un rapport anharmonique égal à une racine $n^{ième}$ de l'unité, les droites $d_1 d_2$, $d_1 d_3$ étant prises comme droites doubles. On fera la même chose en d_2 et obtiendra, outre p_1, $n^2 - 1$ points d'intersection par lesquels passeront aussi les n droites provenant analoguement de $d_3 p_1$.

Parmi les $n^2 - 1$ points on a les transformés de p_1 par les homographies à un indice f_1, facteur de n. Par des operations arithmétiques il s'ensuit que le nombre de ceux, qui sont périodiques à l'indice n, est

$$\varphi_n^{(2)} = n^2 \left(1 - \frac{1}{f_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{f_2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{f_\nu^2}\right) \quad , \qquad \text{où} \qquad n = f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_\nu^{m_\nu} .$$

Quand $p_1 p_2 \ldots p_n$ est un cycle d'une des n^2 homographies, une homographie périodique est encore déterminée par le couple $p\, p^{(m)}$, donc:

Le groupe des n^2 *points d'intersection contient non seulement les premiers transformés, mais aussi tous les cycles émanant de* p_1 *dans les diverses homographies périodiques.*

Mais si ε_{l_1} ε_{l_2} ε_{l_3} composent une homographie périodique,

$$\varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2}, \varepsilon_{l_3} \; ; \; \varepsilon_{l_2}, \varepsilon_{l_3}, \varepsilon_{l_1} \; ; \; \varepsilon_{l_3}, \varepsilon_{l_2}, \varepsilon_{l_1} \; ; \; \varepsilon_{l_3}, \varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_2} \; ; \; \varepsilon_{l_2}, \varepsilon_{l_1}, \varepsilon_{l_3} ,$$

*) C'est-à-dire non situé dans une droite double.

en sont d'autres, et nous n'en ferons qu'une seule espèce, parcequ'il ne s'agit point de la position des points doubles. De plus, le $m^{ième}$ et le $(n-m)^{ième}$ transformé correspondent à deux homographies qui sont inverses l'une de l'autre et qui seront comptées comme une seule dans l'énumération. En résumant on a:

Il n'y a que $\frac{1}{12}\varphi_n^{(2)}$ *différentes espèces d'homographies primitivement périodiques à l'indice* n.

3. Quelques classes particulières d'homographies périodiques sont à remarquer:

1. Les homologies périodiques, avec $\varepsilon_{l_1} \cdot \varepsilon_{l_2} = 1$.

2. Les homographies avec un faisceau de coniques transformées en soi-mêmes, où $\varepsilon_{l_1} = \varepsilon_{l_2}$. À cette classe appartiennent, p. e., les homographies à cycles parfaitement réels, desquels le Mémoire L s'occupe exclusivement.

3. Pour le paragraphe suivant les homographies d'indice premier sont d'un intérêt particulier. Dans ce cas les ε sont des racines primitives du même dégré n. Il n'arrivera jamais que deux points d'un pareil cycle soient allignés avec un point double; les cycles ont donc ici la forme la plus symétrique. Les espèces 1 et 3, ou 2 et 3, ne s'excluent pas.

4. Le cas le plus simple de 3. est l'indice 3. Cette transformation est fondamentale p. e. pour la théorie des groupes de transformations ternaires. On l'a trouvée à plusieurs réprises sortant du problème des configurations, et j'en énoncérai quelques propriétés qui sont utiles pour la 2e partie.

α) Si $a_1\, a_2\, a_3$ est un triple périodique, il y a une autre homographie à l'indice 3, qui a les points $a_1\, a_2\, a_3$ comme points doubles et contient un triple périodique $d_1\, d_2\, d_3$.

β) Chaque triple périodique est de six manières homologique au triple des points doubles. Deux tels triples sont, l'un par rapport à l'autre, conjugués à soi-mêmes, de sorte que tout sommet a pour droite polaire le côté opposé, l'autre triple étant considéré comme courbe du 3e dégré.

γ) Deux triples périodiques d'une même homographie sont homologiques de trois manières et soit les centres soit les axes forment un nouveau triple de la même homographie *).

§ 2. — Courbes, qui sont transformées en soi-mêmes par une transformation linéaire **).

Une question essentielle dont l'étude se prête à des recherches variées d'Algèbre et d'Analyse concerne les courbes, qui sont réproduites par une transformation linéaire. Une courbe, n'étant pas du genre 0 ou 1, n'admet qu'un nombre fini de transformations, qui elles mêmes seront périodiques. La courbe est particularisée à partir du genre 2. Vu la grande importance du problème qui s'exprimerait ainsi: Trouver toutes les courbes d'un ordre n, qui se reproduisent par des transformations linéaires, je vais exposer une méthode pour dresser la forme litérale de toutes les courbes anallagmatiques dans une transformation donnée.

*) Je renvoie le lecteur au Mémoire: *Ueber die Configurationen* $(3,3)_8$ *und* $(3,3)_9$. Sitzungsber. der Wiener Akademie, 84 Bd., p. 915, et aussi à K. 4.

**) En langue francaise le mieux serait de se servir de la désignation: *anallagmatique*, pour caractériser ces courbes. En effet les courbes et surfaces que M. Moutard a désigné sous ce nom, se rangent dans la catégorie générale, étant transformées par des inversions. J'introduirai donc dans le suivant le nom « anallagmatique » dans ce sens général.

C'est dans ce travail qu'on trouvera indiquées aussi pour la première fois des courbes inaltérables, par une transformation de dégré supérieur. Comparez, p. e., le § 5 de la 2e partie.

Les transformations linéaires admettent la forme canonique

$$x_1 = \lambda x'_1 \quad , \quad x_2 = \lambda \varepsilon x'_2 \quad , \quad x_3 = \lambda \varepsilon^i x'_3 \, ;$$

ε désignant une racine de l'unité et i un nombre entier. L'équation d'une courbe anallagmatique prend la forme

$$\alpha x_1^m + \beta x_2^m + \gamma x_3^m + \ldots = 0 \, .$$

Par la transformation le premier terme se multiplie par λ^m, donc chaque terme doit se multiplier par $\lambda^m \varepsilon^{\mu n}$, μ étant un nombre entier et positif, et l'équation ne pourra contenir que les termes de cette forme

$$c x_2^\alpha x_3^\beta x_1^{m-\alpha-\beta} ,$$

qui se multiplient par $\lambda^m \varepsilon^\alpha \varepsilon^{\beta i}$, donc

$$\lambda^m \varepsilon^\alpha \varepsilon^{\beta i} = \lambda^m \varepsilon^{\mu n} ,$$

ou plus généralement

$$\alpha + \beta i \equiv r \bmod n \, .$$

Pour qu'une solution de cette congruence convienne à notre question, il faut que

$$\alpha \leqq m \quad , \quad \beta \leqq m \quad , \quad \alpha + \beta \leqq m \, .$$

Cela donne origine à divers types d'équations, en faisant parcourir à r toutes les valeurs de 0 à $m - 1$.

La variété des courbes qui se réproduisent par l'homographie donnée est immense, mais par cette méthode on parvient à trouver les courbes douées de la moindre particularisation qu'il faut et qui suffit, afin que la courbe soit transformée en soi-même par l'homographie. Il faut être attentif, dans l'application, entre autres à ces points de vue.

1. On obtient par cette méthode des courbes anallagmatiques sans aucune singularité.

2. On obtient toutes les particularisations possibles de ces courbes en supprimant les termes convenables dans l'équation de la courbe qui renferme toutes les solutions de la congruence déterminante.

3. En opérant géométriquement on doit distinguer les cas $m \gtreqless n$. C'est parce que les points communs de C_m et d'une droite double forment nécessairement des groupes homographiquement périodiques, en tant qu'ils ne se confondent avec les points doubles *).

4. Pour $i = n - 1$ on tombe sur un cas particulier, où tous les groupes homographiques sont distribués sur des coniques par $d_2 d_3$. Les courbes anallagmatiques d'or-

*) La considération géométrique est applicable à tous les cas; toutefois elle est pénible dans les cas compliqués.

dre n, qui appartiennent à cette transformation sont d'un intérêt spécial. Voici leur équation

$$a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + a_3 x_3^n + b_1 x_2 x_3 x_1^{n-2} + b_2 x_2^2 x_3^2 x_1^{n-4} + \ldots + b_{\frac{1}{2}(n-1)} x_2^{\frac{n-1}{2}} x_3^{\frac{n-1}{2}} x_1 = 0\,, \quad n \text{ impair}$$

et

$$a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + a_3 x_3^n + b_1 x_2 x_3 x_1^{n-2} + b_2 x_2^2 x_3^2 x^{n-4} + \ldots + b_{\frac{1}{2}n} x_1^{\frac{n}{2}} x_2^{\frac{n}{2}} = 0\,, \quad n \text{ pair}\,.$$

Je ferai observer que généralement:

Toutes les courbes d'ordre n, qui étant du même type litéral sont transformées en soi-mêmes par des transformations linéaires forment un système linéaire.

5. Par la discussion de la congruence fondamentale on trouve pour une valeur donnée de n une limite inférieure de m. Il peut donc arriver que des courbes d'ordre m, qui soient réproduites dans une homographie à l'indice $n > m$, n'existent pas. Pour terminer je citerai un théorème, qui est un cas particulier d'un autre plus général: Quand une courbe C_n $p > 1$ sans aucune singularité, c'est a dire la plus générale de son genre, admet une correspondance univoque interne, celle-ci doit être contenue dans une homographie du plan.

§ 3. — Homographies, qui peuvent transformer une cubique en soi-même.

En voici l'énumération complète:

I. Une courbe douée d'un rapport arbitraire des périodes est transformée en soi-même:

1. Par *9 homologies d'indice 2*, dont chacune a un point d'inflexion et sa polaire harmonique comme centre et axe d'homologie.

2. Par *8 homographies d'indice 3*, dont chacune appartient à un triangle d'inflexion comme triple double, et contient la série correspondante de triples d'inflexion.

II. On doit ajouter pour la courbe harmonique:

18 homographies d'indice 4, dont chacune possède deux points doubles sur la cubique C_3 elle-même. L'un d'eux est un point d'inflexion, l'autre le point de contact de la tangente menée du point d'inflexion et conjuguée harmoniquement à la tangente d'inflexion.

Afin d'en démontrer l'existence, la considération suivante nous peut servir. Soit $a_1 a_2 a_3 a_4$ un quadrangle complet. Les cubiques, qui sont tangentes respectivement en a_1, a_2, a_3, a_4 aux côtés $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, $a_4 a_1$ forment un faisceau. Deux courbes de ce faisceau sont $a_1 a_2 + a_2 a_4 + a_3 a_4$ et $a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_4$ donc le neuvième point base se trouve dans le point d'intersection d_1 de $a_2 a_4$ et $a_3 a_1$. Puisque a_2, a_4 sont les points tangentiels de a_1, a_3, le point tangentiel de d_1 tombe sur d_1, qui est un point d'inflexion pour toutes les courbes du faisceau. La polaire harmonique de ce point est selon les propriétés du quadrangle la droite, qui joigne $\delta_2 \equiv (a_1 a_2, a_3 a_4)$ à $\delta_3 \equiv (a_2 a_3, a_4 a_1)$: la même pour toutes les C_3. L'homographie d'indice 4 qui transforme a_1 en a_2 en a_3 en a_4 en a_1 a un point double en d_1, et les deux autres points doubles d_2, d_3 sur la droite $\delta_2 \delta_3$. Elle permute entre elles les cubiques du faisceau et en particulier elle reproduit les deux courbes qui passent en d_2 ou d_3. Pour une pareille courbe l'une des trois tangentes menées

par d_1 est invariable, les deux autres devront se permuter et la tangente à la cubique en d_1 est la seconde droite double. Ainsi les quatre tangentes menées à une telle cubique par un de ses points forment un faisceau harmonique. Les deux cubiques anallagmatiques sont donc harmoniques.

Et comme une courbe harmonique ne jouit plus d'invariant absolu, qui pourrait en causer des particularisations, l'homographie trouvée existe en général.

III. Au lieu de ces homographies *la courbe équianharmonique* admet:

1. *6 homologies d'indice 3.* Le centre et l'axe de chacune d'elles sont un sommet et le côté opposé du triangle Hessien.

2. *12 homographies d'indice 3,* dont chacune a pour triple des points doubles l'un des 6 triangles in-et circonscrits correspondant au triangle Hessien. Le triangle Hessien en est un triple périodique.

3. *18 homographies d'indice 6,* dont chacune a un point d'inflexion comme point double et les trois points sextactiques qui lui sont liés, comme triple périodique.

L'existence de ces homographies se vérifie, comme il suit (cf. § 4).

a) Par trois triples d'une homologie d'indice 3 on conduit des cubiques. Ce faisceau contiendra des cubiques transformées en soi-mêmes. Elles sont toutes équianharmoniques; en effet la droite qui joigne le centre au point commun de la droite et de l'axe a un triple périodique uniponctuel sur la cubique, et est par cela une tangente d'inflexion.

b) Si l'on conduit par trois triples d'une homographie d'indice 3 une cubique, celle-ci ne sera pas en général équianharmonique, mais elle se réproduit. Or je dis:

Si l'on fait passer par un triple donné $d_1\, d_2\, d_3$ de l'homographie des cubiques, qui soient in-et circonscrites dans un certain sens au triangle $a_1\, a_2\, a_3$ des points doubles, ce faisceau est composé de cubiques équianharmoniques et anallagmatiques pour l'homographie.

Soient les cubiques tangentes à $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_1$ en a_1, a_2, a_3. Puisque dans le faisceau on rencontre les courbes decomposées

$$a_1 a_2 + (d_1 d_2 d_3 a_2 a_3)^2$$

$$a_2 a_3 + (d_1 d_2 d_3 a_3 a_1)^2$$

$$a_3 a_1 + (d_1 d_2 d_3 a_1 a_2)^2 ,$$

qui sont anallagmatiques, cela est donc vrai pour toutes les courbes du faisceau. Les tangentes par a_1 relatives a une pareille courbe sont transformées entre soi-mêmes par l'homographie, et l'une d'elles étant double les autres forment un triple périodique et les quatre tangentes constituent un quadruple équianharmonique c, q, f, d. Une cubique équianharmonique étant dépourvue de paramètres variables, il faut que toute courbe de cette espèce admette cette transformation homographique.

c) Si $d_1\, d_2\, d_3$ sont les points doubles d'une homographie d'indice 6, et $d_2\, d_3$ est la droite, qui porte des triples périodiques, dont $a_1\, a_2\, a_3$ soit un quelconque, il existe un faisceau de cubiques, qui ont en d_1 un point d'inflexion et sont tangentes à $d_1 a_1$, $d_1 a_2$, $d_1 a_3$ en a_1, a_2, a_3; la tangente d'inflexion est $d_1\, d_2$, si d_2 porte l'homographie d'indice 2.

Toute courbe de ce faisceau est anallagmatique, ce que l'on conclût de l'involution produite sur $d_1\, d_3$.

IV. Dans cette recherche *les cubiques rationnelles* sont à considérer comme dégénérations, la cubique à point double se déduisant de la courbe harmonique, la cubique à rébroussement de la courbe équianharmonique. Mais on prouve aussi directement que

1. C_3^4 admet: 3 homologies d'indice 2 appartenant aux trois points d'inflexion comme centres; 1 homographie d'indice 3, qui a le seul triangle d'inflexion (impropre) comme triple double; 6 homographies d'indice 4. Ces dernières permutent ensemble les deux tangentes du point double, et chacune deux certains points d'inflexion tandis que le troisième est inaltérable.

2. C_3^3 admet une infinité d'homographies, toutes ayant le point de rébroussement, le point d'inflexion et leurs tangentes pour éléments doubles.

Je vais illustrer la méthode introduite dans le § 2 par un exemple, en l'appliquant à la recherche de toutes les cubiques, qui sont anallagmatiques dans quelque homographie périodique.

Pour $n=2$ on a $\alpha+\beta\equiv r$, mod. 2:

$$\begin{array}{l|l} r=0 & \alpha=0\,,\beta=0\ ;\ \alpha=0\,,\beta=2\ ;\ \alpha=1\,,\beta=1\ ;\ \alpha=2\,,\beta=0\ ; \\ r=1 & \alpha=0\,,\beta=1\ ;\ \alpha=0\,,\beta=3\ ;\ \alpha=1\,,\beta=0\ ;\ \alpha=1\,,\beta=2\ ;\ \alpha=2\,,\beta=1\ ;\ \alpha=3\,,\beta=0\,. \end{array}$$

De là on tire ces équations

$$x_1^3+x_2x_3x_1+x_2^2x_1+x_3^2x_1=x_1(x_1^2+x_2^2x_3+x_2^2+x_2x_3)=0$$

et

$$x_3x_1^2+x_3^3+x_2x_1^2+x_2x_3^2+x_2^2x_3+x_2^3=0\,.$$

La séconde pourvue de coefficients représente une courbe, qui dans $x_2=0$, $x_3=0$ a un point d'inflexion.

Pour $n=3$ on a $\alpha+2\beta\equiv r$ mod. 3, quand il s'agit d'homographies propres:

$$\begin{array}{l|l} r=0 & \alpha=0\,,\beta=0\ ;\ \alpha=0\,,\beta=3\ ;\ \alpha=1\,,\beta=1\ ;\ \alpha=3\,,\beta=0 \\ r=1 & \alpha=0\,,\beta=2\ ;\ \alpha=1\,,\beta=0\ ;\ \alpha=2\,,\beta=1\ ; \\ r=2 & \alpha=0\,,\beta=1\ ;\ \alpha=1\,,\beta=2\ ;\ \alpha=2\,,\beta=0\,. \end{array}$$

Les équations

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1x_2x_3=0$$

$$x_1x_3^2+x_2x_1^2+x_3x_2^2=0 \quad ; \quad x_3x_1^2+x_2x_3^2+x_1x_2^2=0\,;$$

représentent des cubiques dont l'une a $d_1\, d_2\, d_3$ comme triangle Hessien, les deux autres sont équianharmoniques et in-et circonscrites à $d_1 d_2 d_3$. Le determinant Hessien conduit à un triple conjugué par rapport à $d_1\, d_2\, d_3$.

Pour $n=3$, quand il s'agit d'homologies, on a $\alpha+\beta\equiv r$, mod. 3.

$r=0$	$\alpha=0, \beta=0$; $\alpha=0, \beta=3$; $\alpha=1, \beta=2$; $\alpha=2, \beta=3$
$r=1$	$\alpha=0, \beta=1$; $\alpha=1, \beta=0$;
$r=2$	$\alpha=0, \beta=2$; $\alpha=1, \beta=1$; $\alpha=2, \beta=0$.

La seule courbe propre dérive de l'équation

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_2x_3^2+x_3x_2^2=0,$$

courbe équianharmonique, bien qu'elle ne soit pas rapportée au triangle Hessien. Le point $x_2=0$, $x_3=0$ est un sommet et $x_1=0$ un côté du triangle Hessien.

Pour $n=4$ on a $\alpha+3\beta\equiv r$ mod. 4.

$r=0$	$\alpha=0, \beta=0$; $\alpha=1, \beta=1$
$r=1$	$\alpha=0, \beta=3$; $\alpha=1, \beta=0$;
$r=2$	$\alpha=0, \beta=2$; $\alpha=2, \beta=0$; $\alpha=3, \beta=1$;
$r=3$	$\alpha=0, \beta=1$; $\alpha=1, \beta=2$; $\alpha=3, \beta=0$.

La dernière solution donne

$$x_3x_1^2+x_2x_3^2+x_1x_2^2=0,$$

équation qui, pourvue de coefficients arbitraires, représente une cubique harmonique. Elle a le point $x_3=0$, $x_1=0$, et la droite $x_3=0$ pour point et tangente d'inflexion et est tangente à la droite $x_2=0$ en $x_1=0$, $x_2=0$. La droite $x_1=0$ la rencontre en outre dans un couple de points harmoniquement séparés par $x_2=0$, $x_3=0$. Tout cela s'accorde avec ce que nous avons trouvé géométriquement.

Pour $n=5$ les deux cas $\alpha+\beta\equiv r$ mod. 5 et $\alpha+2\beta\equiv r$ mod. 5 ne donnent aucune solution.

Pour $n=6$ la congruence $\alpha+\beta\equiv r$, mod. 6, fournit,

$r=0$	$\alpha=0, \beta=0$;
$r=1$	$\alpha=0, \beta=1$; $\alpha=1, \beta=0$;
$r=2$	$\alpha=0, \beta=2$; $\alpha=1, \beta=1$; $\alpha=2, \beta=0$
$r=3$	$\alpha=0, \beta=3$; $\alpha=1, \beta=2$; $\alpha=2, \beta=1$; $\alpha=3, \beta=0$;

$\alpha+2\beta\equiv r$, mod. 6:

$r=0$	$\alpha=0, \beta=0$; $\alpha=0, \beta=3$;
$r=1$	$\alpha=1, \beta=0$;
$r=2$	$\alpha=0$; $\beta=1$; $\alpha=2, \beta=0$;
$r=3$	$\alpha=1, \beta=1$; $\alpha=3, \beta=0$;

$\alpha + 3\beta \equiv r$, mod. 6:

$r=0$	$\alpha=0$, $\beta=0$; $\alpha=0$, $\beta=2$
$r=1$	$\alpha=1$, $\beta=0$; $\alpha=1$, $\beta=2$
$r=2$	$\alpha=2$, $\beta=0$;
$r=3$	$\alpha=0$, $\beta=1$; $\alpha=0$, $\beta=3$ $\alpha=3$, $\beta=0$.

Voici donc une seule cubique anallagmatique

$$x_2^3 + x_3^3 + x_3 x_1^2 = 0 ;$$

elle est équianharmonique et a le point d'inflexion $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_1 = 0$ pour polaire harmonique correspondante.

§ 4. — Faisceaux de courbes transformés en soi-mêmes.

Si l'on a deux courbes, dont la forme litérale a été établie par la même congruence du § 2, et qui diffèrent entre elles par les valeurs de leurs coefficients, par combinaison linéaire on en peut engendrer une courbe nouvelle qui possède la même composition litérale et sera par suite réproduite par la même homographie. Les deux courbes donnent ainsi origine à un faisceau dont chaque courbe se transforme en soi-même.

Un principe encore plus utile est le suivant: Si un faisceau de courbes doit être transformé en soi-même, il faut que la base du faisceau soit complètement transformée en soi-même, savoir qu'elle se compose de cycles et de points doubles de l'homographie. De là je tire l'énoncé suivant de la règle la plus générale pour la construction de faisceaux anallagmatiques:

Quand on prend un certain nombre de cycles de l'homographie périodique et on ajoute des multiplicités dans les trois points doubles, de sorte que le nombre $\frac{1}{2}$ m (m + 3) — 1 *pour les points déterminants soit atteint sous la condition que ces points ne forment pas un « groupe spécial », on aura fixé un faisceau de courbes de l'ordre* n, *qui sera transformé en soi-même. Les points base restants seront de même des cycles ou des points doubles.*

Laissant de côté les applications, je me propose ici de faire la discussion complète des faisceaux de cubiques, parceque des récherches analogues seront importantes pour la 2ᵉ partie:

a) Dans une homologie harmonique on fait passer par quatre paires de points un faisceau de cubiques. Le neuvième pivot est le centre d'homologie, attendu que quatre fois on peut composer une C_3 d'une droite et d'une conique. Le centre est un point d'inflexion commun et l'axe en est la polaire harmonique.

b) Le faisceau le plus général anallagmatique pour une homologie d'indice 3 est déterminé par trois triples périodiques. Toutes les cubiques sont équianharmoniques et anallagmatiques. Voir § 3, III.

c) Dans une homographie d'indice 3, trois triples déterminent une seule cubique; pourvu qu'ils ne forment pas une configuration de l'éspèce découverte par MM. Schröter et Rosanes, et qui se trouve designée dans un Mémoire déjà cité par

(A). Trois pareils triples sont deux à deux trois fois homologiques. Toute courbe du faisceau se réproduit séparément. Un cas particulier a été décrit au § 3, III.

d) Dans une homographie *d'indice* 4 deux cycles déterminent un faisceau dont le neuvième pivot est le point double, où les quatre diagonales se croisent. Les courbes sont transformées involutivement entre elles. Toutes les courbes ont en d_1 une inflexion et il y en a deux, qui se réproduisent isolément. Elles passent chacune par un autre point double et sont courbes harmoniques. Ce faisceau est une généralisation de celui qui a été décrit et appliqué dans le § 3, II.

Une autre base se compose d'un groupe périodique, des trois points doubles $d_1 d_2 d_3$, et du point infiniment voisin à d_1 sur la droite $d_1 d_2$. Le neuvième pivot est le point infiniment voisin à d_2 sur la droite $d_2 d_3$. Ces courbes C_3 sont donc transformées entre elles à l'indice 4.

Si l'on choisissait pour le huitième point base, le point infiniment voisin à d_2 sur la droite $d_2 d_1$, toutes les courbes se décomposeraient en une conique fixe et un faisceau de droites par d_1.

Un troisième faisceau est déterminé par un groupe périodique, un couple involutif dans $d_2 d_3$, un point infiniment voisin à d_1 sur $d_3 d_1$ et d_2.

e) Un cycle *à cinq* points est toujours sur une conique passant par deux points doubles, soit $d_2 d_3$. Alors il y a trois manières de complèter la base:

1. d_2, d_1 et un contact en d_1 avec $d_1 d_3$. *Ce contact dévient pour toutes les courbes un contact triponctuel.*

2. d_2, d_1 et un contact en d_1 avec $d_1 d_2$. Toutes les courbes auront un contact en d_2 avec $d_2 d_3$.

3. Un contact triponctuel en d_2 avec $d_2 d_3$ aménera un contact quadriponctuel entre toutes les courbes du faisceau.

Chacun de ces trois faisceaux contient la courbe anallagmatique, qui a d_1 comme point de rébroussement et un contact triponctuel avec $d_2 d_3$ en d_2.

f) Un cycle *à six* points est situé ou dans une conique on dans deux droites par le même point double d_k. Dans le premier cas on complète la base du faisceaux par un contact triponctuel dans le troisième point double avec une droite double; dans le second cas on ajoute soit d_k avec un contact triponctuel avec $d_k d_l$ ou $d_k d_i$, soit les points $d_k d_l$ avec un contact biponctuel en d_k avec $d_k d_i$, en désignant par $d_i d_l$ respectivement les points doubles aux indices 3 et 6.

g) Pour *l'indice* 7 la seule combinaison des ε, qui n'est pas à rejéter est ε, ε^2, ε^4, ε désignant une racine primitive du dégré 7. Par cela un certain ordre est établi parmi les points doubles. Il existe ici un faisceau dont toutes les courbes passent par un des trois points doubles; elles y sont tangentes à la droite dirigée vers le point double successif et contiennent en outre un cycle de 7 points. Les cubiques sont transformées à l'indice 7, les deux cubiques inaltérables sont deux cubiques à rébroussement.

h) L'indice 8 démande nécessairement, que le groupe périodique soit situé ou sur deux droites ou sur une conique ou bien que les ε soient ε, ε^3, ε^5.

Dans ce dernier cas un faisceau a pour base un groupe périodique et le point double doué du rapport anharmonique ε^2. Ce dernier point est un point d'inflexion commun et les courbes sont permutées à l'indice 4.

i) L'indice 9 n'admet aucun faisceau anallagmatique.

§ 5. — Une classe remarquable de transformations un-multivoques.

On sait, que les cycles d'une homographie périodique binaire forment des groupes d'une involution qui a la propriété de posséder deux éléments n-tuples. Une chose analogue a lieu dans le champ ternaire, savoir:

Les groupes périodiques d'une homographie ternaire forment, bien que leurs points ne soient liés symmétriquement entre eux, une division du plan en groupes univoques.

Quelques fois on est conduit au problème, d'établir une relation entre un plan E et un autre plan E', de sorte qu'aux points E' correspondent des groupes périodiques dans E *). Lorsqu'il ne s'agit que de cette correspondance, les relations internes d'un groupe n'ont pas d'interêt. Voici le procès plus général qui conduit à une pareille relation:

Cherchez un faisceau de courbes, dont chacune se reproduise, cherchez un autre faisceau de courbes jouissant de la même propriété et qui, relativement au premier faisceau, soit dans telle position, que deux courbes quelconques des deux faisceaux ne se coupent qu'en un seul cycle et faites correspondre ces deux faisceaux à deux faisceaux de droites de E' *et au point d'intersection de deux rayons de* E' *le cycle où se rencontrent les courbes correspondantes des deux faisceaux de* E.

Les seules difficultés proviennent de la condition, que les courbes des faisceaux ne se rencontrent que dans un seul groupe variable, tandis que pour remplir les autres nous n'avons qu'à faire usage de la méthode exposée dans le § 2. Cependant on a le théorème suivant:

C'est impossible de trouver deux faisceaux de l'éspèce demandée et de manière qu'aucune des deux bases ne contienne des points doubles de l'homographie.

Sans entrer dans la théorie générale de cette classe de transformations, je vais en décrire quelques unes qui se présentent à l'occasion de différentes recherches en géometrie.

1. Soit donnée une homologie d'indice n. Les rayons par le centre et d'autre part les groupes de rayons dont le sommet se trouve sur l'axe représentent deux faisceaux de l'espèce demandée. À ceux-ci correspondent deux faisceaux de droites dans E'. Les sommets des premiers soient d_1, d_2, ceux des autres d'_1, d'_2.

C'est la supposition la plus générale. Car aux deux faisceaux de E doivent correspondre dans E' deux faisceaux de courbes rationnelles. Si par une transformation de Cremona on change l'un en un faisceau de droites, les courbes de l'autre déviennent en même temps nécessairement des courbes du $n^{ième}$ dégré ayant le sommet des droites comme point $(n-1)$ tuple. Par une transformation de Jonquières on arrivera enfin à un plan E' avec deux faisceaux de droites.

Au rayon n-tuple $d_1 d_2$ correspondent deux droites δ_1, δ_2 par d'_1, d'_2. Cela posé à une droite de E correspond dans E' une courbe d'ordre $n+1$ qui a d'_2 pour un point n-tuple, un contact n-ponctuel avec une certaine droite par d'_1; le point de contact variable, et passe par le point d'_1. Les points d_1, d_2 sont fondamentaux et ont respectivement δ_2, δ_1 pour courbes fondamentales.

*) On obtient une transformation de cette nature, lorsque on fait correspondre les points de E aux groupes de n^2 points de toutes les configurations cycliques rapportées au même triple $d_1\, d_2\, d_3$. Voir K. 4.

*

La courbe correspondante à une droite de E′ est d'ordre $n+1$, passe simplement par d_1 et n points déterminés, allignés avec d_1. Les points d'_1, d'_2 sont fondamentaux, ayant n rayons par d_2 et un rayon par d_1 pour leurs courbes fondamentales.

2. Une homographie possédant des coniques transformées en soi-mêmes soit objet de la recherche. Ces coniques passent par d_2, d_1 et l'homographie sur chacune d'elles est contenue dans une homographie entre les droites par d_1. Le faisceau des groupes de ces droites et le faisceau des coniques servent à établir une transformation en leur faisant correspondre deux faisceaux de droites dans E′.

On peut la déduire du cas précédent, en transformant tout le plan E par une transformation quadratique, qui ait pour points principaux d_1 et deux points infiniment rapprochés à d_2 sur la droite $d_2 d_3$.

Quand d'autre part on fait correspondre les deux faisceaux de E′ à un faisceau analogue de coniques et à un faisceau concentrique de rayons on obtient l'affinité particulière, qui a été rencontrée incidemment à propos d'une recherche sur les transformations quadratiques dans le Mémoire K. 3. J'emprunte de là les caractères principaux de cette affinité pour n impair.

Aux droites de E′ correspondent des courbes d'ordre n qui possèdent en d_1 un point $(n-1)$ tuple, dont les tangentes coincident $\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$ avec $d_1 d_2$ et $d_1 d_3$. Chacune des ces courbes possède n autres points d'inflexion, qui tombent sur la droite $d_2\, d_3$ et forment sur cette droite un groupe homographiquement cyclique, d_2, d_3 étant les éléments doubles.

Aux droites de E correspondent dans E′ des courbes d'ordre n, qui ont d'_2, d'_3 pour points $\frac{n-1}{2}$ tuples, dont les tangentes coincident avec $d_2 d_1$, $d_3 d_1$. Outre cela chaque branche a un contact $\frac{n+1}{2}$ ponctuel avec sa tangente. Pour la réduction de la classe et du genre, cela fait que d'_2 ainsi que d'_3 comptent pour $\frac{1}{2}(n-3)$ points doubles de plus.

3. Soit proposée une homographie d'indice 3. Suivant le § 4 on sait construire un réseau de courbes d'ordre 3, auxquelles ∞^1 triples de cette homographie sont inscrits. Ce sont les courbes équianharmoniques, in-et circoscrites dans un même sens au triangle des points doubles.

En effet chaque courbe équianharmonique qui contient un point du plan contient aussi les deux autres qui forment avec lui un triple conjugué par rapport au triangle double; de manière qu'une seule cubique passe par deux triples périodiques. Ce réseau de cubiques, fait correspondre à un réseau de droites, donne lieu à notre transformation. Par là aux droites de E correspondent des cubiques à un point double variable dans E′ et qui possèdent aussi un triple tangentiel fixe.

4. La même homographie peut être utilisée d'une seconde manière, en construisant comme dans le numero 2 l'affinité pour $n=3$.

Rélativement à une méthode fondée sur l'application de ce paragraphe, comparez le § 5 de la quatrième partie.

II^de Partie

TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES PÉRIODIQUES

§ 1. — Caractères généraux. Premier principe pour la discussion.

Une transformation quadratique sera appelée périodique à l'indice n, si chaque point se confond avec son $n^{ième}$ transformé. Cela n'empêche pas, qu'il y ait des points isolés ou une infinité de points, qui coincident déjà avec leurs $f^{ièmes}$ transformés, où f est un facteur de n. Une telle transformation donne origine à des groupes de points, qui peuvent être comparés aux groupes homographiquement cycliques, qu'on connait déja (Voir la Ier partie), quoique ils en diffèrent et n'y soient réductibles que dans peu de cas.

1. Le nombre des groupes cycliques contenus dans chaque transformation est déterminé et il reste à chercher la condition pour que se présente un groupe de plus. Par cela sera engendrée une infinité de pareils groupes, qui rempliront une certaine courbe. Quand un groupe apparaît au surplus, qui ne soit pas nécessairement lié à cette courbe anallagmatique *), tout le plan sera transformé périodiquement. Cette manière de traiter le problème conviendrait pleinement à sa nature de problème de clôture (« problema di chiusura, Schliessungs-problem »).

2. Au lieu de l'application immédiate de cette méthode, un autre point de vue plus fécond et plus commode se prête à la recherche géometrique. Il consiste à trouver une position mutuelle des deux triples principaux, de façon que la péridiocité demandée apparaisse. Plus précisément: on cherchera d'obtenir par la position des deux triples, que la transformation quadratique après n opérations successives devienne une homographie et, s'il y a lieu on s'efforcera ultérieurement d'en faire une identité.

Une transformation quadratique est complètement donnée par les deux triples principaux et un couple de points correspondants pp'. Mais puisque entre les triples principaux doit aussi exister une transition au moyen de la transformation, l'indétermination du couple pp' suffira pour faire entrer un point quelconque dans une chaîne périodique, mais il ne suffira pas pour effectuer la périodicité de toute la transformation.

Ainsi s'explique-t-il pourquoi ce principe général est la base de toute notre théorie:

Pour la périodicité d'une transformation quadratique il faut, que tous les points principaux du premier système coincident avec des points principaux du second système ou que par les transformations successives appliquées à leurs positions dans le second système ils arrivent aux points principaux de ce système.

3. Envisageons les rayons par quelqu'un des quatre points doubles de la transformation. Ils se transforment en des coniques par le même point double et les tangentes

*) L'idée s'éclaircit par l'exemple du point double, qui dans une transformation involutive du dégré 17 existe à l'extérieur de la courbe, lieu de points doubles.

de ces coniques se transforment réciproquement en des coniques, qui sont tangentes aux rayons du premier système. Entre les rayons du point double résulte ainsi une homographie, qui pour les transformations périodiques sera périodique. Voilà une condition, qui sous des circonstances favorables pourra être substituée avantageusement à une condition moins praticable.

Aux rayons da, db, dc correspondent les coniques décomposées da', $b'c'$; db', $c'a'$; dc', $a'b'$, qui ont en d les tangentes da', db', dc'. Pourtant cette condition prend la forme nouvelle:

Dans chaque point double d *d'une transformation quadratique périodique l'homographie determinée par les droites* d (aa', bb', cc') *est nécessairement périodique.*

4. Il y a toujours un couple involutif de points $y_1 y_2$. Si ce couple est propre *), une droite par y_1 est transformée en une conique par y_2, qui admet dans y_2 une certaine tangente. Chaque courbe, qui est tangente à la première droite en y_1 se transforme en une courbe tangente à la seconde droite en y_2. De cette manière une homographie résulte entre les deux faisceaux y_2, y_1. Réciproquement les rayons du premier système par y_2 donnent origine à une autre homographie analogue. À ces deux homographies correspondent deux coniques directives par y_1, y_2.

La première conique contient les points d'intersection de

$$y_1 a \;,\; y_2 a' \quad ; \quad y_1 b \;,\; y_2 b' \quad ; \quad y_1 c \;,\; y_2 c' \;, \qquad D_1 ;$$

la seconde ceux de

$$y_2 a \;,\; y_1 a' \quad ; \quad y_2 b \;,\; y_1 b' \quad ; \quad y_2 c \;,\; y_1 c' \;, \qquad D_2 .$$

La transformation étant périodique, on observera ce qui suit: Ménant une droite par y_1 jusqu'à l'intersection avec D_1, joignant ce point à y_2 prolongeant cette droite jusqu'à D_2 et continuant à procéder ainsi, la figure construite sera fermée. Cette condition s'exprime sous la forme suivante:

S'il y a une transformation quadratique périodique aux points principaux $a\ b\ c$ et $a'\ b'\ c'$ qui possède un couple involutif en $y_1\ y_2$, il y aura aussi une transformation quadratique périodique, qui possède deux paires de points principaux conjugués coincidents en croix dans y_1, y_2 et transformant $a\ b\ c$ en $a'\ b'\ c'$.

5. Comme je me suis proposé dans l'introduction, je pense de donner dans ce Mémoire une *énumeration détaillée et une étude de toutes les transformations quadratiques périodiques*, en faisant usage du principe énoncé ci-haut. Au surplus j'indiquerai complètement, quelles soient les transformations déductibles d'autres plus simples par des méthodes le plus appropriées à notre objet, et quelles soient celles d'existence indépendante.

Dans l'étude des transformations individuelles il faut surtout se tenir aux points de vue suivants:

1. Combien de données et quelles sont nécessaires pour déterminer suffisamment une transformation périodique?

2. Comment peut-on construire une transformation d'un caractère déterminé?

3. Comment se comportent les points doubles relativement aux homographies des faisceaux, dont ils sont les sommets?

*) Comparez pour cette dénomination la IVe partie.

4. Comment se comporte le couple involutif?

5. Y a-t-il des groupes d'un nombre plus mince de points que l'indice de la transformation et quel est leur lieu?

6. Trouver les courbes, qui sont transformées en soi-mêmes par la transformation quadratique.

7. Trouver les faisceaux de courbes, qui sont transformés en soi-mêmes.

8. Une remarque analogue à celle que je viens de faire au commencement du § 5, Ire partie, se rapporte aux groupes cycliques ressortants de transformations supérieures. On peut envisager le problème ainsi:

Établir des rélations entre deux plans E, E', par lesquelles aux points individuels de E' correspondent les groupes d'une transformation supérieure périodique.

Note.—Je désignerai avec Q^2 ou T^2, dans ce qui suit, une transformation quadratique, selon que la transformation aura lieu dans le même plan ou entre deux plans differents. L'ensemble de tous les enchaînements des points fondamentaux sera appelé *la caractéristique de la transformation.*

Ire Section.

§ 2. — Les caractéristiques sans coincidences a' en a, b' en b, c' en c.

Avant d'entreprendre la solution du problème général, j'avais restreint la recherche à ce cas le plus symétrique. Les conclusions suivantes et leurs résultats pourront prouver l'importance d'une étude spéciale de toutes les formes périodiques, dont l'existence sera démontrée dans ce travail.

1. Supposons donnés les points a, a', b, b', c et que a' se transforme en a. Par un point quelconque du plan pris comme c' les triangles principaux et une paire de points correspondants seront donnés et la transformation sera déterminée.

Aux ∞^2 positions de c' correspondent ∞^2 positions de b'_1 et il n'y aura donc qu'un nombre fini de points c', qui jettent b'_1 sur un point donné. Cherchons à construire l'affinité entre c' et b'_1.

2. Les faisceaux de droites en a, a' sont homographiques de manière, que

$$ac \text{ et } a'b' \quad , \quad ab \text{ et } a'c' \quad , \quad aa' \text{ et } a'a \, ,$$

se correspondent. La conique directive D_a se décompose donc en aa' et une droite, qui passe par les points d'intersection k, l de ac, $a'b'$ et ab, $a'c'$. Cette droite variable autour de k sera appelée π. Les droites ab' et $a'b'_1$ devant se couper dans un point d sur π, on aura une droite pour déterminer b'_1.

Soient m, n, o les points d'intersection

$$bc \, , \, b'a' \quad ; \quad ba' \, , \, b'a \quad ; \quad ba \, , \, b'c' \, ;$$

la conique directive D_b contient b, b', m, n, o. Toutes les coniques D_b forment le faisceau $mnbb'$. La tangente en b' à une D_b, qui dérive d'une position de c', rencontre la droite $a'd$ en b'_1.

3. Quand c' se meut sur $a'l$, d et par suite aussi $a'd$ restent invariables. Le point o décrit une série homologique aux c', et puisque le point o est situé sur la conique D_b, qui lui correspond, la série c' est rapportée homographiquement au faisceau D_b et aussi au faisceau de leurs tangentes en b' et à la série décrite par ces tangentes sur la droite $a'd$, c'est-à-dire à la série b'_1.

Partant inversément du point b'_1 on retrouve facilement le point c'. On joigne b'_1 à b', on construit le point d'intersection o de ab avec la conique D_b désormais déterminée qui contient $bb'mn$ et est tangente en b' à $b'b'_1$, on tire enfin la droite $b'o$. D'autre part on joigne $b'_1 a'$, on cherche le point de rencontre d de $b'_1 a'$ et ab'; ensuite kd et ab se rencontrent en l, dl et $b'o$ en c'.

Selon ce que nous avons dit, les rayons en a' sont liés homographiquement entre eux, ainsi que

$$a'b' , a'b' \quad ; \quad a'a , a'a \quad ; \quad a'b , a'(kb , ab') ,$$

de (c') à (b'_1) se correspondent.

Si c' se meut sur une droite passant en b', b'_1 demeure sur une autre droite par b'. L'homographie ainsi produite entre les rayons de b' contient les paires

$$b'a , b'a \quad ; \quad b'a' , b'a' \quad ; \quad b'b , b'\beta ,$$

ou β est le point d'intersection de ab avec la droite, qui joigne a' au point $(b'n , bm)$.

Or si c' se meut sur une droite arbitraire, la série est projetée des centres a' et b' par deux faisceaux, auxquels de c' vers b'_1 correspondent deux autres faisceaux homographiques, où $a'b'$ se correspond aussi lui-même. Ces nouveaux faisceaux se rencontrent sur une droite, lieu de b'_1. Ainsi :

L'affinité entre c' *et* b'$_1$ *est une homographie, qui a ses points doubles dans* a , a' , b'.

4. Quelques couples particuliers sont interessants:

À quel point c' *correspond le point* c *pris comme* b'$_1$? En voici la construction: $a'c$ et ab' se rencontrent en d, kd et $a'b$ en l. Ensuite $a'b$ et cb' se coupent en δ, δk et mn en y, $a'l$ et $b'y$ dans le point cherché r_1.

À quel point b'$_1$ *correspond* b *pris comme* c'? Les droites ab' et kb se rencontrent en f, mn et bb' en y, ab et $a'b'$ en h, yh et $a'b$ en δ, et enfin $b'\delta$ et af dans le point cherché.

À quel point c' *correspond* b *pris comme* b'$_1$? Les droites kn et ab se rencontrent en ρ, mn et ab en ω, $b'\omega$ et $a'\rho$ dans le point cherché (c').

5. En rétenant les conditions linéaires trouvées tout à l'heure pour le point (c'), je fais varier le point c, afin de poursuivre la dépendance du point (c'). Les constructions montrent à l'instant, que l'affinité est univoque. Quand c se meut sur une droite par a, (c') reste sur $a'\rho$ et si c se meut sur bm, (c') reste sur la droite $b'\omega$. Par la première homographie au rayon ab correspond le rayon $a'b'$, puisque alors k et ρ coincident avec $(ab , a'b')$. Dans la seconde homographie au rayon ab correspond le rayon $a'b'$, m et ω coincidant alors avec $(ab , a'b')$. Or quand c parcourt une droite arbitraire, selon les conclusions faites tout à l'heure on obtiendra pour les points (c') deux faisceaux homologiques aux sommets a' et b' et comme lieu de (c') une droite. Aux rayons aa', ab',

ab' correspondent les rayons $a'b$, $a'b'$, $a'a$ et aux rayons ba, ba', bb' les rayons $b'a'$, $b'b$, $b'a$; donc :

Les points c *et* (c') *sont liés par une homographie, qui fait correspondre* a *à* a' *à* b *à* b' *à* a.

Ainsi il s'ensuit le théorème suivant:

Lorsqu'une transformation quadratique transmet a' *à* a, b' *à* b, *il existe une homographie périodique à l'indice* 4, *qui conduit* a *en* a' *en* b *en* b' *en* a *et le point* c *en* c'. De là immédiatement:

S'il y a une transformation quadratique a' en a, b' en b, c' en c il y a trois homographies, qui enchaînent deux couples des points principaux en ordre cyclique et lient ensemble le troisième couple. Deux de ces homographies entraînent forcément la troisième.

6. Avant d'aller plus loin, je démontrerai que la caractéristique en question est effectivement périodique. Les transformations successives sont:

	Droite en
C_2	$a'b'c'$
C_4	$a'^2 b'^2 c'^2 abc$
C_5	$a^2 b^2 c^2 a'^2 b'^2 c'^2$
C_4	$a^2 b^2 c^2 a'b'c'$
C_2	abc
	Droite.

La droite aa' est transformée en elle-même, la droite ab' en $a'b$ en $b'a$ et de même ac' en $a'c$ en $c'a$, une droite quelconque par a en

une droite par a', en C_2 par $a'b'c'a$, en C_3 par $abc\,a'^2 b'c'$, en C_3 par $a'b'c'\,a^2 bc$ en C_2 par $a'bca$ en une droite par a.

Entre les droites par a et leurs dernières transformées existe une homographie qui ayant trois coincidences est une identité; on conclut analoguement pour b et pour c et de là pour tous les points du plan, c, q, f, d.

7. Les conditions trouvées dans le n.° 5 s'expriment sous une autre forme. Les points d'intersection

$$\left.\begin{matrix} ab\ ,\ a'c' \\ ac\ ,\ a'b' \\ ab'\ ,\ a'c \\ ac'\ ,\ a'b \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} bc\ ,\ b'a' \\ ba\ ,\ b'c' \\ ba'\ ,\ b'a \\ bc'\ ,\ b'c \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} ca\ ,\ c'b' \\ cb\ ,\ c'a' \\ ca'\ ,\ c'a \\ cb'\ ,\ c'b \end{matrix}\right\}$$

doivent être allignés et les trois droites sont, avec aa', bb', cc' les coniques de direction pour les points principaux aa'; bb'; cc'.

Ce tableau s'exprime autrement ainsi:

Lorsqu'on forme les triangles des points

$$(ab' , a'b) \quad , \quad (bc' , b'c) \quad , \quad (ca' , c'a) , \tag{1}$$

et le triangle des trois droites

$$(ab , a'c')(ac , a'b') \;;\; (bc , b'a')(ba , b'c') \;;\; (ca , c'b')(cb , c'a') ; \tag{2}$$

les deux triangles doivent être identiques. Chaque droite de (2) et le point correspondant de (1) seront côté et sommet opposés.

D'après un théorème, qui se trouve dans le Mémoire K. 2, on peut arriver immédiatement aux resultats du n.° 8. Toutefois raisonnons directement.

8. Le rayon aa' se correspond lui-même. Il contient donc deux points doubles tandis que l'axe de direction appartenant à a, passe par les deux autres points doubles. Aux trois couples de points principaux correspondent ainsi trois couples de droites et celles-ci forment un quadrangle complet, les points doubles étant en nombre de 4. Les points aa' ne seront pas situés sur le côté opposé de b , b' ou c , c', car étant dans l'axe de direction de bb' ou cc', ils devraient se confondre. Par suite:

Les deux triangles abc , $a'b'c'$ sont homologiques au centre s. Par rapport à la conique, dont ils sont deux triangles polaires réciproques, les deux triangles identiques (1) (2) forment un triangle conjugué.

D'autre part se rencontrent

$$\begin{array}{lll} ab' \;,\; a'b & \text{sur} & cc' \\ bc' \;,\; b'c & \text{sur} & aa' \\ ca' \;,\; c'a & \text{sur} & bb' . \end{array}$$

Donc les deux triangles abc , $a'b'c'$ doivent être homologiques de quatre manières.

9. Pour construire deux pareils triangles on peut prendre librement $abcs$, fixer a' et construire $b'c'$. Toutefois la position quatre fois homologique de abc à $a'b'c'$ ne suffit point à effectuer l'identité des triangles du n.° 7.

Je fais varier a' sur as et je tiens fixe l'axe d'homologie, qui appartient à s. Les droites $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ passent respectivement en des points fixes $\alpha\beta\gamma$ sur bc , ca , ab, les points d'intersection de ces trois droites avec la polaire de s par rapport au triangle abc. Ainsi la position quatre fois homologique ne sera pas altérée.

Le point d'intersection t de ab' , $a'b$ est sur sc et décrira une série homographique à la série par a'. Les droites $a'b$, $a'c$ coupent les droites ac , ab en deux points, qui sont situés dans une droite ρ. Or il est démandé d'effectuer, que ρ passe en t. La droite ρ passant constamment par α, marque sur la droite sc une série de points k homographique à celui de a', homographique donc aussi à la série des points t. Ici on peut continuer par un calcul, qui sera facilité en prenant un triangle équilatère abc dont s soit le

*) Cf. Schröter M. A, Bd. II, und Kantor, *Über gewisse Curvenbüschel dritter und vierter Ordnung.*

centre. Soit $4r$ la valeur du diamètre. Sur la droite sc quelques positions correspondantes de t et k sont évidemment :

$$\begin{aligned} st &= r \;, & sk &= 4r \\ st &= 0 \;, & sk &= 2r \\ st &= -2r \;, & sk &= r \\ st &= \infty \;, & sk &= 0 \\ st &= 2r \;, & sk &= \infty \\ st &= 4r \;, & sk &= -2r \,. \end{aligned}$$

Cela indique que l'homographie est périodique à l'indice 3, avec :

$$\begin{aligned} st &= 0 \;, \quad 2r \;, \quad \infty \\ st &= r \;, \quad 4r \;, \quad -2r \,, \end{aligned}$$

comme deux triples périodiques. A l'évaluation de $\alpha\beta\gamma\delta$ dans l'équation d'affinité

$$\alpha \,.\, sk \,.\, st + \beta \,.\, st + \gamma \,.\, sk + \delta = 0$$

se prêtent

$$\gamma \,.\, 2r + \delta = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \alpha \,.\, 2r + \gamma = 0 \,;$$

donc

$$\frac{st \,.\, sk}{4r^3} - \frac{sk}{2r} + 1 = 0 \,.$$

Cette équation donne pour les points doubles la formule

$$st = r\left(1 \pm \sqrt{-3}\right).$$

En même temps la distance du point a' à s s'exprime par

$$2r - \frac{1}{2}\left\{4r - r\left(1 \pm \sqrt{-3}\right)\right\} = -r\left(1 \mp \sqrt{-3}\right),$$

donc la distance de c' à s par

$$r\left(1 \mp \sqrt{-3}\right),$$

ce qui conduit aux conséquences de ci-dessous.

Voici succinctement la déduction directe non-euclidienne. 1. Quand a' vient à s, b', c y coïncident de même. Le point t vient à s, la droite ρ coincide avec une diagonale du quadrilatère ab, ac, $s\beta$, $s\gamma$, par suite k tombe dans le point d'intersection de sc et de cette diagonale. 2. Quand a' vient à a, aussi $a'b$, ab' coincident avec la droite ab et t tombe par suite dans le point d'intersection de sc et ab. Dans ce moment ρ devient la droite $a\alpha$ et k le point d'intersection de $a\alpha$ et sc. 3. Quand a' vient au point d'intersection de $b\beta$ et $s\alpha$, t vient au point d'intersection de $b\beta$ et sc c'est-à-dire au point d'intersection de $a\alpha$ et sc. En même temps ρ coïncide avec la droite bc. Car $a'\gamma$ contient le

point b' et rencontre ac en un point de ρ, soit dans le point c, parce que les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sont convergentes; partant ρ est la droite ac ou bc et k tombe en c. 4. Quand enfin a' vient au point d'intersection de sa et bc, t arrivera en c. Or b' vient au point d'intersection de sb et ac et ρ joigne ce point au point α et donne ce même point comme k. Tout ce la se résume ainsi :

L'homographie entre t *et* k *est périodique à l'indice* 3 *et a trois points d'un triple périodique en*

(τ) c, *le point d'intersection de* sc *et* aα, *le point* sc *et* ab.

Les points doubles nous donnent deux solutions pour les centres d'homologie entre abc et $a'b'c'$ et lorsque d'un d'eux on projette b sur sc, on obtient le point respectif c'. Mais les rayons projetant de b le triple (τ) donnent sur sa

le point d'intersection de bc *et* sa, *point d'intersection de* sa *et* bβ, a

et la projection a' d'un point double est de même un point double et correspond comme a' au centre d'homologie de l'autre solution.

Nos deux solutions resolvent donc en même temps les deux problèmes, de manière, qu'un des deux triangles trouvés étant pris pour a'b'c', *le second apparaît comme le triangle des centres d'homologie correspondants.*

10. Les deux points sur sa, qui complètent avec a un triple périodique sont les points harmoniquement conjugués de s et du point d'intersection avec $\alpha\beta\gamma$ par rapport aux deux points doubles. D'où l'on déduit par un théorème facile à démontrer *) le résultat suivant :

Les deux points doubles forment avec a un triple homographiquement périodique dont les points doubles sont s *et le point d'intersection avec l'axe d'homologie.* Pourtant :

Lorsqu'on a trois triangles au même centre s et au même axe σ d'homologie et dont les trois sommets situés sur le même rayon forment un triple, dont le Hessien est réprésenté par s et le point d'intersection avec σ, chaque transformation quadratique, qui possède deux de ces triangles principaux de la sorte que $aa's$, $bb's$, $cc's$ soient allignés, est périodique à l'indice 6 et a le centre et les sommets du troisième triangle comme points doubles.

Les coniques, par rapport auxquelles deux de ces triangles sont polaires réciproques, ont chacune le troisième triangle comme triangle conjugué. Ces trois coniques sont tangentes entre elles en deux points i_1, i_2 qui représentent sur l'axe d'homologie le covariant Hessien des points d'intersection avec les trois rayons d'homologie.

Par rapport à $si_1 i_2$ chacun des trois triangles est conjugué et a par conséquence avec celui-là une homologie sextuple. Les trois triangles forment donc avec $si_1 i_2$ le groupe connu de quatre triples qui deux-à-deux sont mutuellement conjugués et que l'on connaît déjâ dès l'étude de la configuration des points d'inflexion d'une cubique. Dans ce dernier temps on a retrouvé à plusieurs réprises ce remarquable groupe.

11. Les trois triangles en discours constituent par rapport à $si_1 i_2$ ce que l'on trouve désigné dans le Mémoire K. 4. et dans quelques autres du même auteur sous le nom de configuration cyclique à neuf points. Cette configuration est la base d'un faisceau de cubiques équianharmoniques, qui dans notre transformation correspond à soi-même.

Moyennant le théorème suivant démontré dans le Mémoire K. 1 : « Le couple in-

*) Voici ce théorème : *Si le covariant Hessien d'un triple binaire* $a_1 a_2 a_3$ *est* $\delta_1 \delta_2$ *et que* a'_1 *est le point harmoniquement conjugué à* a_1 *par rapport à* $\delta_1 \delta_2$, *le triple* $\delta_1 \delta_2 a'_1$ *à pour covariant Hessien les points* $a_2 a_3$.

volutive d'une transformation quadratique est le seul couple de points, qui tant dans le reseau des courbes $abc\ d_1\ d_2\ d_3\ s$ que dans le reseau $a'b'c'\ d_1 d_2 d_3\ s$ sont des points de base conjoints, je conclus: Par deux couples de sommets conjugués de nos triangles et par $i_1\ i_2$ passe une conique. Ici celle-ci doit se composer de deux droites. Ainsi on voit, que ab', bc', ca' sont alignés avec i_1 et ac', ba', cb' avec i_2.

Les trois droites $aa's$, $bb's$, $cc's$ composent une cubique anallagmatique.

Mais des neuf rayons d'homologie, qui résultent en tout, les six restants se partagent en deux triples $ab'i_1$, $bc'i_1$, $ca'i_1$ et $ac'i_2$, $ba'i_2$, $cb'i_2$. Ces deux triples de droites représentent donc deux cubiques transformées involutivement l'une dans l'autre.

Il s'ensuit:

Les courbes C_3 *du faisceau* $abc\ a'b'c'\ d_1 d_2 d_3$ *sont transformées involutivement entre elles.*

On peut enfin exprimer tout ainsi:

Si l'on choisit deux triangles d'inflexion d'une cubique pour triangles principaux d'une transformation quadratique, celle-ci dévient périodique à l'indice 6, *lorsqu'un sommet quelconque d'un triangle se transforme en un sommet quelconque de l'autre triangle. Les sommets d'un troisième triangle d'inflexion sont points doubles, ceux du quatrième se partagent en un point double et un couple involutif.*

12. Soit Γ_3 la seconde courbe anallagmatique du faisceau C_3. Si dans chaque point de la configuration cyclique, base du faisceau, on détermine la droite harmonique ment conjuguée à as, ... par rapport aux ai_1, ai_2; ... on obtient les neuf tangentes de la courbe Γ_3 correspondantes aux neuf points.

Les transformations un-multivoques données dans le § 5. (I.) s'appliquent ici, pour démontrer, que les points d'intersection de Γ_3 avec la droite $i_1 i_2$ sont le covariant Q pour le triple des points d'intersection avec les trois rayons aa', bb', cc'; $i_1 i_2$ en est le Hessien.

13. *Chaque triangle six fois homologique au triple* $si_1 i_2$ *se transforme en un triangle analogue.* En effet il est trois fois homologique à abc et les rayons d'homologie se transforment en neuf nouvelles droites qui se croisent par trois en trois points. Donc le nouveau triangle est trois fois homologique à $a'b'c'$. Le premier triangle était situé sur une cubique du faisceau C_3 et y était un triple d'inflexion; ainsi le triangle transformé est aussi sur une cubique du faisceau et la triplicité d'homologie avec abc démontre, qu'il est aussi un triangle d'inflexion, c'est-à-dire qu'il est conjugué et six fois homologique à $si_1 i_2$.

C'est une conséquence de notre théorème, que: Toute cubique, qui contient abc et possède $si_1 i_2$ comme triangle d'inflexion, se transforme en une cubique contenant $a'b'c'$ et ayant $si_1 i_2$ pour triangle d'inflexion.

Chacune des trois droites issues de i_1 à $abc\ a'b'c'$ retourne à sa position après deux transformations, donc elle porte une homographie d'indice 3, qui a i_1 et le point double de la transformation comme double, tandis que le point b' se transforme en b et aprés dans le point d'intersection avec $a'c'$.

Les droites $aa's$, $bb's$, $cc's$ sont invariables, elles portent des homographies à l'indice 6, ce qui donne lieu au *théorème algébrique* suivant:

Lorsque les points mno *forment un triple d'homographie à l'indice* 3 *et aux points doubles* d_1, d_2, *deux de ces points forment un couple de points d'une homographie périodique à l'indice* 6, *le troisième point du triple et un point* d *étant pris comme doubles.*

14. *Les formules de la transformation.*

Je prends le triangle $s\,i_1\,i_2$ comme triangle de référence. On a les équations

$$bc \equiv f(a) = \frac{x_1}{x'_1} + \frac{x_2}{x'_2} + \frac{x_3}{x'_3} = 0$$

$$ca \equiv f(b) = \varepsilon^2 \frac{x_1}{x'_1} + \varepsilon \frac{x_2}{x'_2} + \frac{x_3}{x'_3} = 0$$

$$ab \equiv f(c) = \varepsilon \frac{x_1}{x'_1} + \varepsilon^2 \frac{x_2}{x'_2} + \frac{x_3}{x'_3} = 0\,.$$

De là on conclût, en observant que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ ont le déterminant $3\varepsilon(1-\varepsilon)$,

$$\frac{x_1}{x'_1} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} f(a) & 1 & 1 \\ f(b) & \varepsilon & 1 \\ f(c) & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{x_2}{x'_2} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & 1 \\ \varepsilon^2 & f(b) & 1 \\ \varepsilon & f(c) & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{x_3}{x'_3} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & f(a) \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & f(b) \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & f(c) \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose ensuite

$$b'c' = \varphi(a) = \varepsilon \frac{y_1}{x'_1} + \varepsilon^2 \frac{y_2}{x'_2} + \varepsilon \frac{y_3}{x'_3} = 0$$

$$c'a' = \varphi(b) = \varepsilon^2 \frac{y_1}{x'_1} + \varepsilon \frac{y_2}{x'_2} + \varepsilon \frac{y_3}{x'_3} = 0$$

$$a'b' = \varphi(c) = \frac{y_1}{x'_1} + \frac{y_2}{x'_2} + \varepsilon \frac{y_3}{x'_3} = 0\,,$$

on aura les formules

$$\varphi_a : \varphi_b : \varphi_c = \frac{1}{f_a} : \frac{1}{f_b} : \frac{1}{f_c}$$

où les f impliquent encore des constantes.

Par cela

$$\frac{x_1}{x'_1} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} \varphi_b\varphi_c & 1 & 1 \\ \varphi_c\varphi_a & \varepsilon & 1 \\ \varphi_a\varphi_b & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{x_2}{x'_2} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & \varphi_b\varphi_c & 1 \\ \varepsilon^2 & \varphi_c\varphi_a & 1 \\ \varepsilon & \varphi_a\varphi_b & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{x_3}{x'_3} = \frac{1}{3\varepsilon(1-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \varphi_b\varphi_c \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varphi_c\varphi_a \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varphi_a\varphi_b \end{vmatrix}.$$

On calcule (en supprimant les x'_i):

$$\varphi_b\varphi_c = \varepsilon^2 y^2_1 + \varepsilon y^2_2 + \varepsilon^2 y^2_3 - y_1 y_2 - y_2 y_3 - \varepsilon^2 y_3 y_1$$
$$\varphi_c\varphi_a = \varepsilon y^2_1 + \varepsilon^2 y^2_2 + \varepsilon^2 y^2_3 - y_1 y_2 - \varepsilon^2 y_2 y_3 - y_3 y_1$$
$$\varphi_a\varphi_b = y^2_1 + y^2_2 + \varepsilon^2 y^2_3 - y_1 y_2 - \varepsilon y_2 y_3 - \varepsilon y_3 y_1$$

et ces valeurs des trois déterminants

$$3\varepsilon(1-\varepsilon)(y^2_2 - \varepsilon y_3 y_1)$$
$$3\varepsilon(1-\varepsilon)(y^2_1 - \varepsilon^2 y_2 y_3)$$
$$3\varepsilon(1-\varepsilon)(y^2_3 - \varepsilon y_1 y_2)\,.$$

Partant les formules de la transformation quadratique sont:

$$\frac{x_1}{x'_1} : \frac{x_2}{x'_2} : \frac{x_3}{x'_3} = \left(\frac{y^2_2}{x'^2_2} - \varepsilon \frac{y_3 y'_1}{x'_3 x'_1}\right) : \left(\frac{y^2_1}{x'^2_1} - \varepsilon \frac{y_2}{x'_2}\frac{y_3}{x'_3}\right) : \left(\frac{y^2_3}{x'^2_3} - \varepsilon^2 \frac{y_1}{x'_1} \cdot \frac{y_2}{x'_2}\right).$$

Soit

$$a_1 x^3_1 + a_2 x^3_2 + a_3 x^3_3 = 0$$

l'équation d'une cubique passant en $x'_1 x'_2 x'_3$. Par application de la transformation elle prend la forme (les $x'_1 x'_2 x'_3$ y étant supprimés)

$$\begin{aligned} & a_1 (y^6_2 - y^3_1 y^3_3 + 3\varepsilon^2 y^2_1 y^2_2 y^2_3 - 3\varepsilon\, y_1 y^4_2 y_3) \\ & + a_2 (y^6_1 - y^3_2 y^3_3 + 3\varepsilon^2 y^2_1 y^2_2 y^2_3 - 3\varepsilon\, y^4_1 y_2 y_3) \\ & + a_3 (y^6_3 - y^3_1 y^3_2 + 3\varepsilon^2 y^2_1 y^2_2 y^2_3 - 3\varepsilon\, y_1 y_2 y^4_3) = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(a_1 y^3_2 + a_2 y^3_1 + a_3 y^3_3)(y^3_1 + y^3_2 + y^3_3 - 3\varepsilon\, y_1 y_2 y_3) = 0.$$

Le second facteur est le produit des trois côtés $b'c'$, $c'a'$, $c'b'$, savoir $f(a)$, $f(b)$ $f(c)$; donc:

Les deux cubiques

$$a_1 \frac{y^3_1}{x'^3_1} + a_2 \frac{y^3_2}{x'^3_2} + a_3 \frac{y^3_3}{x'^3_3} = 0$$

$$a_2 \frac{y^3_2}{x'^3_2} + a_1 \frac{y^3_1}{x'^3_1} + a_3 \frac{y^3_2}{x'^3_3} = 0$$

sont transformées involutivement entre elles, ce qui vérifie un de nos résultats géométriquement trouvés.

L'équation de la courbe Γ_3 anallagmatique est:

$$\frac{y^3_1}{x'^3_1} + \frac{y^3_2}{x'^3_2} + \frac{y^3_3}{x'^3_3} = 0.$$

15. *Relations remarquables pour le faisceau de courbes équianharmoniques* C_3.

Les points de la cubique Γ_3, ayant leurs transformés dans la même courbe, donnent lieu à une enveloppe des droites, qui joignent un point à son premier transformé.

De cette enveloppe passent par un point de la courbe Γ_3 trois tangentes, à savoir celles menées aux deux premiers transformés et une droite étrangère à ce point. Cette dernière s'obtient par cela, que les rayons par le point p_1 et les coniques leur correspondantes engendrent une courbe K_3 par $a'b'c'd_1 d_2 d_3 p_1 p'_1$, qui fournit sur la Γ_3 un seul point étranger, donnant une tangente par p_1.

Je ferai observer, que les couples bc, $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$ étant les polaires des points aa' bb' cc' par rapport à si_1 i_2 se coupent sur la droite i_1 i_2 dans les poles des droites aa', bb', cc'. Ces poles sont les tangentiels de $aa'd_1$, $bb'd_2$, $cc'd_3$.

Or au point a' correspondent sur la courbe Γ_3 vers les deux directions le point a et le point d'inflexion sur i_1 i_2, conjugué à aa'. Puisque la courbe K_3 appartenant à a' se décompose en aa', bc, $b'c'$, aussi le point étranger tombe dans le point d'inflexion,

tangentiel de a'. Par a' passent donc deux tangentes infiniment voisines, qui coïncident avec la tangente de Γ_3 en a'.

Pour d_1 les deux points correspondants sont réunis en d_1, la troisième tangente est aa'.

Ensuite je déterminerai l'enveloppe des droites pp''. Les droites par p_1 et les quartiques leur correspondantes engendrent une courbe K_5 qui contient $a'^2b'^2c'^2\ abc\ d_1d_2d_3\ p_1p''_1$ et coupe Γ_3 dans un autre point. La courbe est de même de la troisième classe et on voit encore, qu'elle est tangente à Γ_3 dans les 9 points de la configuration cyclique. Elle est donc identique à la première enveloppe. Après tout on conclut :

La transformation contient ∞^1 *triples périodiques, qui se trouvent sur la courbe* Γ_3. *L'enveloppe des droites menées de ces points à leurs transformés est une courbe de la troisième classe, qui est tangente à* Γ_3 *en* $aa'd_1\ bb'd_2\ cc'd_3$. *Ces deux courbes ont telle position, qu'il existe des triangles en nombre simplement infini, inscrits à la* Γ_3 *et circonscrits à l'enveloppe.*

16. L'enveloppe analogue pour une autre cubique C_3 du faisceau devient également de la 3ième classe. Par un point p_1 passe d'abord la droite $p_1p'_1$ et la K_3 coupe la cubique correspondante en deux points outre $a'b'c'\ d_1d_2d_3$.

La courbe K_3 appartenant au point d'intersection de aa' avec i_1i_2 se décompose en aa' et la conique $i_1\ i_2\ d_2\ d_3\ b'c'$. Cette conique est effectivement une paire de droites. Les trois points diagonaux du quadrangle $b'c'd_2d_3$ sont s, le point harmonique à sd_1 par rapport à i_1i_2 et selon une propriété connue de la forme cubique binaire le troisième point diagonal est situé sur sj_1 ou saa' et il faut, qu'il coincide ou avec a' ou avec a. Ce dernier point seulement est admissible. Donc les trois droites de K_3 se croisent en a.

Toutes les enveloppes E^3 *forment une série de l'indice* 1, *toutes ayant les mêmes points de rebroussement* $j'_1j'_2j'_3$ *sur* i_1i_2 *avec les mêmes tangentes* aa', bb', cc'. *Elles son t équianharmoniques et* si_1i_2 *en est le triangle Hessien.*

Chaque enveloppe appartiendra à deux courbes du faisceau C_3, parceque toute droite du plan contient deux couples de points correspondants de la transformation. Par cela une homographie sera produite entre les courbes C_3. La courbe équianharmonique composée par aa', bb', cc', a le point s trois fois compté pour E^3. La courbe ai_1+bi_1+ci fournit une courbe E^3, qui a i_1i_2 comme tangente triple. Les points de ai_1 et les points correspondants de $a'i_2$ sont homologues et le centre d'homologie est le point (i_1i_2, aa'), c'est-à-dire j_1. Donc l'enveloppe $E^3 = j_1+j_2+j_3$ appartient en même temps aux deux courbes $ai_1+bi_1+ci_1$ et $ai_2+bi_2+ci_2$. Ainsi l'homographie entre les courbes C_3 est une involution et la même que celle dans la transformation.

Il existe donc des sextuples, dont six côtés successifs sont circonscrits à la courbe E_3 et un triple se trouve sur une C_3, l'autre sur la courbe C_3 correspondante.

17. L'enveloppe des droites issues des points d'une C_3 aux deuxièmes transformés est également de la troisième classe, Z^3. Elle est équianharmonique. Cela se démontre soit par son rapport univoque à la courbe C_3, soit par les remarques faites au n. 8. Chaque configuration cyclique inscrite à C_3 se transforme successivement en des configurations cycliques et les droites pp'', qui ainsi sont produites, forment une configuration cyclique circonscrite à la Z^3, partant Z^3 est équianharmonique et $si_1\ i_2$ en est le triangle Hessien.

Le point tangentiel de a' est situé sur $b'c'$ et il est le second transformé de a'. La courbe K_5 appartenant au point a' se décompose en une conique fixe, la droite aa' et la

conique par $a'^2 bc\, d_2 d_3$, c'est-à-dire en un couple de droites par a. Cela démontre, que la tangente en a' représente deux tangentes de Z^3, Z^3 touche en a' la courbe C_3.

La courbe K_5 pour d_1 se décompose en aa', $d_1 cb'$, $d_1 bc'$ et $(a'b'c'd_2 d_3)^2$. La conique a un point libre en commun avec C_3 ainsi que la tangente en d_1 représente deux tangentes de Z^3. Au surplus le contact en d_1 se déduit aussi du contact dans les six autres selon le théorème, que les tangentes de C_3 en une configuration cyclique forment une autre configuration cyclique et puisque la C_3 est équianharmonique. Donc:

L'enveloppe Z^3 dont les tangentes unissent les points d'une C_3 à leurs deuxièmes transformés est équianharmonique et a si_1i_2 pour triple Hessien. Elle est tangente à la courbe C_3 en aad_1 $bb'd_2$ $cc'd_3$. Toutes ces courbes forment donc une série avec 9 points fixes et à l'indice 4 *).

Les courbes C_3 et Z^3 ont telle position, qu'il y a une infinité de triangles, qui sont inscrits à la C_3 et circonscrits à la Z^3. Cela donne lieu au théorème géométrique:

Il y a une infinité de courbes de la troisième classe C^3, qui sont tangentes à une courbe équianharmonique du troisième ordre C_3 en neuf points. Ces neuf points forment une configuration cyclique. À chaque courbe C^3 sont circonscrits infinis triangles, qui sont inscrits dans C_3.

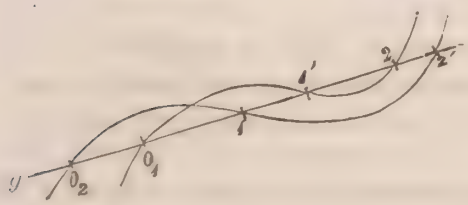
Dès le moi de mars 1880 j'étais arrivé à ce théorème, c'est à dire avant la publication du travail de M. Halphen dans le Bulletin de la Soc. Math. de France. Du reste son théorème algébriquement trouvé n'est pas aussi complet.

18. Je passe à l'enveloppe des droites, issues des points d'une C_3 aux troisièmes transformés. Sur une droite arbitraire il n'y a qu'une seule paire de points correspondants. Ainsi *les enveloppes en question forment une série de l'indice 1.*

La classe se trouve de nouveau égale à 3. Pour le triple des rayons aa', bb', cc' l'enveloppe est le point s trois fois compté. Des transformés d'un point de $i_1 a$ trois se trouvent sur $i_2 a'$ et sont les triples d'une homographie périodique aux points doubles $i_2 d_2$. Le point p de $i_1 a$ projette cette homographie en une autre aux points doubles i_1, i_2 sur la droite $i_1 i_2$. Or la droite menée à p' passe en j_1, les points p''', p^{v} sont donc projétés en j_2, j_3. Par conséquent $j_1 j_2 j_3$ est l'enveloppe pour les deux triples $i_1 a$, $i_1 b$, $i_1 c$ et $i_2 a$, $i_2 b$, $i_2 c$, qui se correspondent involutivement. La série déterminée par les deux courbes $3s$ et $j_1 + j_2 + j_3$ est identique à la série des courbes E^3.

Les droites ménées des points d'une C_3 aux premiers ou troisièmes transformés enveloppent une même et seule courbe E^3. Par suite 9 des 15 côtés d'un sextuple périodique sont tangents à une courbe E^3, les six autres se séparent en deux triples, dont chacun est tangent à une courbe Z^3.

19. 1) Une droite g du plan contient deux couples de points correspondants et un couple de la trasformation involutive. *Afin que trois transformés successifs soient alignés*, il faut que 1′ coincide avec 2. Mais alors 1′ est un point de contact de g avec la courbe E^3 y appartenant, parce que deux tangentes de 1′ coincident avec la droite g.



Mais il est de même un point de contact de g avec la C_3 qui correspond à la E^3, 1′, 2 étant généralement deux points de la même cubique.

*) Au moyen d'une transformation de celles du n. 3, § 5, I. partie cette série se change dans les tangentes d'une courbe de 3ième ordre et de 4ième classe.

2) *Soit* g *une droite, sur laquelle un point, son premier et troisième transformé sont réunis.* Alors 1′ et 0_1 coincideront dans un point de contact de g *avec* D^3 *de même que avec la courbe* C_3, qui les contient.

3) *Lorsque sur la droite* g *se trouvent un point*, son premier et son troisième transformé vers le premier système, 2 et 0_2 doivent coincider et par suite 0_2 sera un point de contact de D^3 ou E^3 et de même un point de contact de la courbe C_3 avec g.

20. Or je détermine les lieux des points 1), 2), 3). Certaines considérations générales, qui se trouvent dans le Mémoire K. 3., montrent que la première courbe est du 5ième ordre et qu'elle se décompose ici en aa', bb', cc' et la conique $i_1\, i_2\, d_1\, d_2\, d_3$. De même les autres courbes sont de l'ordre 8 et se réduisent respectivement à $aa', bb', cc', \Gamma_3 + (i_1 i_2 a'b'c')^2$ et aa', bb', cc', $\Gamma_3 + i_1\, i_2\, abc$. Toutes ces coniques sont tangentes aux droites $i_1 s$, $i_2 s$.

Chacune d'elles rencontre une cubique C_3 dans trois points variables. De là on tire ce théorème fort remarquable.

La courbe enveloppe D^3 (E^3) *appartient à deux cubiques* C_3 *du faisceau et est tangente à chacune d'elles dans neuf points. Un pareil groupe de neuf points forme une configuration cyclique par rapport au triple* $s i_1 i_2$ *).

Les droites lieux des triples de points considérés tout-à-l'heure enveloppent trois courbes de la troisième classe, dont la droite $i_1\, i_2$ est une tangente double, aux points de contact i_1, i_2. Pour toutes ces trois courbes aa', bb', cc' sont les tangentes de rebroussement. Les points de rebroussement sont situés dans trois différentes coniques, qui sont tangentes en $i_1\, i_2$ aux droites $i_1 s$, $i_2 s$.

Ensuite on conclût des figures du n.° 19:

Les neuf tangentes communes à une courbe C_3 *et à son enveloppe* E^3 *correspondante sont les tangentes communes à* E^3 *et à l'enveloppe* Z^3 *qui appartient à la cubique transformée de* C_3.

21. Les équations des trois coniques étant

$$x^2_3 - x_1 x_2 = 0\ ,\ x^2_3 - \varepsilon x_1 x_2 = 0\ ,\ x^2_3 - \varepsilon^2 x_1 x_2 = 0$$

où la dernière passe par d_1, d_2, d_3, la droite polaire d'un point ξ_1, ξ_2, ξ_3 par rapport à cette conique a l'équation

$$\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1 - 2\varepsilon \xi_3 x_3 = 0\,.$$

Elle passera par le premier transformé de $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$, quand

$$\xi_1 (\xi^2_1 - \varepsilon \xi_2 \xi_3) + \xi_2 (\xi^2_2 - \varepsilon \xi_1 \xi_3) - 2(\varepsilon^2 \xi^2_3 - \xi_1 \xi_2)\, \xi_3 = 0$$

ou bien

$$\xi^3_1 + \xi^3_2 - 2\xi^3_3 = 0\,,$$

c'est-à-dire, le point $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ doit se trouver sur la courbe Γ_3. Ainsi on conclut :

Les triangles, qui sont inscrits à la courbe Γ_3 *et circonscrits à la courbe* E^3 *et représentent des triples transformés en eux-mêmes, sont des triangles conjugués par rapport à la conique* $i_1 i_2 d_1 d_2 d_3$.

Attendu que — abstraction faite de la transformation — les trois coniques ont même relation avec la courbe Γ_3, il s'ensuit:

La courbe équianharmonique Γ_3 *et la courbe de la troisième classe* E^3 *qui est tan-*

*) Cela s'éclaircit bien au moyen de la transformation multivoque rappelée ci-haut. Les courbes D^3 déviennent des coniques etc.

gente à Γ_3 *dans les neuf points de contact des tangentes menées par les points d'inflexion sur* $i_1 i_2$, *sont tellement situées, qu'il y a trois séries différentes de triples inscrits à* Γ_3 *et circonscrits à* E_3. *Ces triples sont conjugués par rapport aux trois coniques en question.*

Ou bien: Γ_3 *et* E^3 *sont polaires réciproques par rapport à trois coniques.*

Chaque courbe du faisceau C_3 et sa courbe enveloppe E^3 ont les mêmes relations mutuelles, sauf l'interprêtation par la transformation quadratique. Les triples respectifs ne sont plus des triples périodiques de notre transformation.

Tout point P de Γ_3 est sommet de trois triangles circonscrits à la courbe E_3 et les côtés opposés se croisent sur $i_1 i_2$. Le six autres sommets se distribuent sur les tangentes de E^3 issues du point P, de manière que PAA′, PBB′, PCC′ sont les trois tangentes el PAC′, PB′C, PA′B les trois triangles. Par conséquent AB′, A′C, BC′ passent par un point, ce qu'on peut exprimer dans les termes suivants:

Lorsqu'on mène d'un point de Γ_3 *les trois tangentes à* E^3, *leurs six points d'intersection avec* Γ_3 *se partagent en deux triangles, qui sont perspectifs en trois manières et forment ainsi la base d'une configuration* $(3,3)_9$.

Il serait d'un grand intérêt, de poursuivre les propriétés de Γ_3 et E^3 qui s'expriment par ces sextuples.

22. *Faisceaux anallagmatiques de coniques.* Un pareil faisceau est déterminé par $aa'\ bb'$. La conique $aa' + bb'$ se réproduit, la conique $ab + a'b'$ se transforme en $ab\,a'b'c'$, celle-ci en $a'b'\,abc$ et celle-ci en $ab + a'b'$. Le faisceau est transformé à l'indice 3. L'autre conique invariable est $ab' + a'b$. Les tangentes de ces coniques dans a entrent dans une homographie, ou aa', ab' sont les rayons doubles et ab correspond à ac, ensuite à la droite issue de a au point $(a'b', bc)$ et enfin au rayon ab.

On remarquera encore, que chaque point du plan et son troisième transformé sont situés dans une conique du faisceau. Sur chacune de ces coniques résulte ainsi une involution, dont les points doubles engendrent la cubique Γ_3. Les mêmes relations subsistant pour les coniques $bb'\,cc'$, $cc'\,aa'$ on a:

Les trois coniques des faisceaux $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$, qui passent par un point p du plan, se coupent en un second point, le troisième transformé de p.

Puisque aa', bb' coupent Γ_3 en d_1, d_2 et $d_1 d_2$ passe par le point $(i_1 i_2, ab)$ il s'ensuit: Les points opposés aux trois quadruples $bb'cc'$, $cc'aa'$, $aa'bb'$ sur la cubique Γ_3 sont respectivement les trois points d'inflexion contenus sur $i_1 i_2$.

Si $p_1 p_2 p_3$ est un triple périodique, les coniques d'un des faisceaux, qui passent par ces points, se permutent dans cet ordre. Elles coupent donc la courbe Γ_3 en trois points nouveaux d'un triple périodique. De là la conclusion: La projection d'un triple périodique faite d'un quelconque des points d'inflexion sur $i_1 i_2$ forme un nouveau triple périodique.

29. *Recherche d'un faisceau de cubiques anallagmatiques.* Une étude plus profonde des propriétés de la trasformation se rattache à la connaissance de cubiques transformées en soi-mêmes. En effet le faisceau par $abc\,a'b'c'\,i_1 i_2$, dont s est le neuvième point base, amène une homographie des tangentes en s, où saa', sbb', scc' sont éléments doubles et qui par cela est une identité, donc etc.

Chaque sextuple périodique doit avec $abc\,a'b'c'\,i_1 i_2 s$ déterminer une cubique A_3. Cela prouve, que sur Γ_3 un triple périodique forme avec $abc\,a'b'c'$ un système complet d'intersection. Désignons par Σ la somme des six arguments $abc\,a'b'c'$, par $p_1 p_2 p_3$ les

arguments d'un triple périodique. Nous conviendrons de prendre égal à zéro l'argument d'un point d'inflexion sur $i_1 i_2$. D'après le numéro précédent deux triples homologiques avec ce point comme centre sont en même temps des triples periodiques ou non, donc nous aurons les équations

$$\Sigma + p_1 + p_2 + p_3 \equiv 0$$

$$\Sigma - p_1 - p_2 - p_3 \equiv 0,$$

ce qui démande

$$2(p_1 + p_2 + p_3) \equiv 0.$$

Le cas, où tous les points du triple seraient allignés, étant à exclure, les points p_1, p_2, p_3 sont les points de contact d'une conique triplement tangente. Ainsi nous sommes conduits à cette conclusion importante:

Dans chaque système de coniques à contact triple avec la cubique équianharmonique Γ_3 *il existe une infinité de coniques «apolaires» par rapport à une conique fixe* $i_1 i_2$ daa' *ou par rapport à huit certaines coniques analogues.*

Les côtés de tout triple périodique $p_1 p_2 p_3$ percent la courbe Γ_3 en trois points alignés. Une seule droite $p_i p_j$ passant par un point de Γ_3, la classe de l'enveloppe est 1, et la considération des triples $aa'\alpha$, $bb'\gamma$ montre, que toutes les droites enveloppent le point s. De là:

Lorsqu'on mène par un sommet du triangle Hessien d'une cubique équianharmonique toutes les droites et que l'on construit les 3 triples contangentiels aux triples où elles coupent la cubique, ces triples seront conjugués par rapport à trois coniques, qui passent par les deux autres sommets $i_1 i_2$ du triangle Hessien et par des points, dont les tangentiels sont les points d'inflexion sur cette droite $i_1 i_2$.

D'après le n.° 22 il y a trois points sur Γ_3, d'où les triples périodiques sont projétés par une involution périodique de rayons. Ces trois points sont les points d'inflexion sur $i_1 i_2$ et le covariant Hessien est formé par les deux rayons allant à $d_1 d_2 d_3$.

Plus généralement on peut dire:

Un triple pp_2p_4 *détermine avec* abc a'b'c' *un faisceau de cubiques.*

Le nouveau faisceau A_3 est composé de courbes équianharmoniques, dont $d_1 d_2 d_3$ est le triangle Hessien. Par cela on peut conclure ainsi:

Quand des quatre triangles d'inflexion d'un faisceau syzygéthique on en prend deux fois trois pour base d'un faisceau de courbes équianharmoniques, les courbes des deux faisceaux se rencontrent dans des triples qui sont les triples pp_2p_4 *de notre transformation du plan.*

24. *Enveloppes pour les courbes* A_3. Je détermine les enveloppes analogues pour les courbes A_3. Les droites tirées des points à leurs transformés enveloppent une courbe de la cinquième classe. Comme je n'en ferai pas usage dans la suite, je passe à la seseconde enveloppe.

Celle-ci est une courbe de la troisième classe. En effet une K_5 (courbe construite comme auparavant) rencontrant A_3 en $pp's\,abc\,a'^2b'^2c'^2\,i_1 i_2$ et un seul point libre, par p ne passe qu'une seule droite enveloppante étrangère. Cette courbe Z^3 est tangente à A_3 dans les points $abc\,a'b'c'\,s\,i_1 i_2$ comme on démontre par des considérations analogues aux précedentes et elle possède la même relation avec A_3 que Z^3 du n.° 17 avec C_3.

Pour la troisième enveloppe je me servirai d'une autre méthode, qui est générale. Provenant d'une correspondance univoque sur A_3 l'enveloppe devrait être de la

6ième classe. Mais dans A_3 se trouve un triple périodique, qui est l'intersection avec Γ_3. Ce triple et le point s forment ensemble les points doubles de la corréspondance pp''', et les quatre faisceaux qui ont ces sommets font partie de l'enveloppe; la conique restante se réduit à un point eu égard à la permutabilité de la corréspondance. Les points $i_1\, i_2$ étant corréspondants, il s'ensuit: *Les droites* pp''' *de la courbe* A_3 *passent toutes par le point d'intersection de* A_3 *avec* $i_1 i_2$. *Ce point est le point tangentiel de* s *et des points du triple périodique dans* A_3.

Chaque sextuple périodique de la transformation est un sextuple de Brianchon. Les points de convergence remplissent la droite $i_1 i_2$.

On est aussi conduit à ce théorème géométrique:

Lorsqu'on tire par un point de la courbe équianharmonique ses quatre tangentes, on obtient un quadruple équianharmonique. La droite polaire d'un point de contact par rapport aux trois autres est aussi la droite polaire par rapport au triangle Hessien.

Sur A_3 nous avons eu tout-à-l'heure une correspondance pp' à trois points doubles. Or on conclût, que pour cette correspondance, abstraction faite de la transformation quadratique, il n'y a pas distinction entre s, i_1, i_2. Cette conclusion recevra toute sa rigueur par le § 4; ici elle s'exprime ainsi:

Chacun des points d'intersection des côtés de $si_1 i_2$ *avec* A_3 *projette les triples* $pp_2 p_4$ *de cette courbe par trois droites, qui forment les triples d'une homographie périodique à l'indice* 3.

25. Le théorème du n.° 17 admet une extension. Quand on substitue à $d_1 d_2 d_3$ l'un des deux autres triangles liés avec $s\, i_1 i_2$ à une configuration cyclique, on arrive à deux autres séries de triples. Mais la configuration cyclique des points de contact est restée la même et par suite Z^3 est encore la même courbe. Donc:

Une cubique équianharmonique et une courbe quelconque équianharmonique de la troisième classe, qui est tangente à la cubique en neuf points d'une configuration cyclique ont telle position, qu'il y a trois séries différentes de triangles qui sont circonscrits à celle-ci et inscrits dans la cubique.

Les théorèmes particuliers du n.° 23 ne sont vrais que pour la relation entre Γ_3 et E^3.

25. Je considère le réseau constitué par Γ_3 et deux courbes A_3, réseau transformé en soi-même. La courbe Hessienne a des points doubles en $abc\, a'b'c'$. Elle contient le point d_i. Mais toutes les bases, qui se trouvent dans la courbe $d_i a + d_i b + d_i c$ forment des triples homologiques, des bases à coincidences ne se trouvent donc dans ces trois droites qu'en d_i; par suite la courbe Hessienne a en d_i un point double et se partage en deux cubiques. Les tangentes en a sont celles de $C^4_3(a^2 bc\, a'b'c'\, \alpha)$, où α est le point tangentiel de a sur Γ_3. Or il y a une conique qui contient $a'b'c'\, ab$ et touche ac en a; et une conique qui contient $a'b'c'\, ac$ et touche ab en a; chacune avec sa tangente en a forme une cubique par $a^2 bc\, a'b'c'$. Ainsi il suit, que les tangentes de C^4_3 séparent harmoniquement les droites ab, ac. D'autre part la C^4_3 fait partie du faisceau par $a^2 a'b'c'\alpha$ et avec $a'\alpha$ comme tangente en a'. Le même faisceau contient $aa' + aa' + b'c'\alpha$ et $a'\alpha + ab' + ac$, les tangentes de C^4_3 sont par suite un couple de l'involution déterminée par ab', ac' et aa', aa', c'est-à-dire elles séparent harmoniquement as, $a\alpha$. Cela donne en tout:

Les courbes A_3 *ensemble à* Γ_3 *font un réseau, dont la courbe Hessienne consiste en deux cubiques transformées involutivement, qui séparent harmoniquement les deux cubiques* C_3, *in-et circonscrites à la configuration cyclique* $abc\, a'b'c'\, d_1 d_2 d_3$.

§ 3. Application du principe de l'enchaînement des points fondamentaux et du principe des transformations successives.

Ce paragraphe est le plus important, car il montre, que le nombre des transformations périodiques est limité, sans avoir égard à la construction effective dans le plan.

Je distinguerai trois cas selon que les termes extrêmes des trois séries de transformés successifs sont des points fondamentaux comme aa', bb', cc', ou aa', bc', cb', ou ab', bc', ca' et je n'étendrai pas dans ce paragraphe la recherche aux cas, où des points fondamentaux des deux systèmes se confondent.

1.

I. a' en a, b' en b, c' en c'_1 en c'_2 . . . en $c'_m = c$.

Droite en									
C_2	a'	b'	c'						
C_4	a'^2	b'^2	c'^2	a	b	c'_1			
C_6	a'^3	b'^3	c'^2	a^2	b^2	c'^2_1	c'_2		
C_8	a'^4	b'^4	c'^2	a^3	b^3	c'^2_1	c'^2_2		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
C_{2m}	a'^m	b'^m	c'^2	a^{m-1}	b^{m-1}	c'^2_1	c'^2_2	. . .	c'^2_{m-1}
C_{2m+1}	a'^m	b'^m	c'^2	a^m	b^m	c'^2_1	c'^2_2	. . .	c'^2_{m-1} c^2
C_{2m}	a'^{m-1}	b'^{m-1}	c'	a^m	b^m	c'^2_1	c'^2_2	. . .	c'^2_{m-1} c^2
C_{2m-2}	a'^{m-2}	b'^{m-2}		a^{m-1}	b^{m-1}	c'_1	c'^2_2	. . .	c'^2_{m-1} c^2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
C_4	a'	b'			b^2				c'_{m-1} c^2
C_2				a	b				c
Droite									

Cela montre, qu'au moyen de l'enchaînement supposé un retour à l'homographie serait possible pour m quelconque.

II. a' en a'_1 en a, b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c.

Droite en									
C_2	a'			b'			c'		
C_4	a'^2	a'_1		b'^2	b'_1		c'^2	c'_1	
C_8	a'^4	a'^2_1	a	b'^4	b'^2_1	b	c'^4	c'^2_1	c
C_{13}	a'^6	a'^4_1	a^2	b'^6	b'^4_1	b^2	c'^6	c'^4_1	c^2
C_{20}	a'^9	a'^6_1	a^4	b'^9	b'^6_1	b^4	c'^9	c'^6_1	c^4
C_{28}	a'^{12}	a'^9_1	a^6	b'^{12}	b'^9_1	b^6	c'^{12}	c'^9_1	c^6
C_{38}	a'^{16}	a'^{12}_1	a^9	b'^{16}	b'^{12}_1	b^9	c'^{16}	c'^{12}_1	c^9
C_{49}	a'^{20}	a'^{16}_1	a^{12}	b'^{20}	b'^{16}_1	b^{12}	c'^{20}	c'^{16}_1	c^{12}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

La série des ordres de ces transformations et les séries des différences successives sont:

1, 2, 4, 8, 13, 20, 28, 38, 49, 62, 76, 92, 109, 128, 148, 170, ...

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22 ....

1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 ....

et une diminution de l'ordre est impossible. De même a', b', c', ont les multiplicités

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, ...

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ....

III. a' en a, b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\ b'\ c'$	$C_2\ a\ b\ c$
$C_4\ a'^2\ a_2\ b'^2\ b'_1\ c'^2\ c'_1$	$C_4\ a'\ a^2\ b'_1\ b^2\ c'_1\ c^2$
$C_7\ a'^4\ a^2\ b'^3\ b'^2_1\ b\ c^3\ c'^2_1\ c$	$C_7\ a'^2\ a^4\ b'\ b'^2_1\ b^3\ c'\ c'^2_1\ c^3$
$C_{10}\ a'^5\ a^4\ b'^4\ b'^3_1\ b^2\ c'^4\ c'^3_1\ c^2$	$C_{10}\ a'^4\ a^5\ b'^2\ b'^3_1\ b^4\ c'^2\ c'^3_1\ c^4$
$C_{12}\ a'^5\ a^5\ b'^4\ b'^4_1\ b^3\ c'^4\ c'^4_1\ c^3$	$C_{12}\ a'^5\ a^6\ b'^3\ b'^4_1\ b^4\ c'^3\ c'^4_1\ c^4$

$C_{13}\ a'^6\ a^6\ b'^4\ b'^4_1\ b^4\ c'^4\ c'^4_1\ c^4$.

IV. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\ b'\ c'$	$C_2\ a\ b\ c$
$C_4\ a'^2\ a\ b'^2\ b'_1\ c'^2\ c'_1$	$C_4\ a'\ a^2\ b'\ b^2\ c'\ c'_1\ c^2$
$C_7\ a'^4\ a^2\ b'^3\ b'^2_1\ b'_2\ c'^3\ c'^2_1\ c$	$C_7\ a'^2\ a^4\ b'_1\ b'^2_2\ b^3\ c'^2\ c'^2_1\ c^3$
$C_{11}\ a'^6\ a^4\ b'^4\ b'^3_1\ b'^2_2\ b\ c'^5\ c'^3_1\ c^2$	$C_{11}\ a'^4\ a^6\ b'\ b'^2_1\ b'^3_2\ b^4\ c'^3\ c'^3_1\ c^5$
$C_{15}\ a'^8\ a^6\ b'^5\ b'^4_1\ b'^3_2\ b^2\ c'^6\ c'^5_1\ c^3$	$C_{15}\ a'^6\ a^8\ b'^2\ b'^3_1\ b'^4_2\ b^5\ c'^5\ c'^5_1\ c^6$
$C_{19}\ a'^{10}\ a^8\ b'^6\ b'^5_1\ b'^4_2\ b^3\ c'^7\ c'^6_1\ c^5$	$C_{19}\ a'^8\ a^{10}\ b'^3\ b'^4_1\ b'^5\ b^6\ c'^6\ c'^6_1\ c^7$
$C_{22}\ a'^{12}\ a^{10}\ b'^6\ b'^6_1\ b'^5_2\ b^4\ c'^8\ c'^7_1\ c^6$	$C_{22}\ a'^{10}\ a^{11}\ b'^4\ b'^5_1\ b'^6\ b^6\ c'^7\ c'^7_1\ c^8$
$C_{24}\ a'^{12}\ a^{12}\ b'^6\ b'^6_1\ b'^6_2\ b^5\ c'^8\ c'^8_1\ c^7$	$C_{24}\ a'^{11}\ a^{12}\ b'^5\ b'^6_1\ b'^6_2\ b^6\ c'^8\ c'^8_1\ c^8$

$C_{25}\ a'^{12}\ a^{12}\ b'^6\ b'^6_1\ b'^6_2\ b^6\ c'^8\ c'^8_1\ c^8$.

V. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c.

Droite en

C_2	a'		b'				c'				
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1			c'^2	c'_1			
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	b_2		c^3	c'^2_1	c'_2		
C_{12}	a'^7	a^4	b'^5	b'^3_1	$b_2'^2$	b	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	c	
C_{18}	a'^{10}	a^7	b'^7	b'^5_1	$b_2'^3$	b^2	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	c^2	
C_{25}	a'^{14}	a^{10}	b'^9	b'^7_1	$b_2'^5$	b^3	c'^9	c'^7_1	c'^5_2	c^3	
C_{34}	a'^{19}	a^{14}	b'^{12}	b'^9_1	$b_2'^7$	b^5	c'^{12}	c'^9_1	c'^7_2	c^5	
C_{44}	a'^{24}	a^{19}	b'^{15}	b'^{12}_1	$b_2'^9$	b^7	c'^{15}	c'^{12}	c'^9_2	c^7	
C_{55}	a'^{30}	a^{24}	b'^{18}	b'^{15}_1	$b_2'^{12}$	b^9	c'^{18}	c'^{15}_1	c'^{12}_2	c^9	
C_{68}	a'^{37}	a^{30}	b'^{22}	b'^{18}_1	$b_2'^{15}$	b^{12}	c'^{22}	c'^{18}_1	c'^{15}_2	c^{12}	
C_{82}	a'^{44}	a^{37}	b'^{26}	b'^{22}_1	$b_2'^{18}$	b^{15}	c'^{26}	c'^{22}_1	c'^{18}_2	c^{15}	
C_{97}	a'^{52}	a^{44}	b'^{30}	b'^{26}_1	$b_2'^{22}$	b^{18}	c'^{30}	c'^{26}_1	c'^{22}_2	c^{18}	
C_{114}	a'^{61}	a^{52}	b'^{35}	b'^{30}_1	$b_2'^{26}$	b^{22}	c'^{35}	c'^{30}_1	c'^{26}_2	c^{22}	
C_{132}	a'^{70}	a^{61}	b'^{40}	b'^{35}_1	$b_2'^{30}$	b^{26}	c'^{40}	c'^{35}_1	c'^{30}_2	c^{26}	
C_{157}	a'^{80}	a^{70}	b'^{45}	b'^{40}_1	$b_2'^{35}$	b^{30}	c'^{45}	c'^{40}_1	c'^{35}_2	c^{30}	
C_{172}	a'^{91}	a^{80}	b'^{51}	b'^{45}_1	$b_2'^{40}$	b^{35}	c'^{51}	c'^{45}_1	c'^{40}_2	c^{35}	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	

Les ordres des transformations donnent les séries des différences

1 2 3 5 6 7 9 10 11 13 14 15 17 18 19 21 22 23

1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1

les multiplicités en a' donnent

1 1 2 3 3 4 5 5 6 7 7 8 9 9 10 11 11 . . .

0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 . . .

et les multiplicités en b' ou c'

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5 . . .

0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 . . .

La périodicité est donc impossible et de là je conclus le même pour les caractéristiques supérieures.

VI. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b'_3 en b, c' en c'_1 en c.

Droite en

C_2	a'		b'					c'		
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1				c'^2	c'_1	
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	b'_2			c'^3	c'^2_1	c
C_{11}	a'^6	a^4	b'^4	b'^3_1	b'^2_2	b'_3		c'^5	c'^3_1	c^2
C_{16}	a'^9	a^6	b'^5	b'^4_1	b'^3_2	b'^2_3	b	c'^7	c'^5_1	c^3
C_{22}	a'^{12}	a^9	b'^7	b'^5_1	b'^4_2	b'^3_3	b^2	c'^9	c'^7_1	c^5
C_{28}	a'^{15}	a^{12}	b'^8	b'^7_1	b'^5_2	b'^4_3	b^3	c'^{11}	c'^9_1	c^7
C_{34}	a'^{18}	a^{15}	b'^9	b'^8_1	b'^7_2	b'^5_3	b^4	c'^{13}	c'^{11}_1	c^9
C_{40}	a'^{21}	a^{18}	b'^{10}	b'^9_1	b'^8_2	b'^7_3	b^5	c'^{15}	c'^{13}_1	c^{11}
C_{46}	a'^{24}	a^{21}	b'^{11}	b'^{10}_1	b'^9_2	b'^8_3	b^7	c'^{17}	c'^{15}_1	c^{13}
C_{51}	a'^{26}	a^{24}	b'^{11}	b'^{11}_1	b'^{10}_2	b'^{19}_3	b^8	c'^{18}	c'^{17}_1	c^{15}
C_{55}	a'^{28}	a^{26}	b'^{12}	b'^{11}_1	b'^{11}_2	b'^{10}_3	b^9	c'^{19}	c'^{18}_1	c^{17}
C_{58}	a'^{29}	a^{28}	b'^{12}	b'^{12}_1	b'^{11}_2	b'^{11}_3	b^{10}	c'^{20}	c'^{19}_1	c^{18}
C_{60}	a'^{30}	a^{29}	b'^{12}	b'^{12}_1	b'^{12}_2	b'^{11}_3	b^{11}	c'^{20}	c'^{20}_1	c^{19}

Droite

C_2		a				b				c
C_4	a'	a^2			b'_3	b^2		c'_1		c^2
C_7	a'^2	a^4		b'_2	b'^2_3	b^3	c'	c'^2_1		c^3
C_{11}	a'^4	a^6	b'_1	b'^2_2	b'^3_3	b^4	c'^2	c'^3_1		c^5
C_{16}	a'^6	a^9	b'	b'^2_1	b'^3_2	b'^4_3	b^5	c'^3	c'^5_1	c^7
C_{22}	a'^9	a^{12}	b'^2	b'^3_1	b'^4_2	b'^5_3	b^7	c'^5	c'^7_1	c^9
C_{28}	a'^{12}	a^{15}	b'^3	b'^4_1	b'^5_2	b'^7_3	b^8	c'^7	c'^9_1	c^{11}
C_{34}	a'^{15}	a^{18}	b'^4	b'^5_1	b'^7_2	b'^8_3	b^9	c'^9	c'^{11}	c^{13}
C_{40}	a'^{18}	a^{21}	b'^5	b'^7_1	b'^8_2	b'^9_3	b^{10}	c'^{11}	c'^{13}_1	c^{15}
C_{16}	a'^{21}	a^{24}	b'^7	b'^8_1	b'^9_2	b'^{10}_3	b^{11}	c'^{13}	c'^{15}_1	c^{17}
C_{51}	a'^{24}	a^{26}	b'^8	b'^9_1	b'^{10}_2	b'^{11}_3	b^{12}	c'^{15}	c'^{17}_1	c^{18}
C_{55}	a'^{26}	a^{28}	b'^9	b'^{10}_1	b'^{11}_2	b'^{12}_3	b^{12}	c'^{17}	c'^{18}_1	c^{19}
C_{58}	a'^{28}	a^{29}	b'^{10}	b'^{11}_1	b'^{12}_2	b'^{12}_3	b^{12}	c'^{18}	c'^{19}_1	c^{20}
C_{60}	a'^{29}	a^{30}	b'^{11}	b'^{12}_1	b'^{12}_3	b'^{12}_3	b^{12}	c'^{19}	c'^{20}_1	c^{20}

C_{61} a'^{30} a^{30} b'^{12} $b_1'^{12}$ $b_2'^{12}$ $b_3'^{12}$ b^{12} c'^{20} $c_1'^{20}$ c^{20}

VII. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b'_3 en b'_4 en b, c' en c'_1 en c.

Droite en

C_2	a'		b'						c'		
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1					c'^2	c'_1	
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	b'_2				c'^3	c'^2_1	c
C_{11}	a'^6	a^4	b'^4	b'^3_1	b'^2_2	b'_3			c'^5	c'^3_1	c^2
C_{16}	a'^9	a^6	b'^5	b'^4_1	b'^3_2	b'^2_3	b'_4		c'^7	c'^5_1	c^3
C_{23}	a'^{13}	a^9	b'^7	b'^5_1	b'^4_2	b'^3_3	b'^2_4	b	c'^{10}	c'^7_1	c^5
C_{31}	a'^{17}	a^{13}	b'^9	b'^7_1	b'^5_2	b'^4_3	b'^3_4	b^2	c'^{13}	c'^{10}_1	c^7
C_{40}	a'^{22}	a^{17}	b'^{11}	b'^9_1	b'^7_2	b'^5_3	b'^4_4	b^3	c'^{16}	c'^{13}_1	c^{10}
C_{50}	a'^{27}	a^{22}	b'^{13}	b'^{11}_1	b'^9_2	b'^7_3	b'^5_4	b^4	c'^{20}	c'^{16}_1	c^{13}
C_{61}	a'^{33}	a^{27}	a'^{15}	b'^{13}_1	b'^{11}_2	b'^9_3	b'^7_4	b^5	c'^{24}	c'^{20}_1	c^{16}
C_{74}	a'^{40}	a^{33}	b'^{18}	b'^{15}_1	b'^{13}_2	b'^{11}_3	b'^9_4	b^7	c'^{29}	c'^{24}_1	c^{20}
C_{88}	a'^{47}	a^{40}	b'^{21}	b'^{18}_1	b'^{15}_2	b'^{13}_3	b'^{11}_4	b^9	c'^{34}	c'^{29}_1	c^{24}
C_{108}	a'^{55}	a^{47}	b'^{24}	b'^{21}_1	b'^{18}_2	b'^{15}_3	b'^{13}_4	b^{11}	c'^{39}	c'^{34}_1	c^{29}
C_{119}	a'^{63}	a^{55}	b'^{27}	b'^{24}_1	b'^{21}_2	b'^{18}_3	b'^{15}_4	b^{13}	c'^{45}	c'^{39}_1	c^{34}
C_{136}	a'^{72}	a^{63}	b'^{30}	b'^{27}_1	b'^{24}_2	b'^{21}_3	b'^{18}_4	b^{15}	c'^{51}	c'^{45}_1	c^{39}
C_{155}	a'^{82}	a^{72}	b'^{34}	b'^{30}_1	b'^{27}_2	b'^{24}_3	b'^{21}_4	b^{18}	c'^{58}	c'^{51}_1	c^{45}
C_{175}	a'^{92}	a^{82}	b'^{38}	b'^{34}_1	b'^{30}_2	b'^{27}_3	b'^{24}_4	b^{21}	c'^{65}	c'^{58}_1	c^{51}
C_{196}	a'^{103}	a^{92}	b'^{42}	b'^{38}_1	b'^{34}_2	b'^{30}_3	b'^{27}_4	b^{24}	c'^{72}	c'^{65}_1	c^{58}
C_{218}	a'^{114}	a^{103}	b'^{46}	b'^{42}_1	b'^{38}_2	b'^{34}_3	b'^{30}_4	b^{27}	c'^{80}	c'^{72}_1	c^{65}
C_{241}	a'^{126}	a^{114}	b'^{50}	b'^{46}_1	b'^{42}_2	b'^{38}_3	b'^{34}_4	b^{30}	c'^{88}	c'^{80}_1	c^{72}
C_{266}	a'^{139}	a^{126}	b'^{55}	b'^{50}_1	b'^{46}_2	b'^{42}_3	b'^{38}_4	b^{34}	c'^{97}	c'^{88}_1	c^{80}
C_{292}	a'^{152}	a^{139}	b'^{60}	b'^{55}_1	b'^{50}_2	b'^{46}_3	b'^{42}_4	b^{38}	c'^{106}	c'^{97}_1	c^{88}
C_{319}	a'^{166}	a^{152}	b'^{65}	b'^{60}_1	b'^{55}_2	b'^{50}_3	b'^{46}_4	b^{42}	c'^{115}	c'^{106}_1	c^{97}

. . . . . .

Les ordres donnent les séries des différences

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	19	20	21	22	. . .
1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	. . .	

les multiplicités en a', b', c' donnent

1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	13	13	14	. . .
1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	34	38	42	46	50	. . .		
1	2	3	5	7	10	13	16	20	24	29	34	39	45	51	58	65	. . .					

La caractéristique ne donne pas lieu à une transformation périodique. Cela justifie la conclusion, que les caractéristiques supérieures n'y conduisent non plus.

2.

VIII. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en b.

Droite en

$C_2\ a' \quad b' \quad c'$

$C_4\ a'^2\ a \quad b'^2\ c \quad c'^2\ c'_1$

$C_6\ a'^3\ a^2\ b'^2\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ b$

$C_7\ a'^3\ a^3\ b'^2\ c^2\ c'^3\ c'^3_1\ b^2$

$C_7\ a'^3\ a^3\ b'^2\ c^2\ c'^2\ c'^3_1\ b^3$

$C_6\ a'^2\ a^3\ b'^2\ c^2\ c' \quad c'^2_1\ b^3$

$C_4\ a' \quad a^2\ b' \quad c^2 \quad c'_1 \quad b^2$

$C_2 \quad a \quad c \quad b$

Droite

IX. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b.

Droite en	Droite
$C_2\ a' \quad b' \quad c'$	$C_2 \quad a \quad c \quad b$
$C_4\ a'^2\ a \quad b'^2\ c \quad c'^2\ c'_1$	$C_4\ a' \quad a^2\ b' \quad c^2 \quad c'_2 \quad b^2$
$C_6\ a'^3\ a^2 \quad b'^2\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ c'_2$	$C_6\ a'^2\ a^3\ b'^2\ c^2 \quad c'_1 \quad c'^2_2\ b^3$
$C_8\ a'^4\ a^3 \quad b'^2\ c^2\ c'^4\ c'^3_1\ c'^2_2\ b$	$C_8\ a'^3\ a^4\ b'^2\ c^2\ c' \quad c'^2_1\ c'^3_2\ b^4$
$C_{10}\ a'^5\ a^4\ b'^3\ c^2\ c'^4\ c'^4_1\ c'^3_2\ b^2$	$C_{10}\ a'^4\ a^5\ b'^2\ c^3\ c'^2\ c'^3_1\ c'^4_2\ b^4$
$C_{12}\ a'^6\ a^5\ b'^4\ c^3\ c'^4\ c'^4_1\ c'^4_2\ b^3$	$C_{12}\ a'^5\ a^6\ b'^3\ c^4\ c'^3\ c'^4_1\ c'^4_2\ b^4$

$C_{13}\ a'^6\ a^6\ b'^4\ c^4\ c'^4\ c'^4_1\ c'^4_2\ b^4$.

X. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\ b'\ c'$	$C_2\ a\ c\ b$
$C_4\ a'^2\ a\ b'^2\ c\ c'^2\ c'_1$	$C_4\ a'\ a^2\ b'\ c^2\ c'_3\ b^2$
$C_6\ a'^3\ a^2\ b'^2\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ c'_2$	$C_6\ a'^2\ a^3\ b'^2\ c^2\ c'_2\ c'^2_3\ b^3$
$C_8\ a'^4\ a^3\ b'^2\ c^2\ c'^4\ c'^3_1\ c'^2_2\ c'_3$	$C_8\ a'^3\ a^4\ b'^2\ c^2\ c'_1\ c'^2_2\ c'^3_3\ b^4$
$C_{12}\ a'^6\ a^4\ b'^3\ c^2\ c'^5\ c'^4_1\ c'^3_2\ c'^2_3\ b$	$C_{12}\ a'^4\ a^6\ b'^2\ c^3\ c\ c'^2_1\ c'^3_2\ c'^4_3\ b^5$
$C_{15}\ a'^8\ a^6\ b'^6\ c^3\ c'^6\ c'^5_1\ c'^4_2\ c'^3_3\ b^2$	$C_{15}\ a'^6\ a^8\ b'^3\ c^5\ c'^2\ c'^3_1\ c'^4_2\ c'^5_3\ b^6$
$C_{19}\ a'^{10}\ a^8\ b'^6\ c^6\ c'^7\ c'^6_1\ c'^5_2\ c'^4_3\ b^3$	$C_{19}\ a'^8\ a^{10}\ b'^5\ c^6\ c'^3\ c'^4_1\ c'^5_2\ c'^6_3\ b^7$
$C_{22}\ a'^{11}\ a^{10}\ b'^6\ c^6\ c'^8\ c'^7_1\ c'^6_2\ c'^5_3\ b^4$	$C_{22}\ a'^{10}\ a^{11}\ b'^6\ c^6\ c'^4\ c'^5_1\ c'^6_2\ c'^7_3\ b^8$
$C_{24}\ a'^{12}\ a^{11}\ b'^6\ c^6\ c'^8\ c'^8_1\ c'^7_2\ c'^6_3\ b^5$	$C_{24}\ a'^{11}\ a^{12}\ b'^6\ c^8\ c'^5\ c'^6_1\ c'^7_2\ c'^8_3\ b^9$
$C_{26}\ a'^{13}\ a^{12}\ b'^7\ c^6\ c'^8\ c'^8_1\ c'^8_2\ c'^7_3\ b^6$	$C_{26}\ a'^{12}\ a^{13}\ b'^6\ c^7\ c'^6\ c'^7_1\ c'^8_2\ c'^8_3\ b^8$
$C_{28}\ a'^{14}\ a^{13}\ b'^8\ c^7\ c'^8\ c'^8_1\ c'^8_2\ c'^8_3\ b^7$	$C_{28}\ a'^{13}\ a^{14}\ b'^7\ c^8\ c'^7\ c'^8_1\ c'^8_2\ c'^8_3\ b^8$

$C_{29}\ a'^{14}\ a^{14}\ b'^8\ c^8\ c'^8\ c'^8_1\ c'^8_2\ c^8_3\ b^8.$

XI. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en c'_4 en b.

Droite en

$C_2\ a'\ b'\ c'$

$C_4\ a'^2\ a\ b'^2\ c\ c'^2\ c_1$

$C_6\ a'^3\ a^2\ b'^2\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ c'_2$

$C_8\ a'^4\ a^3\ b'^2\ c^2\ c'^4\ c'^3_1\ c'^2_2\ c_3$

$C_{11}\ a'^6\ a^4\ b'^3\ c^2\ c'^5\ c'^4_1\ c'^3_2\ c'^2_3\ c_4$

$C_{15}\ a'^9\ a^6\ b'^5\ c^3\ c'^7\ c'^5_1\ c'^4_2\ c'^3_3\ c'^2_4\ b$

$C_{22}\ a'^{12}\ a^9\ b'^7\ c^5\ c'^9\ c'^7_1\ c'^5_2\ c'^4_3\ c'^3_4\ b^2$

$C_{28}\ a'^{15}\ a^{12}\ b'^8\ c^7\ c'^{11}\ c'^9_1\ c'^7_2\ c'^5_3\ c'^4_4\ b^3$

$C_{34}\ a'^{18}\ a^{15}\ b'^9\ c^8\ c'^{13}\ c'^{11}_1\ c'^9_2\ c'^7_3\ c'^5_4\ b^4$

$C_{41}\ a'^{22}\ a^{18}\ b'^{11}\ c^9\ c'^{15}\ c'^{13}_1\ c'^{11}_2\ c'^9_3\ c'^7_4\ b^5$

$C_{50}\ a'^{27}\ a^{22}\ b'^{14}\ c^{11}\ c'^{18}\ c'^{15}_1\ c'^{13}_2\ c'^{11}_3\ c'^9_4\ b^7$

$C_{60}\ a'^{32}\ a^{27}\ b'^{17}\ c^{14}\ c'^{21}\ c'^{18}_1\ c'^{15}_2\ c'^{13}_3\ c'^{11}_4\ b^9$

$C_{70}\ a'^{37}\ a^{32}\ b'^{19}\ c^{17}\ c'^{24}\ c'^{21}_1\ c'^{18}_2\ c'^{15}_3\ c'^{13}_4\ b^{11}$

$C_{80}\ a'^{42}\ a^{37}\ b'^{21}\ c^{19}\ c'^{27}\ c'^{24}_1\ c'^{21}_2\ c'^{18}_3\ c'^{15}_4\ b^{13}$

$C_{91}\ a'^{48}\ a^{42}\ b'^{24}\ c^{21}\ c'^{30}\ c'^{27}_1\ c'^{29}_2\ c'^{21}_3\ c'^{18}_4\ b^{15}$

. . . . . .

Les ordres des transformations successives donnent les séries des différences:

1 2 2 2 3 5 6 6 6 7 9 10 10 10 11 13 14 14 14...
1 0 0 1 2 1 0 0 1 2 1 0 0 1 2 1 0 0 1...

Les multiplicités en a' donnent

1 1 1 1 2 3 3 3 3 4 5 5 5 5 6 7 7 7 7 8...
0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1...

celles en b', c'

1 0 0 1 2 2 1 1 2 3 3 2 2 3 4 4 3 3 4 5 5 4 4 6...
et
1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5...

Il n'y a pas de periodicité, et non plus pour les caractéristiques supérieures.

XII. a' en a'_1 en a, b' en c, c' en c'_1 en b.

Droite en	Droite
C_2 a' b' c'	C_2 a c b
C_4 a'^2 a'_1 b'^2 c c'^2 c'_1	C_4 a'_1 a^2 b' c^2 c'_1 b^2
C_7 a'^3 a'^2_1 a b'^3 c^2 c'^4 c'^2_1 b	C_7 a' a'^2_1 a^3 b'^2 c^3 c' c'^2_1 b^4
C_{10} a'^4 a'^3_1 a^2 b'^4 c^3 c'^5 c'^4_1 b^2	C_{10} a'^2 a'^3_1 a^4 b'^3 c^4 c'^2 c'^4_1 b^5
C_{13} a'^5 a'^4_1 a^3 b'^5 c^4 c'^6 c'^5_1 b^4	C_{13} a'^3 a'^4_1 a^5 b'^4 c^5 c'^4 c'^5_1 b^6
C_{15} a'^5 a'^5_1 a^4 b'^6 c^5 c'^6 c'^6_1 b^5	C_{15} a'^4 a'^5_1 a^5 b'^5 c^6 c'^5 c'^6_1 b^6

C_{16} a'^5 a'^5_1 a^5 b'^6 c^6 c'^6 c'^6_1 b^6

XIII. a' en a'_1 en a'_2 en a, b' en c, c' en c'_1 en b.

Droite en	Droite
C_2 a' b' c'	C_2 a c b
C_4 a'^2 a'_2 b'^2 c c'^2 c'_1	C_4 a'_2 a^2 b' c^2 c'_1 b^2
C_7 a'^3 a'^2_1 a'_2 b'^3 c^2 c'^4 c'^2_1 b	C_7 a'_1 a'^2_2 a^3 b'^2 c^3 c' c'^2_1 b^4
C_{11} a'^4 a'^3_1 a'^2_2 a b'^5 c^3 c'^6 c'^4_1 b^2	C_{11} a' a'^2_1 a'^3_2 a^4 b'^3 c^5 c'^2 c'^4_1 b^6
C_{16} a'^6 a'^4_1 a'^3_2 a^2 b'^7 c^5 c'^8 c'^6_1 b^4	C_{16} a'^2 a'^3_1 a'^4_2 a^6 b'^5 c^7 c'^4 c'^6_1 b^8
C_{21} a'^7 a'^6_1 a'^4_2 a^3 b'^9 c^7 c'^{10} c'^8_1 b^6	C_{21} a'^3 a'^4_1 a'^6_2 a^7 b'^7 c^9 c'^6 c'^8_1 b^{10}
C_{26} a'^8 a'^7_1 a'^6_2 a^4 b'^{11} c^9 c'^{12} c'^{10}_1 b^8	C_{26} a'^4 a'^6_1 a'^7_2 a^8 b'^9 c^{11} c'^5 c'^{10}_1 b^{12}
C_{31} a'^9 a'^8_1 a'^7_2 a^6 b'^{13} c^{11} c'^{14} c'^{12}_1 b^{10}	C_{31} a'^6 a'^7_1 a'^8_2 a^9 b'^{11} c^{13} c'^{10} c'^{12}_1 b^{14}
C_{35} a'^{10} a'^9_1 a'^8_2 a^7 b'^{14} c^{13} c'^{15} c'^{14}_1 b^{12}	C_{35} a'^7 a'^8_1 a'^9_2 a^{10} b'^{13} c^{14} c'^{12} c'^{14}_1 b^{15}
C_{38} a'^{10} a'^{10}_1 a'^9_2 a^8 b'^{15} c^{14} c'^{16} c'^{15}_1 b^{14}	C_{38} a'^8 a'^9_1 a'^{10} a^{10} b'^{14} c^{15} c'^{14} c'^{15}_1 b^{16}
C_{40} a'^{10} a'^{10}_1 a'^{10}_2 a^9 b'^{16} c^{15} c'^{16} c'^{16}_1 b^{15}	C_{40} a'^9_2 a'^{10}_1 a'^{10} a^{10} b'^{15} c^{16} c'^{15} c'^{16}_1 b^{16}

C_{41} a'^{10} a'^{10}_1 a'^{10}_2 a^{10} b'^{16} c^{16} c'^{16} c'^{16}_1 b^{16}.

XIV. a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a , b' en c , c' en c'_1 en b .

Droite en

C_2 a' b' c'

C_4 a'^2 a'_1 b'^2 c c'^2 c'_1

C_7 a'^3 a'^2_1 a'_2 b'^3 c^2 c'^4 c'^2_1 b

C_{11} a'^4 a'^3_1 a'^2_2 a'_3 b'^5 c^3 c'^6 c'^4_1 b^2

C_{17} a'^6 a'^4_1 a'^3_2 a'^2_3 a b'^8 c^5 c'^9 c'^6_1 b^4

C_{24} a'^8 a'^6_1 a'^4_2 a'^3_3 a^2 b'^{11} c^8 c'^{12} c'^9_1 b^6

C_{32} a'^{10} a'^8_1 a'^6_2 a'^4_3 a^3 b'^{14} c^{11} c'^{16} c'^{12}_1 b^9

C_{41} a'^{12} a^{10}_1 a'^8_2 a'^6_3 a^4 b'^{18} c^{14} c'^{20} c'^{16}_1 b^{12}

C_{52} a'^{15} a'^{12}_1 a'^{10}_2 a'^8_3 a^6 b'^{23} c^{18} c'^{25} c'^{20}_1 b^{16}

C_{64} a'^{18} a'^{15}_1 a'^{12}_2 a'^{10}_3 a^8 b'^{28} c^{23} c'^{28} c'^{25}_1 b^{30}

. . . . . .

Les ordres des transformations successives fournissent les différences suivantes:

1 2 3 4 6 7 8 9 11 12 13 14 16 17 18 19 21 . . .
1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1 1 2 1 . . .

les multiplicités en a' , b' , c' donnent

1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 . . .
1 1 1 2 3 3 3 4 5 5 5 6 7 7 7 8 9 9 9 . . .
1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 . . .

La caractéristique ne donne point origine à une transformation périodique, de là on conclut la même chose pour les caractéristiques supérieures.

XV. a' en a'_1 en a , b' en c , c' en c'_1 en c'_2 en b.

Droite en

C_2 a' b' c'

C_4 a'^2 a'_1 b'^2 c c'^2 c'_1

C_7 a'^3 a'^2_1 a b'^3 c^2 c'^4 c'^2_1 c'_2

C_{11} a'^5 a'^3_1 a^2 b'^4 c^3 c'^6 c'^4_1 c'^2_2 b

C_{16} a'^7 a'^5_1 a^3 b'^6 c^4 c'^8 c'^6_1 c'^4_2 b^2

C_{23} a'^{10} a'^7_1 a^5 b'^9 c^6 c'^{11} c'^8_1 c'^6_2 b^4

C_{32} a'^{13} a'^{10}_1 a^7 b'^{12} c^9 c'^{14} c'^{11}_1 c'^8_2 b^6

C_{40} a'^{16} a'^{13}_1 a^{10} b'^{15} c^{12} c'^{18} a'^{14}_1 c'^{11}_2 b^8

C_{50} a'^{20} a'^{16}_1 a^{13} b'^{18} c^{15} c'^{22} c'^{18}_1 c'^{14}_2 b^{11}

C_{61} a'^{24} a'^{20}_1 a^{16} b'^{22} c^{18} c'^{26} c'^{22}_1 c'^{18}_2 b^{14}

C_{74} a'^{29} a'^{24}_1 a^{20} b'^{27} c^{22} c'^{31} c'^{26}_1 c'^{22}_2 b^{18}

. . . . . .

Les séries des différences formées pour les ordres et les multiplicités sont

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	19	.	.	.
1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	5	7	.	.	.
1	1	1	1	2	3	3	3	3	4	5	5	5	5	6	7	.	.	.
1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7	.	.	.

XVI. a' en a , b' en b'_1 en c , c' en c'_1 en b .

Droite en								Droite							
C_2	a'		b'			c'		C_2		a			c		b
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1		c'^2	c'_1	C_4	a'	a^2		b'_1	c^2	c'_1	b^2
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	c	c'^3	c'^2_1 b	C_7	a'^2	a^4	b'	b'^2_1	c^3	c'	c'^2_1 b^3
C_{10}	a'^5	a^4	b'^4	b'^3_1	c^2	c'^4	c'^3_1 b^2	C_{10}	a'^4	a^5	b'^2	b'^3_1	c^4	c'^2	c'^3_1 b^4
C_{12}	a'^6	a^5	b'^4	b'^4_1	c^3	c'^4	c'^4_1 b^3	C_{12}	a'^5	a^6	b'^3	b'^4_1	c^4	c'^3	c'^4_1 b^4

C_{13} a'^6 a^6 b'^4 b'^4_1 c^4 c'^4 c'^4_1 b^4

XVII. a' en a , b' en b'_1 en c , c' en c'_1 en c'_2 en b .

Droite en									Droite								
C_2	a'		b'			c'			C_2		a			c			b
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1		c'^2	c'_1		C_4	a'	a^2		b'_1	c^2		c'_2	b^2
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	c	c'^3	c'^2_1	c'_2	C_7	a'^2	a^4	b'	b'^2_1	c^3	c'_1	c'^2_2	b^3
C_{11}	a'^6	a^4	b'^4	b'^3_1	c^2	c'^5	c'^3_1	c'^2_2 b	C_{11}	a'^4	a^6	b'^2	b'^3_1	c^4	c'	c'^2_1	c'^3_2 b^5
C_{15}	a'^8	a^6	b'^5	b'^4_1	c^3	c'^6	c'^5_1	c'^3_2 b^2	C_{15}	a'^6	a^8	b'^3	b'^4_1	c^5	c'^2	c'^3_1	c'^5_2 b^6
C_{19}	a'^{10}	a^8	b'^6	b'^5_1	c^4	c'^7	c'^6_1	c'^5_2 b^3	C_{19}	a'^8	a^{10}	b'^4	b'^5_1	c^6	c'^3	c'^5_1	c'^6_2 b^7
C_{23}	a'^{12}	a^{10}	b'^7	b'^6_1	o^5	c'^8	c'^7_1	c'^6_2 b^5	C_{23}	a'^{10}	a^{12}	b'^5	b'^6_1	c^7	c'^5	c'^6_1	c'^7_2 b^8
C_{26}	a'^{13}	a^{12}	b'^8	b'^7_1	c^6	c'^8	c'^8_1	c'^7_2 b^6	C_{26}	a'^{12}	a^{13}	b'^6	b'^7_1	c^8	c'^6	c'^7_1	c'^8_2 b^8
C_{28}	a'^{14}	a^{13}	b'^8	b'^8_1	c^7	c'^8	c'^8_1	c'^8_2 b^7	C_{28}	a'^{13}	a^{14}	b'^7	b'^8_1	c^8	c'^7	c'^8_1	c'^8_2 b^8

C_{29} a'^{14} a^{14} b'^8 b'^8_1 c^8 c'^8 c'^8_1 c'^8_2 b^8

XVIII. a' en a , b' en b'_1 en c , c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b .

Droite en									
C_2	a'		b'			c'			
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1		c'^2	c'_1		
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	c	c'^3	c'^2_1	c'_2	
C_{11}	a'^6	a^4	b'^4	b'^3_1	c^2	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	c'_3
C_{16}	a'^9	a^6	b'^5	b'^4_1	c^3	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	c'^2_3 b
C_{22}	a'^{12}	a^9	b'^7	b'^5_1	c^4	c'^9	c'^7_1	c'^5_2	c'^3_3 b^2
C_{29}	a'^{16}	a^{12}	b'^9	b'^7_1	c^5	c'^{11}	c'^9_1	c'^7_2	c'^5_3 b^3
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres successifs sont visiblement les nombres $\binom{n}{2}+1$.

XIX. a' en a , b en b'_1 en b'_2 en c , c' en c'_1 en c'_2 en b .

Droite en

C_2	a'		b'				c'			
C_4	a'^2	a	b'^2	b'_1			c'^2	c'_1		
C_7	a'^4	a^2	b'^3	b'^2_1	b_2		c'^3	c'^2_1	c'_2	
C_{12}	a'^7	a^4	b'^5	b'^3_1	b'^2_2	c	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	b
C_{18}	a'^{10}	a^7	b'^7	b'^5_1	b'^3_2	c^2	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	b^2
C_{25}	a'^{14}	a^{10}	b'^9	b'^7_1	b'^5_2	c^3	c'^9	c'^7_1	c'^5_2	b^3
C_{34}	a'^{19}	a^{14}	b'^{12}	b'^9_1	b'^7_2	c^5	c'^{12}	c'^9_1	c'^7_2	b^5
C_{44}	a'^{24}	a^{19}	b'^{15}	b'^{12}_1	b'^9_2	c^7	c'^{15}	c'^{12}_1	c'^9_2	b^7
C_{55}	a'^{30}	a^{24}	b'^{18}	b'^{15}_1	b'^{12}_2	c^9	c'^{18}	c'^{15}_1	c'^{12}_2	b^9

. . . . . .

Les différences des ordres et des multiplicités en a' , b' sont

1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	.	. .
1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	.	. .
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	9	9	9	5	5.	. .

La périodicité est impossible, d'où l'on tire la conséquence analogue comme auparavant.

XX. a' en a'_1 en a , b' en b'_1 en c , c' en c'_1 en b .

Droite en

C_2	a'			b'			c'		
C_4	a'^2	a'_1		b'^2	b'_1		c'^2	c'_1	
C_8	a'^4	a'^2_1	a	b'^4	b'^2_1	c	c'^4	c'^2_1	b
C_{13}	a'^6	a'^4_1	a^2	b'^8	b'^4_1	c^2	c'^6	c'^4_1	b^2
C_{20}	a'^9	a'^6_1	a^4	b'^9	b'^8_1	c^4	c'^9	c'^6_1	b^4
C_{28}	a'^{12}	a'^9_1	a^6	b'^{10}	b'^9_1	c^8	c'^{12}	c'^9_1	b^6

. . . . . .

Les différences des ordres et des multiplicités en a' , b' sont

1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9 .

donc etc.

3.

XXI. a' en b, b' en c, c' en a.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\ b'\ c'$	$C_2\ b\ c\ a$
$C_4\ a'^2\ b\ b'^2\ c\ c'^2\ a$	$C_4\ a'\ b^2\ b'\ c^2\ c'\ a^2$

$C_5\ a'^2\ b^2\ b'^2\ c^2\ c'^2\ a^2$

XXII. a' en b, b' en c, c' en c'_1 en a.

Droite en

$C_2\ a'\ b'\ c'$

$C_4\ a'^2\ b\ b'^2\ c\ c'^2\ c'_1$

$C_6\ a'^2\ b^2\ b'^3\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ a$

$C_7\ a'^2\ b^2\ b'^3\ c^3\ c'^3\ c'^3_1\ a^2$

$C_7\ a'^2\ b^2\ b'^2\ c^3\ c'^3\ c'^3_1\ a^3$

$C_6\ a'^2\ b^2\ b'\ c^2\ c'^2\ c'^3_1\ a^3$

$C_5\ a'^2\ b^2\ b'\ c\ c'\ c'^2_1\ a^3$

$C_4\ a'^2\ b^2\ b'\ c\ c'_1\ a^2$

$C_3\ a'\ b^2\ b'\ c\ a$

$C_2\ b\ b'\ c$

$C_2\ b'\ c\ c'$

$C_3\ a'\ b'\ c\ c'^2\ c'_1$

$C_5\ a'^2\ b\ b'^2\ c\ c'^3\ c'^2_1\ a$

. . . . . .

La continuation ferait voir, que l'homographie n'apparaît jamais. Ce tableau et d'autres analogues qui seront fournis plus tard, sont pour Q^2 d'un intérêt particulier, parcequ'ils ne présentent le même progrès régulière des ordres que les autres tableaux.

XXIII. a' en b, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en a.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\ b'\ c'$	$C_2\ b\ c\ a$
$C_4\ a^2\ b\ b'^2\ c\ c'^2\ c'_1$	$C_4\ a'\ b^2\ b'\ c^2\ c'_2\ a^2$
$C_6\ a^2\ b^2\ b'^3\ c^2\ c'^3\ c'^2_1\ c'_2$	$C_6\ a'^2\ b^3\ b'^2\ c^2\ c'_1\ c'^2_2\ a^3$
$C_8\ a^2\ b^2\ b'^4\ c^3\ c'^4\ c'^3_1\ c'^2_2\ a$	$C_8\ a'^3\ b^4\ b'^2\ c^2\ c'\ c'^2_1\ c'^3_2\ a^4$
$C_{10}\ a^3\ b^2\ b'^4\ c^4\ c'^5\ c'^4_1\ c'^3_2\ a^2$	$C_{10}\ a'^4\ b^4\ b'^2\ c^3\ c'^2\ c'^3_1\ c'^4_2\ a^5$
$C_{12}\ a^4\ b^3\ b'^4\ c^4\ c'^6\ c'^5_1\ c'^4_2\ a^2$	$C_{12}\ a'^4\ b^4\ b'^3\ c^4\ c'^3\ c'^4_1\ c'^5_2\ a^6$
$C_{14}\ a^5\ b^4\ b'^5\ c^4\ c'^6\ c'^6_1\ c'^5_2\ a^4$	$C_{14}\ a'^4\ b^5\ b'^4\ c^5\ c'^4\ c'^5_1\ c'^6_2\ a^6$
$C_{16}\ a^6\ b^5\ b'^6\ c^5\ c'^6\ c'^6_1\ c'^6_2\ a^5$	$C_{16}\ a'^5\ b^6\ b'^5\ c^6\ c'^5\ c'^6_1\ c'^6_2\ a^6$

$C_{17}\ a'^6\ b'^6\ b'^5\ c^6\ c'^6\ c'^6_1\ c'^6_2\ a^6$

XXIV. a' en b , b' en c , c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en a.

Droite en

C_2	a'		b'		c'				
C_4	a'^2	b	b'^2	c	c'^2	c'_1			
C_6	a'^2	b^2	b'^3	c^2	c'^3	c'^2_1	c'_2		
C_8	a'^2	b^2	b'^4	c^3	c'^4	c'^3_1	c'^2_2	c'_3	
C_{11}	a'^3	b^2	b'^5	c^4	c'^6	c'^4_1	c'^3_2	c'^2_3	a
C_{15}	a'^5	b^3	b'^6	c^5	c'^8	c'^6_1	c'^4_2	c'^3_3	a^2
C_{20}	a'^7	b^5	b'^8	c^6	c'^{10}	c'^8_1	c'^6_2	c'^4_3	a^3
C_{26}	a'^9	b^7	b'^{11}	c^8	c'^{12}	c'^{10}_1	c'^8_2	c'^6_3	a^4
C_{33}	a'^{11}	b^9	b'^{14}	c^{11}	c'^{15}	c'^{12}_1	c'^{10}_2	c'^8_3	a^6
C_{40}	a'^{13}	b^{11}	b'^{16}	c^{14}	c'^{18}	c'^{15}_1	c'^{12}_2	c'^{10}_3	a^8
C_{47}	a'^{15}	b^{13}	b'^{18}	c^{16}	c'^{21}	c'^{18}_1	c'^{15}_2	c'^{12}_3	a^{10}
C_{55}	a'^{18}	b^{15}	b'^{21}	c^{18}	c'^{24}	c'^{21}_1	c'^{18}_2	c'^{15}_3	a^{12}
C_{65}	a'^{22}	b^{18}	b'^{25}	c^{21}	c'^{28}	c'^{24}_1	c'^{21}_2	c'^{18}_3	a^{15}
C_{76}	a'^{26}	b^{22}	b'^{29}	c^{25}	c'^{32}	c'^{28}_1	c'^{24}_2	c'^{21}_3	a^{18}
C_{87}	a'^{29}	b^{26}	b'^{33}	c^{29}	c'^{36}	c'^{32}_1	c'^{28}_2	c'^{24}_3	a^{21}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences successives des ordres et des multiplicités en a' , b' , c' forment les séries

1	2	2	2	3	4	5	6	7	7	7	8	10	11	11	.	. .
1	0	0	1	2	2	2	2	2	2	3	4	4	3	3	.	. .
1	1	1	1	1	1	2	3	3	2	2	3	4	4	4	.	. .
1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	.	. .

XXV. a' en a'_1 en b , b' en b'_1 en c' , c' en c'_1 en a.

Droite en

C_2	a'			b'			c'		
C_4	a'^2	a'_1		b'^2	b'_1		c'^2	c'_1	
C_8	a'^4	a'^2_1	b	b'^4	b'^2_1	c	c'^4	c'^2_1	a
C_{13}	a'^6	a'^4_1	b^2	b'^6	b'^4_1	c^2	c'^6	c'^4_1	a^2
C_{20}	a'^9	a'^6_1	b^4	b'^9	b'^6_1	c^4	c'^9	c'^6_1	a^4
C_{28}	a'^{12}	a'^9_1	b^6	b'^{12}	b'^9_1	c^6	c'^{12}	c'^9_1	a^6
C_{38}	a'^{16}	a'^{12}_1	b^9	b'^{16}	b'^{12}_1	c^9	c'^{16}	c'^{12}_1	a^9
C_{49}	a'^{20}	a'^{16}_1	b^{12}	b'^{20}	b'^{16}_1	c^{12}	c'^{20}	c'^{16}_1	a^{12}
C_{62}	a'^{25}	a'^{20}_1	b^{16}	b'^{25}	b'^{20}_1	c^{16}	c'^{25}	c'^{20}_1	a^{16}
C_{76}	a'^{30}	a'^{25}_1	b^{30}	b'^{30}	b'^{25}_1	c^{20}	c'^{30}	c'^{25}_1	a^{20}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences des ordres et des multiplicités sont

1	2	4	5	7	8	10	11	14	16	17	19	. . .
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	. . .
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	. . .

et la transformation ne retourne jamais à l'homographie

XXVI. a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en a.

Droite en

C_2	a'		b'			c'			
C_4	a'^2	b	b'^2	b'_1		c'^2	c'_1		
C_7	a'^3	b^2	b'^4	b'^2_1	c	c'^3	c'^2_1	c'_2	
C_{11}	a'^4	b^3	b'^6	b'^4_1	c^2	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	a
C_{16}	a'^6	b^4	b'^8	b'^6_1	c^4	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	a^2
C_{22}	a'^8	b^6	b'^{10}	b'^8_1	c^6	c'^{10}	c'^7_1	c'^5_2	a^3
C_{29}	a'^{10}	b^8	b'^{13}	b'^{10}_1	c^8	c'^{13}	c'^{10}_1	c'^7_2	a^5
C_{37}	a'^{13}	b^{10}	b'^{17}	b'^{13}_1	c^{10}	c'^{16}	c'^{13}_1	c'^{10}_2	a^7
C_{47}	a'^{17}	b^{13}	b'^{20}	b'^{17}_1	c^{13}	c'^{20}	c'^{16}_1	c'^{13}_2	a^{10}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences des ordres successifs et des multiplicités en a', b', c' sont

1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	19 . . .
1	1	1	1	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5		
1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	5	5 . . .	
1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7 . . .	

il n'y a pas de périodicité, donc etc.

XXVIII. a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a.

Droite en

C_2	a'		b'			c'		
C_4	a'^2	b	b'^2	b'_1		c'^2	c'_1	
C_7	a'^3	b^2	b'^4	b'^2_1	c	c'^3	c'^2_1	a
C_{10}	a'^4	b^3	b'^5	b'^4_1	c^2	c'^4	c'^3_1	a^2
C_{13}	a'^5	b^4	b'^6	b'^5_1	c^4	c'^5	c'^4_1	a^3
C_{15}	a'^6	b^5	b'^6	b'^6_1	c^5	c'^6	c'^5_1	a^4
C_{16}	a'^5	b^6	b'^6	b'^6_1	c^6	c'^6	c'^6_1	a^5
C_{14}	a'^5	b^5	b'^5	b'^6_1	c^6	c'^6	c'^6_1	a^6
C_{15}	a'^5	b^5	b'^4	b'^5_1	c^6	c'^5	c'^6_1	a^6
C_{13}	a'^4	b^5	b'^3	b'^4_1	c^5	c'^4	c'^5_1	a^6
C_{10}	a'^3	b^4	b'^2	b'^3_2	c^4	c'^2	c'^4_1	a^5
C_7	a'^2	b^3	b'	b'^2_1	c^3	c'	c'^2_1	a^4
C_4	a^1	b^2		b'_1	c^2		c'_1	a^2
C_2		b			c			a

Droite

Récapitulation des caractéristiques périodiques.

Maintenant on peut énumerer toutes les caractéristiques, où par la repetition le degré de la transformation se réduit à 1. La périodicité de ces caractéristiques n'est pas encore évidente dans ce moment, elle est latente.

1. a' en a ; b' en b ; c' en c'_1 en . . . $c'_m = c$	Indice $2(m+1)$
2. a' en a ; b' en b'_1 en b ; c' en c'_1 en c	Indice 12
3. a' en a ; b' en b'_1 en b'_2 en b ; c' en c'_1 en c	Indice 18
4. a' en a ; b' en b'_1 en b'_2 en b'_3 en b ; c' en c'_1 en c	Indice 30
5. a' en a ; b' en c ; c' en c'_1 en b	Indice 9
6. a' en a ; b' en c ; c' en c'_1 en c'_2 en b	Indice 14
7. a' en a ; b' en c ; c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b.	Indice 24
8. a' en $a'_1 \ldots a'_m = a$; b' en c , c' en a.	Indice $2(m+1)$
9. a' en a'_1 en a ; b' en c ; c' en c'_1 en b.	Indice 12
10. a' en a'_1 en a'_2 en a ; b' en c ; c' en c'_1 en b.	Indice 20
11. a' en b ; b' en c ; c' en a.	Indice 6
12. a' en b ; b' en c ; c' en c'_1 en c'_2 en a.	Indice 18
13. a' en b ; b' en b'_1 en c ; c' en c'_1 en b.	Indice 15

À la théorie de ces formes je fais précéder les paragraphes 4, 5, 6, qui présentent en soi un corps de recherches indépendantes et fournissent les ressources, sur lesquelles les conclusions ultérieures reposeront.

§ 4. — Recherche complète des transformations quadratiques, qui transforment une cubique du genre 1 en soi même.

Le contenu de ce § peut préciser et éclairer aussi les idées sur les corréspondances univoques d'une cubique en soi-même, dont plusieurs ont déjà attiré explicitement ou implicitement l'attention des géomètres.

Je me permets aussi de faire ressortir cette idée nouvelle qui consiste à étudier les corréspondances univoques sur les courbes algébriques en construisant la transformation plus particulière du plan qui embrasse la corréspondance donnée. Dans la 1ère partie j'ai eu l'occasion, de parler de telles transformations générales; pour les cubiques les transformations quadratiques ne sont pas connues, même on ne possède pas encore la totalité des transformations linéaires, comme je l'ai fait voir.

Lorsqu'une transformation quadratique reproduit une cubique, il faut que celle-ci contienne une corréspondance univoque. Donc en donnant aux cubiques harmoniques et équianharmoniques une place particulière, trois cas seront à distinguer.

I. — *Cubiques dont l'invariant absolu est arbitraire.*

Ici, les points de la courbe étant représentés par les arguments d'une intégrale elliptique de première espèce, il y a les deux séries de ∞^1 corréspondances univoques

$$u + u' \equiv \gamma \quad , \quad u - u' \equiv \gamma .$$

1. $u + u' \equiv \gamma$. Les droites uu' passent pas un point fixe $-\gamma$ de la courbe, variable avec la corréspondance, qui est d'elle-même involutive.

On arrive sur le champ à une des transformations demandées si l'on détermine sur chaque rayon par $(-\gamma)$ l'involution, qui possède $(-\gamma)$ comme point double et renferme la paire de points d'intersection avec C_3. Le lieu des seconds points doubles est une conique, la première polaire de $-\gamma$ par rapport à la cubique. Les trois paires de points principaux de cette transformation se confondent avec $(-\gamma)$. C'est une inversion particulière, caractérisée par ce que le centre d'invérsion tombe sur la conique. Donc: C_3 est réproduite par ∞^1 inversions spéciales.

En général soient aa', bb', cc' les arguments d'une Q^2 qui fait corréspondre les u aux u'. On aura

$$a + u_1 + u_2 \equiv 0$$
$$a' + u'_1 + u'_2 \equiv 0$$

donc

$$a + a' + 2\gamma \equiv 0 . \tag{1}$$

Cela montre que *deux points principaux accouplés sont allignés avec le point tangentiel du centre de la corréspondance.*

Le point a étant corréspondant au point $-(b' + c')$, on a

$$a - (b' + c') \equiv \gamma$$

et en retranchant (2) de (1)

$$a' + b' + c' \equiv -3\gamma$$

d'où

$$a + b + c \equiv 3\gamma .$$

On doit encore observer, que la corréspondance entre les points principaux et les points d'intersection des côtés opposés appartient à la seconde classe

$$a' - [-(b' + c')] \equiv -3\gamma .$$

Toute droite par a est projetée de $(-\gamma)$ sur la cubique en une droite par a' et ces deux faisceaux sont homographiques *). Ainsi on arrive à une démonstration simple et rigoureuse pour l'invariabilité du rapport anharmonique d'une cubique.

On prend enfin les trois homographies dans aa', bb', cc' pour celles d'une transformation quadratique sans tomber dans une inconséquence et on voit:

*) Cela est une conséquence de la construction univoque. Mais on le démontre aussi par des raisonnements purement géometriques faisant usage des théorémes sur le point opposé.

La corréspondance $u + u' \equiv \gamma$ *est contenue dans* ∞^2 *transformations quadratiques. Les deux triples fondamentaux sont homologiques par le point tangentiel de* $(-\gamma)$ *comme centre.*

Parmi les ∞^1 inversions sont aussi les neuf homographies harmoniques du plan (§ 3, I, partie) pour qui le centre d'inversion est confondu avec un point d'inflexion. Les ∞^2 transformations se réduisent pour une telle corréspondance à la seule homographie.

2. $u' - u \equiv \gamma$. Les propriétés de cette corréspondance sont bien connues et déduites soit par l'analyse soit géometriquement (Voir p. c. Harnack, Math. Ann. IV. et K).

Pour la Q^2, dont nous nous avons à occuper, on a

$$a' + u'_1 + u'_2 \equiv 0$$
$$a + u_1 + u_2 \equiv 0$$

d'où

$$a' - a \equiv -2\gamma. \tag{1}$$

Parceque a et le point d'intersection de $b'c'$ avec C_3 se correspondent, on a

$$a - [-(b' + c')] \equiv -\gamma$$
$$a + b + c' \equiv -\gamma \tag{1}$$

et en retranchant

$$a' + b' + c' \equiv -3\gamma$$
$$a + b + c \equiv -3\gamma.$$

Il y a ∞^2 Q^2 qui renferment notre corréspondance. Voir IV. F. de ce §.

Si l'on prend γ égal à $\frac{1}{m}$ d'une période, où m est un nombre entier, on peut faire, que $u - u' \equiv \gamma$ soit périodique. Cela donne lieu à des Q^2, qui contiennent une infinité de cycles d'un même indice. Voici donc l'importante addition à K, qu'il y a des transformations quadratiques, où au lieu d'un nombre fini de cycles de points une infinité en apparaît, tous réunis sur une C_3.

Néanmoins jamais pareille transformation ne pourra devenir périodique. En effet le premier transformé de a' est $a' + \gamma$, le second est $a' + 2\gamma$, savoir a. Donc: Lors qu'une Q^2 contient sur une cubique une corréspondance $u' - u \equiv \gamma$, chaque point principal sera nécessairement transformé par deux pas en son point principal accouplé.

Selon le § 3, n.° II, la périodicité est impossible.

II. *Cubiques harmoniques.*

Il y a ici une corréspondance surnuméraire

$$u' - iu \equiv \gamma$$

variable avec la valeur de γ. Les transformés successifs sont

$$u'' = iu + \gamma \; ; \; u''' = -u + \gamma(1 + i) \; ; \; u'''' = -iu + i\gamma \; ; \; u''''' = u.$$

La corréspondance est de soi-même périodique à l'indice 4.

Deux côtés opposés de chaque quadruple periodique passent en $-(1+i)\gamma$. Ces paires de droites forment une involution quadratique. Remarquons, qu'un point double est donné par

$$u_\delta \equiv \frac{\gamma}{1-i} + \frac{mk_1 + nk_2}{1-i}$$

ou

$$u_\delta \equiv \frac{\gamma(1+i)}{2} + \frac{1}{2}(1+i)(mk_1 + nk_2) \equiv \frac{\gamma(1+i)}{2} + \frac{1}{2}(mk_1 + nk_2 + nk_1 - mk_2)$$

ce qui est

$$\frac{\gamma(1+i)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma(1+i)}{2} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2).$$

Des points de contact des tangentes sortant du centre de la corréspondance deux conjugués harmoniques sont doubles dans la transformation, les deux autres se corréspondent involutivement.

On vérifie aisément que: *Lorsqu'on cherche le point d'intersection de* C_h *avec la droite des deux points doubles et qu'on tire de là les quatre tangentes, les quatre points de contact forment un quadruple périodique.*

[L'enveloppe des droites uu' est une *courbe de la quatrième classe*, qui possède $j_1 j_2$ et une droite τ par $-\gamma(1+i)$ comme tangentes doubles. Cette droite τ et la tangente t en $-\gamma(1+i)$ sont séparées harmoniquement par les droites doubles.

L'enveloppe a un 12 — tuple contact avec la cubique. Les points de contact se composent de deux quintuples bien distingués et des deux points doubles de la corréspondance].

Pour les Q^2 on aura

$$a + u_1 + u_2 \equiv 0$$
$$a' + u'_1 + u'_2 \equiv 0$$

donc

$$a' - ia \equiv -2\gamma$$

et de là

$$a' + b' + c' \equiv -3\gamma$$
$$a + b + c \equiv -3i\gamma.$$

Il existe ∞^2 Q^2, qui produisent la même corréspondance. Voir IV. (F). L'application aux transformations périodiques se simplifiera, si nous connaîtrons certaines paires particulières de points principaux. Je vais les déterminer.

α) Les points a', dont le premier transformé se confond avec le point accouplé a, sont à tirer de la congruence

$$ia' + \gamma \equiv -ia' - 2i\gamma$$

d'où

$$a' \equiv \gamma\frac{i-2}{2}\ ;\ a' \equiv \gamma\frac{i-2}{2} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\ ;\ a' \equiv \gamma\frac{i-2}{2} + \frac{k_1}{1}\ ;\ a' \equiv \gamma\frac{i-2}{2} + \frac{k_2}{2}$$

$$a \equiv \gamma\frac{1-2i}{2}\ ;\ a \equiv \gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\ ;\ a \equiv \gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{k_2}{2}\ ;\ a \equiv \gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{k_1}{2}.$$

Deux de ces couples sont allignés avec l'un, deux autres avec l'autre point double. Les quatre points a' ainsi que les a font un quadruple contangentiel et les deux

points tangentiels sont les deux transformés du centre de convergence, que je viens constater. [La droite par ces points tangentiels est la droite appellée τ ci-haut].

β) Les points a', dont les deuxièmes transformés coincident avec le point a accouplé, se déterminent par

$$-a' + \gamma(1+i) \equiv -ia' - 2i\gamma$$

donc

$$a' \equiv \gamma(2i-1) \qquad \text{ou} \qquad a' \equiv \gamma(2i-1) + \frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

$$a \equiv \gamma(2-i) \qquad\qquad a \equiv \gamma(2-i) + \frac{1}{2}(k_1+h_2).$$

On remarquera, que les points tangentiels définis tout à l'heure sous α) représentent une paire $a'a$ de β) et que l'autre paire est harmoniquement conjuguée à celle-là. La premiére paire contient, comme je viens de le dire, les deux transformés du centre de convergence, tandis que l'autre contient les deux transformés du troisième point sur $d_1 d_3$.

γ) Si l'on avait identité entre a et le troisième transformé de a', la congruence déterminante serait

$$-ia' + i\gamma \equiv -ia' - 2i\gamma,$$

c'est-à-dire, $3i\gamma \equiv 0$. Q^2 est réduite à une homographie. Ainsi on trouve les neuf corréspondances $u' - iu \equiv \gamma$, qui admettent une homographie du plan. Je termine en observant, que la corréspondance $u' - iu \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3}$ appartient au point d'inflexion

$$-\frac{(m+n)k_1 + (n-m)k_2}{3}.$$

III. — *Cubiques équianharmoniques.*

Le rapport des périodes étant $\frac{k_1}{k_2} = \varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, la corréspondance sur numéraire est

$$u' + \varepsilon u \equiv \gamma.$$

Les transformés successifs sont déterminés par

$$u'' - \varepsilon^2 u \equiv \gamma(1-\varepsilon)\ ;\ u''' + u \equiv -2\varepsilon\gamma\ ;\ u^{(4)} - \varepsilon u \equiv \varepsilon(\varepsilon-1)\gamma\ ;\ u^{(5)} - \varepsilon^2 u \equiv \varepsilon^2\gamma\ ;\ u^{(6)} - u \equiv 0.$$

Une pareille corréspondance est périodique à l'indice 6 indépendamment de γ.

La corréspondance uu' a un seul point double, $-\varepsilon\gamma$, uu'' en a trois $-\varepsilon\gamma$; $-\varepsilon\gamma + \frac{k_1-k_2}{3}$; $-\varepsilon\gamma + 2\frac{k_1-k_2}{3}$. (La constante $\frac{k_1-k_2}{3}$ qui entre dans ces valeurs numériques, ne dépend que de la représentation analytique de la courbe. Pourvu que cette représentation ne soit pas singulière, dégenerée, la constante ne pourra dévenir 0 ni ∞). Les deux nouveaux points forment une paire involutive et sont allignés avec $2\gamma\varepsilon$.

La corréspondance uu'' est une involution au centre $2\varepsilon\gamma$ et possède quatre points doubles

$$-\varepsilon\gamma\ ;\ -\varepsilon\gamma+\frac{k_1}{2}\ ;\ -\varepsilon\gamma+\frac{k_2}{2}\ ;\ -\varepsilon\gamma+\frac{k_1+k_2}{2}\,.$$

Les trois derniers points représentent un sextuple reduit à un triple.

Chaque sextuple est partagé en trois paires, qui sont allignées avec $2\gamma\varepsilon$ et ces triples de droites ressortent d'une homographie à l'indice 3, dont les droites doubles passent par $-\gamma\varepsilon$ et par la paire involutive.

Il est à présent aisé de construire la corréspondance: Lorsqu'on tire par un point de la courbe équianharmonique trois tangentes de la courbe, elles forment un triple, dont le covariant Hessien se compose de la quatrième tangente et d'une droite f. Il y a une corréspondance univoque contenant les points d'intérsection $i_1 i_2$ avec f comme points involutifs, les trois premiers points de contact comme triple périodique et le quatrième comme point double.

C'est interessant, que cette corréspondance à été découverte géometriquement dans le § 2, n.° 29.

[L'enveloppe des droites uu' est une courbe de la cinquième classe. Elle a cinq tangentes doubles, dont l'une passe par le centre de convergence $2\gamma\varepsilon$ et contient $i_1 i_2$, les quatre autres sont des droites avec la même *retta satellite*. Ces sont les quatre droites, qui contiennent trois transformés successifs de la correspondance. Voir β).

L'enveloppe est tangente à la cubique dans quinze points, dont l'un est le point double.

Ces enveloppes donnent lieu à une espèce particulière de recherches. Quelle est au varier de γ l'enveloppe des tangentes doubles?].

Afin de trouver les transformations Q^2, on a

$$a+u_1+u_2\equiv 0$$
$$a'+u'_1+u'_2\equiv 0$$

d'où

$$a'+\varepsilon a\equiv -2\gamma\,,$$

et par ce que $-(b+c)$ et a' se correspondent

$$a'-\varepsilon(b+c)\equiv\gamma\,,$$

donc

$$a'+b'+c'\equiv -3\gamma$$
$$a+b+c\equiv -3\varepsilon^2\gamma\,.$$

Les transformés de a', pris comme point du premier système, sont

$$\gamma-\varepsilon a'\ ;\ (1-\varepsilon)\gamma+\varepsilon^2 a'\ ;\ -2\varepsilon\gamma-a'\ ;\ \varepsilon(\varepsilon-1)\gamma+\varepsilon a'\ ;\ \varepsilon^2\gamma-\varepsilon^2 a'.$$

Les cas, où l'un d'eux se confond avec a, sont les suivants:

α) $\gamma-\varepsilon a'\equiv-\varepsilon^2 a'-2\varepsilon^2\gamma$, d'où

$$a'\equiv-\gamma\quad;\ a'\equiv-\gamma+\frac{k_1-k_2}{3}\quad;\ a'\equiv-\gamma+2\frac{k_1-k_2}{3}$$

$$a\equiv-\varepsilon^2\gamma\ ;\ a\equiv-\varepsilon^2\gamma+2\frac{k_1-k_2}{3}\ ;\ a\equiv-\varepsilon^2\gamma+\frac{k_1-k_2}{3}\,.$$

Il y a trois paires de points principaux, qui sont en outre transformés entre eux. Les droites de ces trois paires passent par le point double de la corréspondance; les trois points a' ainsi que les trois points a forment un triple conjugué par rapport au triangle Hessien.

$\beta)$ $(1-\varepsilon)\gamma+\varepsilon^2 a' \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma$, d'où

$$a' \equiv \frac{-1+2\varepsilon^2}{2}\gamma\,; \qquad a \equiv \frac{2-\varepsilon^2}{2}\gamma\,;$$

$$a' \equiv \frac{-1+2\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_1}{2}\,; \qquad a \equiv \frac{2-\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_2}{2}\,;$$

$$a' \equiv \frac{-1+2\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_2}{2}\,; \qquad a \equiv \frac{2-\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_1+k_2}{2}\,;$$

$$a' \equiv \frac{-1+2\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_1+k_2}{2}\,; \qquad a \equiv \frac{2-\varepsilon^2}{2}\gamma+\frac{k_1}{2}\,.$$

Les deux points tangentiels de ces quadruples et le point double sont allignés. Ces deux points sont les deux transformés du centre de convéigence vers les deux directions et déterminent avec le point $-4\gamma\varepsilon$ un triple de l'homographie mentionnée.

Les premiers transformés étant

$$\varepsilon\frac{\gamma}{2}\,;\ \varepsilon\frac{\gamma}{2}+\frac{k_1+k_2}{2}\,;\ \varepsilon\frac{\gamma}{2}+\frac{k_1}{2}\,;\ \varepsilon\frac{\gamma}{2}+\frac{k_2}{2}\,,$$

on voit que les quatre points a' sont en même temps ceux, qui avec leurs premiers et deuxièmes transformés sont alignés.

$\gamma)$ $-2\varepsilon\gamma - a' \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma$, d'où

$$a' \equiv 2\varepsilon^2\gamma\ ;\quad a' \equiv 2\varepsilon^2\gamma+\frac{k_1-k_2}{3}\ ;\quad a' \equiv 2\varepsilon^2\gamma+2\frac{k_1-k_2}{3}\,,$$

$$a \equiv 2\gamma\ ;\quad a \equiv 2\gamma+2\frac{k_1-k_2}{3}\ ;\quad a \equiv 2\gamma+\frac{k_1-k_2}{3}\,.$$

Il y a trois paires accouplées, qui contiennent un point et son troisième transformé par la corréspondance.

[On voit de plus, que les points de $\gamma)$ sont les points tangentiels des solutions de $\alpha)$, mais les deux systèmes se permutent en même temps. Toutefois il y a une autre relation avec $\alpha)$: Un point principal a' de $\gamma)$ se transforme vers les u en un point principal a de $\alpha)$, celui-ci après une transformation en le point a accouplé et celui-ci ensuite en a de $\gamma)$; les deux transformés subséquents sont allignés avec a' et a de $\alpha)$ et avec $2\gamma\varepsilon$. Ou bien:

La corréspondance porte le triple conjugué des points a' de $\gamma)$ au triple des points a' de $\alpha)$, puis au triple des points a de $\alpha)$ et enfin au triple des points a de $\gamma)$].

δ) $(\varepsilon - 1)\gamma + \varepsilon a' \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma$, d'où

$$a' \equiv \varepsilon(3\varepsilon - 1)\gamma \quad ; \quad a \equiv (3 - \varepsilon)\gamma .$$

Il n'y a qu'une seule paire, qui contient un point et son quatrième transformé. Les deux points sont le deuxième et le second transformé du centre de convergence.

[Le triple des points a' de α) et le triple des points tangentiels des a' de γ) sont perspectifs avec le point a' de δ) comme centre].

ε) $\varepsilon^2\gamma - \varepsilon^2 a' \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma$.

Cette congruence montre, que la coincidence demandée n'entre que si $3\varepsilon^2\gamma \equiv 0$ ce qui entraîne la réduction de Q^2 à une homographie.

La corréspondance déviendrait $u' + \varepsilon u \equiv \frac{K}{3}$. Voilà une homographie à l'indice 6, qui réproduit la cubique équianharmonique. Un point d'inflexion est double, deux autres allignés avec lui forment une paire involutive, et les six autres forment un sextuple périodique.

[Le faisceau syzygéthique est transformé de manière, que les cubiques harmoniques sont permutées trois à trois, de même les trois cubiques équianharmoniques restantes entre elles et trois des triangles d'inflexion, tandis que le quatrième triangle d'inflexion reste fixe].

Digression. — On peut tirer quelque profit des résultats géométriques du § 2 pour l'étude des courbes équianharmoniques. En effet:

Il y a quatre séries de triples conjugués, qui correspondent à l'augmentation des arguments de $\frac{k_1}{3}$, $\frac{k_2}{3}$, $\frac{k_1 + k_2}{3}$, $\frac{k_1 - k_2}{3}$. Sur la courbe équianharmonique la série, qui correspond au triangle Hessien se distingue des autres et ces triples sont

$$u \, , \; u + \frac{k_1 - k_2}{3} \, , \; u + 2\,\frac{k_1 - k_2}{3} .$$

Les droites, qui constituent la Hessienne, coupent la courbe en

$$\begin{array}{ccc} 0 \, , & \frac{k_1 - k_2}{3} \, , & 2\,\frac{k_1 - k_2}{3} \\ \frac{k_1}{3} \, , & 2\,\frac{k_1 + k_2}{3} \, , & \frac{k_2}{3} \\ 2\,\frac{k_1}{3} \, , & 2\,\frac{k_2}{3} \, , & \frac{k_1 + k_2}{3} . \end{array}$$

Les trois couples de α) peuvent entrer dans une transformation quadratique par ce que $a + b + c \equiv -3\varepsilon^2\gamma$, ce sera précisement la transformation du § 2; or au n.° 11 il a été démontré que les six points principaux et $s\, i_1\, i_2$ sont neuf points d'une configuration cyclique sur A_3. Cela conduit à un théorème important sur la distribution des paramètres le long d'une cubique équianharmonique.

Si W_1 est un sommet du triangle Hessien d'une cubique équianharmonique, dont

le côté opposé contient le point d'inflexion à l'argument 0, $u, \varepsilon u, \varepsilon^2 u$ sont les arguments de trois points allignés avec W_1. En général

$$\begin{array}{lll} u\ , & u+\frac{k_1-k_2}{3}\ , & u+2\frac{k_1-k_2}{3} \\ \varepsilon u\ , & \varepsilon u+\frac{k_1-k_2}{3}\ , & \varepsilon u+2\frac{k_1-k_2}{3} \\ \varepsilon^2 u\ , & \varepsilon^2 u+\frac{k_1-k_2}{3}\ , & \varepsilon^2 u+2\frac{k_1-k_2}{3}\ , \end{array}$$

sont les points d'une configuration cyclique. Les trois colonnes de cette matrice et les 6 combinaisons qui entrent dans le déterminant représentent des triples allignés.

Voilà de nouvelles ressources pour la récherche des cubiques équianharmoniques.

2. $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Cette corréspondance résulte de la répétition de la précedente. Elle a les trois points doubles $\frac{\gamma}{3}(1-\varepsilon^2)$; $\frac{\gamma}{3}(1-\varepsilon^2)+\frac{k_1-k_2}{3}$; $\frac{\gamma}{3}(1-\varepsilon^2)+2\frac{k_1-k_2}{3}$ et la transformation successive

$$u'' - \varepsilon^2 u \equiv -\varepsilon^2 \gamma .$$

Pour les Q^2, qui la contiennent, les conditions

$$a + u_1 + u_2 \equiv 0$$
$$a' + u'_1 + u'_2 \equiv 0$$

donnent

$$a' - \varepsilon a \equiv -2\gamma ;$$

et de

$$a' + \varepsilon (b + c) \equiv -3\gamma$$

on tire

$$a' + b' + c' \equiv -3\gamma$$
$$a + b + c \equiv 3\varepsilon\gamma .$$

Quant aux points principaux, qui se transforment dans les points principaux accouplés, on calcule de

$$\varepsilon a' + \gamma \equiv \varepsilon^2 a' + 2\gamma\varepsilon^2$$

$$\begin{array}{ll} a' \equiv \frac{\gamma}{3}(4\varepsilon - 1)\ ; & a \equiv \frac{\gamma}{3}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) \\ a' \equiv \frac{\gamma}{3}(4\varepsilon - 1) + \frac{k_1-k_2}{3}\ ; & a \equiv \frac{\gamma}{3}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) + \frac{k_1-k_2}{3} \\ a' \equiv \frac{\gamma}{3}(4\varepsilon - 1) + 2\frac{k_1-k_2}{3}\ ; & a \equiv \frac{\gamma}{3}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) + 2\frac{k_1-k_2}{3}\ . \end{array}$$

Deux points accouplés $a'a$ sont allignés avec un des trois points doubles. Les trois points a' forment un triple conjugué au triple Hessien et de même les trois points a.

Les points à *sont les premiers transformés des points tangentiels des points doubles et les points* a *en sont les cinquièmes transfomés.*

[Les neuf points a' a d forment une configuration (A).

L'enveloppe des droites $u\,u'$ est une courbe de la troisième classe, qui est tangente à C_e en d_1, d_2, d_3, et

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\gamma}{3}(\varepsilon-1)+\mu\frac{k_1-k_2}{3} \\ \frac{\gamma}{3}(\varepsilon^2-\varepsilon)+\mu\frac{k_1-k_2}{3} \end{array}\right\} \mu=0,1,2.$$

Ces neuf points forment une configuration cyclique et restent les mêmes en permutant entre eux les trois triples conjugués. On conclut:

La même enveloppe appartient à trois congruences, elle a donc trois séries de triples circonscrits qui sont inscrits à la cubique..

[C'est le même théorème que j'ai démontré géometriquement au § 2].

Q^2 se réduit à une homographie, si $3\gamma\equiv 0$. Dans ce cas les trois points doubles forment un triple conjugué par rapport au triangle Hessien, et in-et circonscrit à la cubique. On compte six pareilles homographies.

[Voir une démonstration stéréométrique de ces homographies dans mon travail: « Ueber eine ein-dreideutige Abbildung einer Fläche dritter Ordnung ». Cr. J. Bd. 95, p. 147, et d'autre part le § 3, I. partie de ce Mémoire ci].

IV. — *Propriétés communes à toutes les corréspondances.*

Les conclusions précédentes seront appliquées sous des formes très variées au développement de la théorie et je crois nécessaire, de résumer ici quelques principes plus généraux et très féconds, qui dérivent des raisonnements particuliers exposés tout à l'heure.

A) Lorsqu'une transformation quadratique réproduit une cubique en y produisant 0, 1, 2, 3, 4 points doubles, la corréspondance sur la cubique aura respectivement la forme

$$u-u'\equiv\gamma\ ;\ u'+\varepsilon u\equiv\gamma\ ;\ u'-iu\equiv\gamma\ ;\ u'-\varepsilon u\equiv\gamma\ ;\ u'+u\equiv\gamma.$$

Dans le second et quatrième cas la cubique sera équianharmonique, dans le troisième cas elle sera harmonique.

B) Dans tous les cas entre les points principaux et les points d'intersection avec la droite principale opposée existe une corréspondance de la forme

$$u'-u\equiv\gamma',$$

où γ' est toujours $\equiv -3\gamma$ quand on passe du système des a' au système des a.

C) Entre deux points principaux accouplés c'est-à-dire, entre deux points, qui projettent la corréspondance par deux faisceaux homographiques, existe une corréspondance toujours de la même éspèce que la corréspondance donnée, mais de la sorte, que ses points doubles sont les points tangentiels des points doubles de la corréspondance donnée. Ou bien la constante γ' est $\equiv -2\gamma$.

Ainsi naît *une série de corréspondances, sur lesquelles on peut faire réposer une méthode pour l'étude des transformations périodiques.*

D) Lorsqu'on projette une des corréspondances sur C_3 d'un point variable g, on obtiendra une corréspondance de la même espèce

$$u' - u \equiv \gamma \ , \ u' + \varepsilon u_1 \equiv -(\gamma + \varepsilon g) \ ; \ u' + iu \equiv -(\gamma - (1+i)g) \ , \ u' - \varepsilon u \equiv -\gamma(-(1-\varepsilon)g,$$
$$u' + u \equiv -(\gamma - 2g) \ ,$$

qui dans le premier cas seulement est identique avec la donnée.

Il y a donc des points, desquels on peut projéter une corréspondance donnée en une autre donnée. On en trouve respectivement ∞^1, 1, 2, 3, 4. Ce sont: 1. tous les points de la courbe; 2. le résidu des deux points doubles; 3. deux points formant avec les quatre points doubles un quadrilatère complet; 4. les trois centres d'homologie des deux triples $d i_1 i_2$; 5. quatre points contangentiels, les résidus de deux points doubles quelconques pris dans les deux corréspondances.

En particulier, il y a des points qui projettent une corréspondance donnée en elle-même.

E) *Quelle que soit la corréspondance, les transformations quadratiques* Q^2 *qui la contiennent forment un réseau* (Voir K), *savoir un système tel, que par une paire de points donnée une seule* Q^2 *est déterminée.*

En effet je vais déterminer le nombre des droites $a' p'$ qui passent par un point q donné, p. e. sur C_3, quand $a\ p$ passe par un point fixe g. Une droite γ par g coupe C_3 en trois points dont chacun peut être considéré comme point a, la corréspondance étant seule, le point a relatif à a se trouve univoquément, et par suite le rayon γ' corréspondant à γ. Afin que cette droite passe par q, le point q doit être compté ou comme a' ou comme p' ou comme p et on en arrive univoquément aux points corréspondants a, p, p' et par suite à trois rayons γ' passant par q. Les droites γ' qui corréspondent à toutes les droites γ par g forment une enveloppe de la 3ième classe. Les trois droites passant par un point arbitraire q du plan ressortent d'une seule transformation quadratique, donc $g\,q$ déterminent une seule Q^2.

[F) Remarquons d'abord qu'un triple donné sur C_3 appartient à 18 corréspondances de chacune des 5 espèces comme triple principal. Je dois supprimer ici les recherches variées qui suivent de cette remarque.

On peut désigner en suivant un procédé usuel l'ensemble de toutes les transformations, qui reproduisent une même C_3, comme un groupe, plus particulièrement toutes les transformations birationnelles, qui réproduisent une C_3. Or je dis:

1. *Toutes les transformations birationelles, qui réproduisent une* C_3, *sont déductibles par composition des transformations quadratiques établies dans ce paragraphe.*

Dém.: Tous les points fondamentaux de la transformation sont contenus dans C_3. Prenez les trois points fondamentaux supérieurs pour points principaux $a\ b\ c$ d'une transformation quadratique et cherchez la corréspondance convenable et alors les trois points $a'\ b'\ c'$. L'application de cette Q^2 réduit la transformation donnée à une autre de moindre dégré, qui réproduit encore la C_3. Cette opération se poursuit, jusqu'à ce qu'on arrive à une transformation quadratique.

Toutes les transformations birationnelles, qui produisent une même corréspondance sur C_3, forment aussi un groupe, etc.

Toutes les transformations birationnelles, qui produisent sur C_3 des corréspondances de l'espèce $u' - u \equiv \gamma$, forment ensemble un groupe].

§ 4. — Transformations quadratiques, qui réproduisent une cubique rationnelle.

I. — *Cubique à point double.*

Il y a deux cas à distinguer:

a) Deux points principaux accouplés $a\,a'$ sont réunis dans le point double. Une autre paire de points principaux $b\,b'$ est contenu sur C_3^4.

Dans C_3^4 se trouvera une homographie. Soit $A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D = 0$ son équation. Si $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = k$ est la condition, pour que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ soient trois points allignés on a en même temps

$$b\alpha_1\alpha_2 = k \quad , \quad b'\frac{B\alpha_1 + D}{A\alpha_1 + C}\cdot\frac{B\alpha_2 + D}{A\alpha_2 + C} = k$$

donc

$$b'\left(B^2\frac{k}{b} + DB(\alpha_1 + \alpha_2) + D^2\right) = k\left(A^2\frac{k}{b} + AC(\alpha_1 + \alpha_2) + C^2\right)$$

identiquement pour tout α_1. Donc on a

$$b'DB = kAC$$

et d'après pour la valeur de b

$$bb'D^2 + b'kB^2 - bk^2C^2 - k^2A^2 = 0\,,$$

d'où

$$b' = \frac{AC}{DB}\,, \quad b = \frac{AB}{CD}\,.$$

Il n'y a donc qu'une seule transformation quadratique, qui contient l'homographie. Les points cc' se trouvent univoquement.

Sans tout calcul on peut réconnaître, que le problême a une seule solution. En effet aux deux points infiniment proches au point double corréspondent vers chaque direction deux points, dont la droite coupe C_3^4 en b réspectivement en b' et contient c ou c'.

b) Tous les 6 points principaux sont situés sur C_3^4. Le point double se corréspond lui-même. Les deux points voisins sont ou des points doubles de l'homographie ou une paire involutive.

En cas *d'homographie* elle soit $B\alpha + C\beta = 0$. Alors $b\alpha_1\alpha_2 = k$ ou $b\,\frac{C^2}{B^2}\,\beta_1\beta_2 = k$ entraîne $b'\beta_1\beta_2 = k$, donc $b' = b\,\frac{C^2}{B^2}$.

On a de plus

$$\frac{k}{bc}B + Ca' = 0\,, \quad \text{donc} \quad kB + Ca'bc = 0\,,$$

d'où

$$abc = -k\,\frac{B^3}{C^3}\,, \quad a'b'c' = k\,\frac{C^3}{B^3}\,.$$

Il existe une double infinité de transformations quadratiques, qui contiennent l'homographie donnée.

Entre deux points principaux accouplés existe une homographie, qui naît de la répétition de l'homographie donnée ou le deuxième transformé d'un point b' est toujours le point b corréspondant.

Le réseau*) ne contient aucune transformation périodique. Seulement quand l'homographie étant de l'indice 3 on a $C^3 = -B^3$, la seule transformation linéaire, à laquelle tout le réseau se réduit a l'indice 3.

Pour *l'involution* soit $A\alpha\beta + D = 0$ sa définition. Il suit de $b\alpha_1\alpha_2 = k$ et $b'\beta_1\beta_2 = k$, qu'on a $b\,b'\,\frac{D^2}{A^2} = k^2$ et de $A\,\frac{k}{bc}\,a' + D = 0$ ou $A\,k\,a' + D\,bc = 0$, qu'on a

$$a'\,b'\,c' = -k^3\,\frac{A^3}{D^3}\,,\quad abc = -k^3\,\frac{A^3}{D^3}\,.$$

Les droites aa', bb', cc' passent en un point fixe $\frac{D^2}{A^2k}$ de la courbe C_3^4.

La réunion de ces paires à une transformation quadratique produit entre les droites du faisceau une rélation trilinéaire.

Il y a une double infinité de transformations quadratiques, qui contiennent l'involution. Il n'y a pas ici une transformation quadratique de la 1ière éspèce, parceque le point $\frac{D^2}{A^2k}$ n'est un point double de l'involution que pour

$$\frac{D^2}{A^2k} = \sqrt{-\frac{D}{A}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A^3}{D^3} = -\frac{1}{k^2}\,.$$

Dans ce cas on a $a'b'c' = k$, donc: Les trois involutions qui permutent entre eux les points d'infléxion, donnent lieu à des homographies ternaires, qui alors sont trois homologies harmoniques.

Observation. Les deux sous-cas de *b)* sont les dégénérations de $u - v \equiv \gamma$ et $u + v \equiv \gamma$.

II. — *Courbe à rébroussement.*

On a deux cas tout-à-fait analogues aux précédents. La premier se traite identiquement à *a)*, dans l'autre on a un point double sur le point de rébroussement. L'homographie dans la courbe soit

$$B\alpha + C\beta + D = 0$$

et la condition d'allinéàtion

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\,.$$

On tire de $b + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $b' + \beta_1 + \beta_2 = 0$

$$Bb + Cb' - 2D = 0$$

et $B(-b + a) + Cc' + D = 0$ les conditions

$$a' + b' + c' = \frac{3D}{C}\,,\quad a + b + c = \frac{3D}{B}\,.$$

Le réseau de transformations quadratiques renferme des transformations périodiques et notamment quelques unes, qui nous serviront plus tard de formes primaires. Voir le § 37.

*) cf. § 4, IV.

§ 6. — Transformations quadratiques, qui réproduisent une conique.

Pour qu'une conique C_2 soit transformée en soi-même, il faut que C_2 contienne deux paires de points principaux accouplés et une homographie.

On peut donc supposer dans C_2 une homographie, prendre alors des points arbitraires comme aa', bb', tirer des droites de b', a' et b, a aux points corréspondants à a, b et a', b' vers la seconde ou la première direction réspectivement: les points d'intérsection de ces deux paires de droites sont c', c. Au moyen des faisceaux homographiques a, a' et b, b' qui projettent l'homographie sur C_2, on complète la transformation quadratique.

L'homographie étant choisie périodique et deux points principaux accouplés étant pris dans le même cycle, il ne s'agirait que de la recherche *si les points* c, c' *construits subséquemment sont enchaînés par la transformation quadratique.* Cela suffirait pour établir les considérations de ce paragraphe indépendamment des transformations périodiques construites plus tard. Ici elles ne sont pas poussées si loin. Plutôt on a démontré, que les points principaux sur C_2 peuvent être pris de la sorte que la paire $c'c$ remplisse certaines conditions connues d'avance à savoir que la droite $c'c$ touche C_2 en un point double; cela étant une condition qui sera reconnue nécessaire à la périodicité. Quand on a choisi l'homographie périodique d'un indice qui convient à la périodicité de la transformation suivant les recherches des §§ 10, 11, 16, 30, 31, toutes les conditions seront remplies, qu'on peut imposer aux points principaux sur C_2. Les figures ainsi obtenues seront idéntiques à celles, qui seront plus tard par une autre voie trouvées appartenir à ces caractéristiques.

L'enchaînement des points $c'c$ se conclût alors de soi-même.

I. Supposons, qu'on ait sur C_2 les chaînes a', a'_1, a et b', b'_1, b, prises dans une homographie périodique. Si l'on prend $a'a, b'b$ comme deux paires de points principaux d'une Q^2, on cherchera les points corréspondants $\alpha\beta$ de a et b vers le sens $a'a$ et on ménera des droites à b', a'. Ces deux lignes se coupent en c'. Or entre $a'a$ et $b'b$ subsiste une homographie ayant comme points doubles les points doubles de la donnée, $a'b$ et $b'a$ se coupent donc sur $d_1 d_2$. Par la même raison $b\alpha'$ et $a\beta'$ se coupent sur $d_1 d_2$, α' et β' étant les transformés de a' et b' vers aa'. Visiblement il est impossible, que cc' touche la conique C_2.

II. Les chaînes $a'a$ et $b'b'_1 b'_2 b$ étant supposées, les points a', a, b', b en soient les transformés comme auparavant. Laissons invariable l'homographie et faisons varier b; ainsi $a'b$ et $b'a$ décriront deux faisceaux homographiques, dont le lieu engendré est une conique Γ par $d_1 d_2$ et $a'a$ et contient les points c. Analoguément le lieu de c' est une conique Γ' par $d_1 d_2 aa'$ de façon que les rapports anharmoniques $(aa'd_1 d_2)$ et $(aa'd_1 d_2)$ sur les coniques respectives sont égaux.

Si un point variable sur $d_1 d_2$ est lié avec deux points a' et a des deux coniques Γ, Γ', les deux autres points d'intersection de ces droites avec Γ, Γ' sont deux points c, c'. En considérant les poles $\pi\pi'\pi''$ de $d_1 d_2$ par rapport à C_2, Γ, Γ' on voit, que $\pi'a'$ et $\pi''a$ ne se coupent jamais sur la droite $d_1 d_2$. La droite cc' enveloppe donc une conique. Il y a certainement une tangente de celle-ci qui passe par d_1; celle-ci donne une tran-

sformation, dont la droite cc' doit couper C_2 en d_2 ou la toucher en d_1. Mais le premier cas est à rejeter, parcequ'on demontre facilement, que $d_1 d_2$ ne devient jamais tangente de l'enveloppe cc'.

III. Sur C_2 les suites $c'c'_1c$, $b'b'_1b'_2\ b$ soient données. Les points transformés de c, c', b, b' vers les diréctions disponibles soient $\gamma\gamma'\ \beta\beta'$; les droites $c'\beta'$, $b'\gamma'$ se coupent en a', $c\beta$ et $b\gamma$ en a, et puisque ca, $b'a'$ et $c'a'$, ba se coupent constamment sur $d_1 d_2$, a et a' ne tomberont jamais sur $d_1 d_2$.

La droite aa' enveloppe une conique, dont la tangente passant par d_1 fournit la solution demandée.

IV. De la même manière la variété corréspondante s'obtient en supposant sur C_2 les suites $c'c'_1c$ et $b'b'_1b'_2b'_3b$.

V. Etant prises les suites $a'a$ et $c'c'_1c$, il n'est pas nécessaire, que $b'\ldots b$ soient allignés et que la droite d'allinéation touche la conique en un point double; toutefois cette dernière position a lieu deux fois pendant le mouvement de $c'c'_1c$ sur C_2 et cela donne chaque fois une certaine variété.

Les suites $a'a$, $c'c'_1c$ se trouvent aussi dans la 5ème variété du § 9, où $c'c'_1\ c$ et $b'b_1b'_2b$ sont dans une conique. Toutefois on trouve la solution en se servant de cette propriété, que $a'b'_1bd_4$ ou $ab'_2b'd_1$ étant allignés, et $c'c'_1c$ étant variables, le lieu de b est une conique, qui rencontre la droite tirée de a' à un des deux points doubles sur C_2 en un seul point libre; donc on tombe deux fois sur notre variété.

Les mêmes suites se présentent au § 9 *d*), où à l'extérieur de C_2 $b'b'_1b'_2b'_3b$ sont alignés et cette droite est tangente à C_2 en d_2 ou (pour une autre variété) $b'b'_1b'_2b'_3b$ et $c'c'_1c$ sont dans une conique. Ces variétés ne dépendent donc que de l'indice de la périodicité sur C_2.

VI. Si aa', $b'b'_1b'_2b'_3b$ sont les suites sur C_2, la droite cc' enveloppe une conique qui conduit comme dans les autres cas à une solution.

Dans tous ces cas on peut faire, que C_2, Γ, Γ' soient des cercles. Les points principaux variables décrivent alors des séries congruentes et on peut démontrer que la conique enveloppe a le centre de C_2 comme foyer. Cela montre, que la tangente commune avec C_2 touche C_2 en d_1 ou d_2.

Voilà l'ensemble des transformations de la Ière éspèce du § 3, qui jouissent d'une conique anallagmatique. Les transformations de la IIème et IIIème espèce à une conique anallagmatique se trouvent dans les §§ respectifs.

§ 7. — Sur une classe de transformations quadratiques (apériodiques) avec des points principaux enchaînés.

Certaines transformations douées de cette propriété ont été mentionnées au commencement du § 6; une autre transformation semblable sera traitée à long dans § le 8. Une classe particulière et étendue sera dècrite dans ce qui suit.

Supposons que a' corresponde à a et que tous les transformés entre c' et c soien-alignés avec c' et c. Sous la condition que la transformation soit périodique, l'homographie dans aa' et celle dans cc' seront périodiques. Le point d'intérsection de ces

droites est un point fixe d_1 de la transformation. Si après ρ transformations c' vient en c, on aura en prenant $d_1 d_2 d_3$ comme triangle de reférence (d_2, d_3 pour c et c')

$$\mu_a = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{x_1}{x_3} \qquad \nu_c = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\mu_{a'} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \varepsilon_n \qquad \nu_{c'} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \varepsilon^\rho{}_m$$

$$\mu_{a_1} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} : \varepsilon_n \qquad \nu_{c_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \varepsilon_m$$

$$\mu_{a'_1} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \varepsilon^2{}_n \qquad \nu_{c'_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \varepsilon_m{}^{\rho+1}.$$

Soit $\delta_n = \varepsilon^2{}_n - 1$, $\delta_m = \varepsilon_m{}^{\rho+1} - 1$, $\delta_n - \delta_m = \varepsilon^2{}_n - \varepsilon_m{}^{\rho+1}$.
Alors on trouve les équations

$$\begin{array}{l|l}
a_1 c' (b') & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \varepsilon^\rho{}_m x_2 + \alpha_3 \varepsilon_n x_3 = 0 \\
a' c_1 (b') & \alpha_1 x_1 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_m} x_2 + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_m} x_3 = 0 \\
a c'_1 (b) & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \varepsilon_m{}^{\rho+1} x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\
a'_1 c (b) & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_n + \frac{\alpha_3}{\varepsilon^2{}_n} x_3 = 0,
\end{array}$$

et pour les points principaux b, b',

$$b \equiv x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\varepsilon^2{}_n - \varepsilon_m{}^{\rho+1}}{\alpha_1} : -\frac{\delta_n}{\alpha_2} : \frac{\varepsilon^2{}_n \delta_m}{\alpha_3}$$

$$b' \equiv x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\varepsilon^2{}_n - \varepsilon_m{}^{\rho+1}}{\alpha_1} : -\frac{\delta_m \varepsilon_m}{\alpha_2} : \frac{\varepsilon_n \delta_m}{\alpha_3}.$$

La conique de direction pour b, b' est déterminée par l'équation

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

où l'on a

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{\delta_m - \delta_n}{\alpha_1} (\varepsilon_m \varepsilon_n - 1) : \frac{\delta_n}{\alpha_2} (\varepsilon_n - 1) \varepsilon_m : \frac{\delta_m}{\alpha_3} (\varepsilon_m - 1) \varepsilon^2{}_n.$$

La conique se décompose, quand

1.) $\delta_n = \delta_m$,
2.) $\varepsilon_m \varepsilon_n = 1$.

Ces deux cas seront recherchés:
1.) b et b' et par conséquent tous leurs transformés se trouvent sur $d_2 d_3$.

Il s'agit de l'homographie sur $d_2 d_3$. La droite ac a l'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0$$

et le point d'intérsection avec $d_2 d_3$ est $x_2 : x_3 = -\alpha_3 : \alpha_2$; donc le rapport anharmonique caractéristique $d_2\, d_3\, b'\, (ac)$ devient

$$\frac{\delta_n\, \varepsilon_m}{\delta_m\, \varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n}.$$

Les transformés successifs de b' sont donc

$$-\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n}\right)^2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\,,\ -\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n}\right)^3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\,,\ \ldots -\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n}\right)^i \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\,,$$

et si cela doit conduire à b, il faut que une fois $-\frac{1}{\varepsilon^2_n}$ résulte comme paramètre, c'est à dire que

$$\varepsilon^i_m = \varepsilon_n^{\,i-2}$$

a) n impair. Alors l'équation $\delta_n = \delta_m$ dit, que $\varepsilon_m^{\rho+1}$ est une racine primitive du $n^{ième}$ dégré de l'unité, donc $m = n(\rho+1)$. Pour que $\varepsilon^2_m = \varepsilon_n^{\rho+1}$ puisse subsister, il faut que $\rho+1$ soit un nombre pair. Or il faut déterminer le premier nombre de la série

$$\varepsilon_m \varepsilon_n\,,\ \varepsilon^2_m\,,\ \frac{\varepsilon^2_m}{\varepsilon_n}\,,\ \frac{\varepsilon^4_m}{\varepsilon^2_n}\,,\ \ldots$$

qui devient ègal à 1, ce qui révient à ce, que le 0., 1., 2., 3., ...
transformé de b' coincide avec b.

Si la coincidence n'entre plus tôt que pour le $(2\mu+1)^{ième}$ transformé, on a

$$2\mu - 2(\mu-1)(\rho+1) = -\lambda n(\rho+1),$$

où il faut prendre pour λ le plus petit nombre entier positif, qui donne pour m un entier. Alors on a

$$2\mu = \frac{(\lambda n+1)(\rho+1)}{\rho}.$$

Si la coincidence doit entrer pour le $2\mu^{ième}$ transformé, on a

$$2\mu + 1 - (2\mu-1)(\rho+1) = -\lambda n(\rho+1)$$

d'où l'on tire

$$2\mu = \frac{(\lambda n+1)(\rho+1)+1}{\rho}.$$

b) n pair. Alors ε_n^2 est une racine primitive de l'unité du dégré $\frac{n}{2}$, par suite ε_m est une racine primitive de 1 du dégré $\frac{n}{2}(\rho+1)$ et $\rho+1$ un nombre entier quel-

conque. Selon que la coincidence a lieu pour le $(2\mu - 1)^{\text{ième}}$ ou le $2\mu^{\text{ième}}$ transformé les deux égalités

$$2\mu = \frac{(\lambda n + 1)(\rho + 1)}{\rho}$$

ou

$$2\mu = \frac{(\lambda n + 1)(\rho + 1) + 1}{\rho}$$

définissent le nombre ρ.

Si ρ est donné et aussi le nombre des transformés de b' à b, on peut calculer n par une des deux formules. Donc il faut que

$$2\frac{\rho}{\rho+1}\mu \quad \text{ou} \quad \frac{2\rho\mu - 1}{\rho + 1}$$

soit un nombre entier et le dernier nombre soit impair.

Puisque ρ et $\rho + 1$ ne peuvent avoir aucun facteur commun, 2μ sera un multiple de $\rho + 1$. Donc:

Si dans le premier cas c' passe par ρ transformations à c, b' viendra après $y(\rho + 1) - 1$ transformations à b, y étant entier et positif.

Le degré n de ε_n sera $\frac{\rho\mu}{\rho+1} - 1 = \frac{y\rho}{2} - 1$, afin que par le calcul inverse λ obtienne la valeur la plus petite.

Dans l'autre cas $2\rho\mu - 1$ devra être un multiple de $\rho + 1$, soit $y(\rho + 1)$ et b' vient après $\frac{y(\rho+1)+1}{\rho}$ transformations à b, y étant impair et ρ ayant la forme $4s + 1$. La valeur de n est $\frac{2\mu\rho - 1}{\rho + 1} - 1$.

Quant à l'indice de l'homographie périodique sur $d_2 d_3$, il s'agit de determiner le dégré de la racine primitive $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n}$. Si n est impair, il est racine primitive du dégré $n(\rho + 1)$, si n et $\rho + 1$ sont pairs, du dégré $\frac{n}{2}(\rho + 1)$ et si n est pair et $\rho + 1$ impair, du dégré $n(\rho + 1)$.

Dans tous ces cas on obtient des transformations quadratiques à une infinité de groupes périodiques.

2) La condition $\varepsilon_m \varepsilon_n = 1$ entraîne, que $b' b d_1$ soient allignés. Pour calculer d_4, on joint le point d'intérsection $(ab, a'c')$ à d_3, on procède, analoguément pour cc' et on obtient pour le point d'intérsection des deux droites

$$d_4 \ldots\ldots x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\varepsilon_n + 1}{\alpha_1} : \frac{\delta_n}{\alpha_2 \varepsilon_n \delta_m} : -\frac{\varepsilon_n}{\alpha_3}.$$

Il s'agit donc de déterminer l'homographie produite sur bb'.

Pour cela le raisonnement suivant peut servir: Imaginons que l'enchaînement de $b'b$ ait lieu et en outre l'homographie sur bb' soit une periodicité. Si alors nous partons de aa', bb', la condition pour que cc' passe par d_1, est de nouveau $\varepsilon_m \varepsilon_n = 1$. Donc:

S'il y a une transformation quadratique, dont toutes les chaînes de points principaux sont réunies sur des droites par d_1, les rapports anharmoniques des homographies produites sur aa', bb', cc' sont égaux.

Or je tire des droites du point $\frac{\varepsilon_n+1}{\alpha_1} : 0 : -\frac{\varepsilon_n}{\alpha_3}$ (point d'intérsection de $d_1 d_2$ et $d_1 d_3$) à b et b' et je cherche les points d'intérsection avec $d_1 d_2$, pour avoir les projéctions de b, b'

$$\alpha_1 \delta_n x_1 + \alpha_2 (\varepsilon_m{}^{\rho+1} \delta_n + \varepsilon_n \delta_m) x_2 = 0$$
$$\alpha_1 \varepsilon_m \delta_n x_1 + \alpha_2 (\delta_n + \varepsilon_n \delta_m) x_2 = 0 .$$

L'homographie sur bb' étant démandée périodique, il faut que le quotient

$$\frac{\varepsilon_m{}^{\rho+1} \delta_n + \varepsilon_n \delta_m}{\delta_n + \varepsilon_n \delta_m} = 1 + \frac{\delta_n \delta_m}{\delta_n + \varepsilon_n \delta_m} \tag{1}$$

ait la valeur d'une puissance de ε_n, vu que $b'b$ sont deux points d'un même cycle.

De plus le premier transformé se calcule sans difficulté. Pour me délivrer d'une transformation des coordonnées, je prends la voie suivante.

Le point d'intérsection de ac avec bb', savoir

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \delta^m \alpha_2 x_2 + \varepsilon_m \delta_n \alpha_3 x_3 = 0$$

est

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\varepsilon_n \delta_m - \varepsilon_m \delta_n}{\alpha_1} : \frac{-\varepsilon_m \delta_n}{\alpha_2} : \frac{-\varepsilon_n \delta_m}{\alpha_3}$$

celui-ci doit être joint avec le point d'intérsection de $d_1 d_2$ et $d_1 d_3$

$$\frac{\varepsilon_n + 1}{\alpha_1} : 0 : -\frac{\varepsilon_m}{\alpha_3}$$

et projeté sur la droite $d_1 d_2$ en

$$x_1 : x_2 = -(\varepsilon_n \delta_m + \delta_n) : \delta_n .$$

La projection de b' faite du même point sur la droite $d_1 d_2$, est

$$x_1 : x_2 = (\delta_n + \varepsilon_n \delta_m) : -\delta_n \varepsilon .$$

Le rapport anharmonique a donc la valeur ε_m.

La discussion conduit donc à ce résultat, que cette valeur n'est une puissance de ε_n que pour $n = m = 6, 8, 12, 30$.

§ 8. — Faisceaux anallagmatiques de cubiques dans une transformation quadratique.

La base d'un tel faisceau contient évidemment les six points principaux ainsi que les transformés intercalés entre deux. Je suppose, qu'aucune position singulière des points base exprimée par une coincidence de deux points principaux du même système ait lieu. Cf. § 33.

Pour les cas, où deux points principaux de differents systèmes coincident, je dois renvoyer le lecteur aux §§ 16 à 31.

I. Je suppose qu'aucun point double de la transformation soit dans la base du faisceau.

1. Les C_3 du faisceau se rangent en une homographie, où il y a certainement deux cubiques anallagmatiques. Cherchons, si ces deux cubiques peuvent se décomposer. Quand une C_3 se décompose, la droite et la conique ne se rencontreront pas dans un sommet, parce que cela demanderait deux points base infiniment voisins, donc la droite contient deux points principaux et un point intercalé. Supposons d'abord, que ces points ne soient pas accouplés: a, c', le dit transformé soit c_1. Si c_1 se transforme immédiatement en c', ac' se transforme en $a'c$ en cc' et donne origine à une C_3 anallagmatique, qui pourtant ne contient pas tous les sommets. Si d'autre part il y avait c_1 à c_2 à c', on aurait ac' en $a'c_1c_2$ et parceque quatre points base ne peuvent pas être alignés, cette droite ne contiendra pas a ni b ni c, et sera donc transformée en une conique. Encore aucune C_3 du faisceau n'est complétée.

Soit donc b_1 le transformé aligné avec a, c'. Cette droite se transforme en $a'c_1b$, si b_2 vient immédiatement à b, et afin que la dernière droite soit fournie pour compléter la cubique désirée, il faut que $a_1b'c$ soient alignés et que c_1 se transforme en c'. Si autrement c' vient directement à c, $ac'b_1$ sera transformée en $a'cb$, si b_1 se transforme en b, ou en $a'cb_2$, si b_1 se transforme en b_2. Mais alors $a'cb_2$ se transforme en $c'a_1b$ en $b'ca_2$, qui n'est pas la première droite; donc une cubique n'est pas composée.

Rétenons d'avoir rencontré le cas, où ab_1c', bc_1a', ca_1b' sont alignés. Si une seconde cubique décomposée est démandée, il ne reste que les allinéations

$$ac_1b' \quad , \quad ba_1c' \quad , \quad cb_1a' .$$

Alors a_1, b_1, c_1 sont réspectivement les points d'intérsection de

$$bc' , b'c \quad ; \quad ca' , c'a \quad ; \quad ab' , a'b . \tag{D}$$

Cette figure sera approfondie ci-bas.

Reste la seconde supposition, que aa' soit une partie de la conique décomposée. Alors elle contiendra nécessairement le point a_1. Elle est transformée en soi-même et il reste une conique passant par les six autres points. En laissant de côté le cas, où b' en b_1' en b, c' en c_1' en c se trouve dans la caractéristique, cas qui serait contenu parmi ceux déjà traités, on aurait donc b' en b_1' en b_2' en b et c' en c où l'allinéation $b'b_1'b_2'b$, nécessaire à la décomposition d'une seconde cubique du faisceau, serait impossible.

Excepté le cas D) *il est impossible de trouver une transformation quadratique, qui réproduise un faisceau de cubiques de manière, qu'aucun sommet ne soit pas un point double et aucune cubique propre ne corresponde pas à soi-même.*

2. Mais pour ce seul cas possible les droites ne renfermant aucun point double, il y a quatre points doubles à l'extérieur des droites. Quand une cubique du faisceau passe par un d'eux, elle est anallagmatique et chaque cubique du faisceau est réproduite, par conséquence.

Prenons donc sur une cubique une pareille transformation quadratique.

Il s'ensuit (§ 4, I) que

$$a_1 \equiv a - \gamma \qquad a' \equiv a - 2\gamma$$

$$b_1 \equiv b - \gamma \qquad b' \equiv b - 2\gamma$$

$$c_1 \equiv c - \gamma \qquad c' \equiv c - 2\gamma$$

donc

$$a_1 + b_1 + c_1 \equiv a + b + c - 3\gamma \equiv 0 .$$

Par suite les trois transformés intercalés sont alignés et les deux triples principaux sont sur une conique [cf. K. 5].

Parmi les cubiques du faisceau il y en a une troisième, qui se décompose en $a_1 b_1 c_1$ *et la conique* $abc\ a'b'c'$... Ces deux parties sont transformées involutivement. Leurs points d'intérsection ne peuvent pas être doubles pour la transformation, autrement les trois coniques de direction seraient trois C_2, qui forment un faisceau et passent par une paire de points sur $(abc\,a'b'c')^2$; elles rencontreraient donc la conique en trois paires d'une involution, et aa', bb', cc' concourraient dans un point, qui alors pour toutes les cubiques serait un point d'infléxion et la droite $a_1 b_1 c_1$ passerait par lui. Une telle transformation quadratique est impossible.

3. Les points communs à la droite $a_1 b_1 c_1$ et la conique $(abca'b'c')^2$ font donc la paire involutive de la transformation. Les sommets des deux triangles invariables

$$ab',\ bc',\ ca' \quad \text{et} \quad ac',\ ba',\ cb'$$

sont les deux triples périodiques et les autres points doubles des cubiques rationnelles du faisceau sont simultanément les quatre points doubles de la transformation quadratique.

Il s'ensuit, que la cubique C_3, qui passe par le point d'intérsection $bc, b'c'$ contient aussi $(ca, c'a')$ et $(ab, a'b')$. C'est la seule courbe, sur laquelle la corréspondance produite par la transformation est périodique à l'indice 4. En général: *Cette transformation jouit de la propriété, que le nombre de ses groupes périodiques d'un indice* >3 *est infini. Ils sont réunis sur une cubique du faisceau covariant.*

4. Je vais donc calculer le nombre des cubiques qui ont une corréspondance périodique d'un indice donné. Les transformées successives des droites $a'b'$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll}
C_2 & a' & & & b' & & & c' & \\
C_4 & a'^2 & a'_1 & & b'^2 & b'_1 & & c'^2 & c'_1 \\
C_6 & a'^3 & a'^2_1 & a & b'^3 & b'^2_1 & b & c'^3 & c'^2 & c \\
C_9 & a'^4 & a'^3_1 & a^2 & b'^4 & b'^3_1 & b^2 & c'^4 & c'^3 & c^2 \\
C_{12} & a'^5 & a'^4_1 & a^3 & b'^5 & b'^4_1 & b^3 & c'^5 & c'^4 & c^3 \\
C_{16} & a'^7 & a'^5_1 & a^4 & b'^7 & b'^5_1 & b^4 & c'^7 & c'^5 & c^4 \\
C_{20} & a'^8 & a'^7_1 & a^5 & b'^8 & b'^7_1 & b^5 & c'^8 & c'^7 & c^5 \\
C_{25} & a'^{10} & a'^8_1 & a^7 & b'^{10} & b'^8_1 & b^7 & c'^{10} & c'^8 & c^7 \\
C_{30} & a'^{12} & a'^{10}_1 & a^8 & b'^{12} & b'^{10}_1 & b^8 & c'^{12} & c'^{10} & c^8 \\
C_{36} & a'^{14} & a'^{12}_1 & a^{10} & b'^{14} & b'^{12}_1 & b^{10} & c'^{14} & c'^{12} & c^{10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

À cause de la circonstance, que pour C_4 le point c n'entre pas dans la caractéristique, il faut diviser les indices suivant leur caractère d'après le nombre 6. On obtient:

Nombre des transformations						
$6s$	$\ldots C_{(3s+1)^2}$	$(a'b')^{3s^2+3s+1}$	c'^{3s^2+3s}	$(abc)^{3s^2+s}$	$(a'_1 b'_1 c'_1)^{3s^2+2s}$	
$6s+1$	$\ldots C_{(3s+1)(3s+2)}$	$(a'b'c')^{3s^2+4s+1}$		$(abc)^{3s^2+2s}$	$(a'_1 b'_1)^{3s^2+3s+1}$	$c'_1{}^{3s^2+3s}$
$6s+2$	$\ldots C_{(3s+2)^2}$	$(a'b'c')^{3s^2+5s+2}$		$(ab)^{3s^2+3s+1}$	c^{3s^2+3s} $(a'_1 b'_1 c'_1)^{8s^2+4s+1}$	
$6s+3$	$\ldots C_{(3s+2)(3s+3)}$	$(a'b')^{3s^2+6s+3}$	c'^{3s^2+6s+2}	$(abc)^{3s^2+4s+1}$	$(a'_1 b'_1 c'_1)^{3s^2+5s+2}$	
$6s+4$	$\ldots C_{(3s+3)^2}$	$(a'b'c')^{3s^2+7s+4}$		$(abc)^{3s^2+5s+2}$	$(a'_1 b'_1)^{3s^2+6s+3}$	$c'_1{}^{3s^2+6s+2}$
$6s+5$	$\ldots C_{(3s+3)(3s+4)}$	$(a'b'c')^{3s^2+8s+5}$		$(ab)^{3s^2+6s+2}$	c^{3s^2+6s+2} $(a'_1 b'_1 c'_1)^{3s^2+7s+4}$.	

Or si l'on cherche l'intérsection d'une pareille courbe avec ab, les points d'intérsection libres ont leurs $6s$, $6s+1$, ... transformeés sur $a'b'$; une cubique du faisceau passant par ce point ci, passe nécessairement par ce point là et la cubique contient un groupe périodique:

c', c'_1, c, point d'intérsection avec ab, ... son $(n-1)$ transformé, point d'intérsection avec $a'b'$,

de l'indice $n+4$, où $n=6s, 6s+1$ ... Donc la corréspondance entière sur C_3 est périodique et on arrive au théorème:

Dans cette transformation périodique le faisceau anallagmatique contient

$$3s^2-1\ ,\ 3s^2+s\ ,\ 3s^2+2s\ ,\ 3s^2+3s\ ,\ 3s^2+4s+1\ ,\ 3s^2+5s+2$$

cubiques, sur lesquelles la corréspondance est périodique réspectivement de l'indice

$$6s\ ,\ 6s+1\ ,\ 6s+2\ ,\ 6s+3\ ,\ 6s+4\ ,\ 6s+5\,.$$

C'est remarquable, que ce qui précède établit des transformations apériodiques, mais douées de plusieurs variétés distinctes d'une infinité de groupes périodiques d'indices différents. L'exemple donné au § 7 est bien moins singulier, parce qu' il n'admet que des groupes périodiques d'un certain indice dans un nombre fini.

II. Il y a une seule transformation, qui admet un faisceau anallagmatique de cubiques, dont la base ne contient aucun point double et où il se trouve une seule cubique décomposée; voir § 10, III.

III. Si la base du faisceau renferme un point double, la transformation est une du § 9, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 28, 29.

On verra a posteriori, que parmi les cubiques il y a toujours une cubique propre anallagmatique.

IV. Les faisceaux, dont la base contient deux points doubles, seront traités dans les §§ 10, I.

V. Le cas à trois points doubles dans la base rentre dans les §§ 12, 17, 21, 22, 26, 27.

VI. Une paire involutive parmi les sommets se trouve § 10 I.

VII. Une paire involutive et un point double constitue le faisceau des A_3 au § 2, et ensuite plusieurs des §§ 12.

VIII. Un triple périodique est contenu dans une base rencontrée au § 2, où

l'on a vu, que chaque triple périodique avec $abc\,a'b'c'$ forme la base d'un faisceau anallagmatique. En outre on peut comparer les §§ 12, 16, 19, 24, 27, 30, 31.

C'est le résultat le plus singulier de cette théorie, que sauf quelques variétés toutes les transformations périodiques isolées sont idéntiques avec les transformations de ce paragraphe et qu'au moins *on peut les y réduire.*

§ 9. — Sur la construction des caractéristiques 1, 2, 3, 4, du § 3.

[*Observation générale.* Ces préparations achevées, je vais chercher à découvrir l'existence des transformations périodiques et éclairer leurs propriétés.

Une méthode s'offrant immédiatement, serait celle employée au commencement du § 2 et déclarée comme générale déjà au § 1, qui consiste à faire varier plusieurs points principaux en prenant fixes quelques autres, jusqu'à l'apparition de la périodicité et à en puiser les conditions pour les points principaux. Aux premiers pas la recherche pourrait suivre une marche complétement analogue aux n. 1-5 du § 2.

Bientôt je me suis décidé à abandonner cette longue et pénible série de considérations géométriques et je suis passé à une autre méthode qui est appliquée pour la première fois dans ce paragraphe.

Dans les §§ 10 à 13 et ainsi dans les autres sections il s'agira donc d'établir les cubiques anallagmatiques — quand elles existent — et grâce à ces ressources les transformations peuvent être déterminées. A cet égard je me permets de renvoyer le lecteur aux raisonnements variés qui font connaître l'éxistence des cubiques et particulièrement l'indice des corréspondances, qu'elles portent.

Pour plusieurs de ces caractéristiques j'en ai profité pour y nouer une recherche diligente de la transformation. Des conclusions de caractères et d'associations bien diverses conduiront particulièrement dans les §§ 12, 18 à 22, 25 à 29 à pénétrer dans la nature des transformations. Je ferai ici mention des méthodes suivantes:

1. L'application des coniques de direction, *cf.* Appendice 1.

2. L'application du théorème suivant:

Quand une transformation quadratique aux points principaux aa', bb', cc' *transforme* p *en* p', q *en* q', *il y a en même temps une homographie, qui transforme* $a\,b\,c\,p\,q$ *en* $a\,b'\,c'\,q'\,p'$.

3. La recherche des homographies ternaires ainsi que des trasformations supérieures entre les points de la caractéristique. À cet effet nous nous servirons entre autres du théorème précédent, ensuite du théorème du § 4, IV.

Du reste il faut comparer les remarques faites au § 35. J'observe encore, qu'en général le travail K m'a été très utile.

1. a' en a, b' en b, c' en c'_1 eu c'_2 en . . . $c'_{n-1} = c$.

Suivant le théorème du § 2 n. 5 on a la condition: Les points cc' sont une paire de points corréspondants d'une homographie, qui transforme a en a' en b en b' en a et est périodique de l'indice 4. Elle a $(ab', a'b)$ comme point double, (aa', bb') et $(ab, a'b')$ comme paire involutive.

La transformation Q^2 a le point $(aa', bb') = \delta$ ainsi que le point $(ab', a'b) = \delta'$ comme points doubles. Les rayons dirigés de δ' vers a et a' et ceux vers b, b' coincident par croix; donc les directions du point δ' sont en involution.

Le point δ correspond vers les deux directions aux points c', c et donne par cela naissance à un cycle de $m+1$ points. Les coniques par a, b, a', b' sont transformées entre elles (aa', bb') et $(ab'\ a'b)$, correspondent à soi-mêmes. Les coniques sont transformées à l'indice $m+1$, parceque plusieurs des transformées de $ab+a'b'$ ne peuvent point coincider.

Le lieu des points doubles des involutions, produites sur ces coniques, est une courbe d'ordre m pour m impair et d'ordre $m+1$ pour m pair. Dans le premier cas elle a en a, b, a', b' des points $\frac{m-1}{2}$ tuples, dans le second cas des points $\frac{m}{2}$ tuples. Elle passe par les autres points doubles sur aa', bb' et par δ'. Les homographies sur aa', bb' sont de l'indice $2(m+1)$ ou d'un indice facteur de $2(m+1)$, mais non de $m+1$.

2. a' en a, b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c.

La caractéristique détermine un faisceau anallagmatique de cubiques dont le neuvième sommet est un point double de Q^2. Deux points doubles de Q^2 se trouvent sur aa'.

D'abord je suppose, que le neuvième pivot soit situé à l'éxtérieur de la droite aa'. Le faisceau contient deux courbes anallagmatiques, qui passent par les points d_1, d_2 sur aa'. En effet une seule courbe ne les contiendra à la fois sans se partager en aa' et une conique, ce qui est impossible. Si l'une de ces deux courbes se décompose, la droite et la conique, dont la première passe par d_1, ne pourront se transformer involutivement, parceque la conique devrait passer par $a\ a'\ d_1$. Donc la droite contient $b'b'_1b$ et la conique $aa'\ c'c'_1\ c\ d_3d_4$. Si la seconde courbe doit se décomposer, une droite passerait par $d_2\ c'c'_1c$; la conique que je viens d'annoter devrait se partager en deux droites et d_3 tomberait sur aa'.

Il serait imaginable, que la première cubique se décomposât en trois droites $d_1c'c'_1c$, $ab'b'_1$ et $a'b'_1b$, dont les dernières seraient transformées involutivement entre elles. Mais alors on aurait un contact des cubiques en b'_1.

La seconde cubique pourrait s'imaginer rationnelle portant une homographie qui aurait en d_4 deux points doubles ou aucun.

Dans le premièr cas le point double d_1 donne un paradoxe, dans le second cas C_3^4 passerait par d_3, aurait donc sept points communs avec la conique, ce qui est impossible. Ces contradictions s'évanouissent, c'est vrai, devant la supposition, que C_3 ait un rebroussement. Mais en s'appuyant au § 7, I, on voit, que la caractéristique avec une conique anallagmatique, qui touche aa' en d_2, est impossible du tout.

3. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c.

Les neuf points déterminent un faisceau ou non. Dans le premier cas il n'y a pas une courbe décomposée en aa' et une conique, donc les deux courbes passant par d_1, d_2 corréspondent à soi-mêmes. Le cas le plus favorable à leur décomposition serait celui où la droite, partie de chacune, passe par d_1 ou d_2. Cela entraînerait les allinéations $p_1\ b'b'_1b'_2\ b$ et $d_2c'c'_1c$, ce qui contredit à l'existence du faisceau.

La *première variété* possible est définie par une C_3^3 anallagmatique, accompagnée par les allinéations $c'c'_1cd_2$, $a'b'_1bd_2$, $ab'_2b'd_2$, qui composent la seconde cubique anallagmatique.

Deux C^3_3 anallagmatiques sont impossibles à cause de l'indice 18. Il faudrait que les cubiques du faisceau fussent transformées à l'indice 2 et les 8 cubiques rationnelles restantes se partageassent en plus d'une seule paire ce qui aurait bésoin de plus d'une

seule paire involutive. Mais cette conséquence est réfutée par la nature de la caractéristique (Voir § 2 de la IVième partie).

La *séconde variété* transforme en soi-même une C_3 équianharmonique. Le calcul du § 10 montrera, que la seconde courbe anallagmatique se décompose en $c'c'_1c+(a'ab'_1b'_2b)^2$. Du reste un raisonnement géométrique y conduit de même. Si elle était une cubique à rébroussement, 10 courbes rationnelles resteraient, qui ne peuvent s'absorber par un indice admissible. Donc la courbe se décompose et parceque cette caractéristique ne donne point lieu à une permutation involutive entre une droite et une conique, il faut que $c'c'_1$ soient alignés.

Si d'autre part les neuf points déterminent une seule cubique anallagmatique, elle contiendra en se décomposant, la droite aa' ou non. Dans le dernier cas existe nécessairement une droite par un point double de aa', soit par d_1, à savoir $c'c'_1cd_1$. Alors $b'b'_1b'_2ba'a$ sont dans une conique anallagmatique contenant les deux autres points doubles. Ainsi on révient à la seconde variété.

Mais une *troisième variété* est produite, si la conique se décompose de la façon $a'b'_1bd_2+ab'_2b'd_3$. Dans ce cas on a encore les deux coniques transformées involutivement $c'c_1cab'b'_2$, $c'c'_1ca'b'b'_1$. Les deux coniques se rencontrent en outre en un point double. Suivant le § 6 les droites $c'b'$ et ca', cb' et ac' se coupent sur d_2d_3.

La *quatrième variété* est une forme, où la droite aa' n'entre pas dans la C_3 décomposée, $b'b'_1b'_2b'd_1d_2$ sont alignés et $aa'c'c'_1cd_2d_3$ dans une conique, qui touche la droite en d_2. Dans ce cas on a à remarquer les deux coniques transformées involutivement $c'c'_1cab'b'_2$, $c'c'_1ca'b'b'_1$, qui se coupent en un point double.

La *cinquième variété* est celle, où $c'c'_1cb'b'_1b'_2bd_2d_3$ sont dans une conique, qui touche $aa'd_1d_2$ en d_2. La conique $a'ac'c'_1cd_3d_4$ est anallagmatique et contient le quatrième point double d_4.

Sur d_3d_4 se coupent $(ac, c'b')$, sur d_2d_3 $(c'b'_1, cb, c'_1b'_2)$ $(c'a', ba)$ et $(b'a', ca)$.

4. a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c.

Des considérations analogues à celles que je viens de faire pour 2, ne sont plus appliquables ici, mais le procédé de transposition introduit au § 14, conduira directement aux *variétés suivantes*:

1. $(c'c'_1cb'b'_1b'_2b'_3bd_2d_3)^2$ et la droite $aa'd_2d_1$ se touchent en d_2. Il y a la conique anallagmatique $a'c'c'_1c$.

2. $(a'ac'c'_1c)^2$ touche la droite $b'b'_1b'_2b'_3b$ en d_2.

3. Il y a une C^3_3 anallagmatique, $c'c'_1c$ sont alignés, sans que les autres points soient dans une conique.

4. Il y a une cubique équianharmonique anallagmatique et $c'c'_1c$ sont encore alignés.

5. Il y a les droites aa', $b'b'_1b'_2b'_3b$, $c'c'_1c$ qui concourent en d_2.

6. $c'c'_1cd_1d_2$ sont alignés, $(aa'b'b'_1b'_2b'_3bd_2d_3)^2$ y est tangente en d_2.

§ 10. — Dépendance des caractéristiques 1, 2, 3, 4 des courbes du 3ième dégré.

La recherche suivante se rapporte aux variétés avec une cubique propre anallagmatique. Ni les corréspondances $u'-u\equiv\gamma$, ni $u'+u\equiv\gamma$ sont capables, d'être incluses en une transformation périodique; voir § 4, II. Restent les cubiques harmoniques, équianharmoniques et à rébroussement.

I. *Quelques transformations de la classe* a′ *en* a, b′ *en* b, c′ *en* c'_1... *en* c.

Courbe harmonique. 1. a' en a, b' en b, c' en c. Trois paires quelconques du § 4, II, α, combinées donnent la condition

$$3\gamma\frac{i-2}{2}+\frac{1}{2}k_2\equiv-3\gamma \qquad \text{où} \qquad 3i\gamma\equiv 0\,.$$

Il en dérive $a+b+c\equiv 0$ et Q^2 deviendrait une homographie. Cela s'accorde avec le résultat du § 2, que la transformation a' en a, b' en b, c' en c ne possède aucune courbe harmonique anallagmatique.

2. a' en a, b' en b, c' en c'_1 en c. Indice 8. Choisissant deux paires du § 4, II, α, appartenant au même point double, on a la condition

$$\gamma\frac{i-2}{2}+\gamma\frac{i-2}{2}+\frac{k_1-k_2}{2}+\gamma(2i-1)+\frac{1}{2}(k_1+k_2)\equiv-3\gamma\,,$$

ce qui donne $3i\gamma\equiv 0$, ou, en ajoutant l'autre paire du § 4, II, β,

$$\gamma\frac{i-2}{2}+\gamma\frac{i-2}{2}+\frac{k_1-k_2}{2}+\gamma(2i-1)\equiv-3\gamma\,,$$

ce qui donne $3\gamma\equiv\frac{1}{2}(k_1-k_2)$. Le point $c'_1\equiv-\gamma(1+i)$ est idéntique à $-(a+b)$, donc ab et $a'b'$ se coupent en c'_1 sur C_3; c' et c sont idéntiques à cause de la valeur de γ et la transformation ne se range pas proprement sous cette caractéristique. Cf. § 26.

En choisissant deux paires du § 4, II, α, appartenant à des points doubles différents on a deux cas à distinguer:

$$a'\equiv\gamma\frac{i-2}{2}\quad,\quad b'\equiv\gamma\frac{i-2}{2}+\frac{1}{2}k_1\quad,\quad c'\equiv\gamma(2i-1)\,,$$

demande $3\gamma\equiv-\frac{1}{2}k_2$. Puisque $c'c'_1c$ sont alignés, on tombe dans une transformation du § 7, 2. En effet, afin qu'il n'y ait pas cinq points doubles, il faut que aa', bb', cc' concourent en un point, qui sera le troisième point double de Q^2. La conique $ab'i_1+a'bi_2$ (i_1, i_2 étant la paire involutive) touche $c'c'_1c$ en un autre point double de Q^2. — Il y a deux faisceaux remarquables de cubiques passant par la caractéristique. L'un passe par les deux derniers points doubles, l'autre par i_1i_2. L'un contient $aa'd_1+bb'd_2+c'c'_1c$, l'autre $c'c'_1c+(ba'i_1)+(ab'i_2)$ comme seconde cubique anallagmatique. Les indices entre les cubiques sont 8. — Un troisième faisceau anallagmatique est constitué

par les cubiques impropres, que je viens de nommer et a toutes ses courbes décomposées. Son indice est 4 (voir § 9, 1):

$$a' \equiv \gamma \frac{i-2}{2} \quad , \quad b' \equiv \gamma \frac{i-2}{2} + \frac{1}{2} k_1 \quad , \quad c' \equiv \gamma (2i-1) + \frac{1}{2}(k_1 - k_2) ,$$

démande $3\gamma \equiv -\frac{1}{2} k_1$. La somme des paramètres de la caractéristique est $-\gamma(1+i)$ qui comparée aux valeurs de i_1, i_2 dans § 4, II, montre que chacun des deux points doubles dans C_h deux fois compté, détermine un faisceau anallagmatique. Leurs sécondes courbes fixes sont décomposées, savoir $aa' + (bb'c'c'_1c)^2$ et $bb' + (aa'c'c'_1c)^2$. Les indices de ces deux faisceaux sont 8, parceque les périodicités dans aa', bb' ne peuvent être 4. Un *troisième* faisceau est constitué par les deux courbes décomposées et sa base est complètée par les deux points doubles $(aa'bb')$ et $(a'b, b'a)$. Elle consiste donc en un quadrilatère complet et un triple $c'c'_1c$. On démontre que aussi les coniques $(a'bc'c'_1c)$ et $(b'ac'c'_1c)$ touchent les droites $b'a$ et $a'b$. Donc:

Le quadrilatère a'b', ab, δδ' *et le triple* c'c'₁c *ont telle position que les quatre coniques par* c'c'₁c *et un triangle du quadrilatère sont tangentes aux quatrièmes côtés du quadrilatère.*

Les cubiques de ce faisceau rencontrent C_h en paires de points allignés avec $-\gamma(1+i)$, donc: *l'indice du faisceau est* 2 et comme conséquence immédiate:

Les courbes du faisceau sont toutes harmoniques.

À l'aide de la condition $3\gamma \equiv -\frac{1}{2} k_1$ s'établissent les paramètres de 7 sommets d'un tel faisceau. Comp. aussi ce § II et § 16, II.

Ici on obtient

$$a' \equiv \frac{(n-2m)k_1 - (m+2n)k_2}{12} , \; b' \equiv a' + \frac{1}{2} k_1 , \; c' \equiv \frac{(m+2n)k_2 - (n+2m)k_1}{6} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$a \equiv \frac{(m-2n)k_1 + (2m+n)k_2}{12} , \; b \equiv a + \frac{1}{2} k_2 , \; c \equiv \frac{(2n-m)k_1 - (2m+n)k_2}{6} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$c'_1 \equiv -\frac{(m+n)k_1 + (n-m)k_2}{6} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) .$$

Rémarque. C'est une base encore très spéciale de cette catégorie. On arrive à une autre plus générale en considérant une courbe arbitraire du faisceau. Celle-ci est anallagmatique pour la répétition de Q^2 et en établissant les paramètres de la caractéristique d'une pareille transformation biquadratique, qui doit renfermer une corréspondance $u' - iu \equiv \gamma$, on trouve une base plus générale d'un tel rémarquable faisceau.

Courbe équianharmonique.

1. a' en a, b' en b, c' en c. En combinant les trois paires de § 4, III, α) on tombe sur la Q^2 du § 2. De même pour § 4, III.

2. a' en a, b' en b, c' en c'_1 en c. 3. a' en a, b' en b, c' en c'_1 en c'_2 en c.

Deux paires de § 4, III, α) et une quelconque de β) ou de γ) donnent la condition

$3\gamma \equiv 0$. Tenant compte des considérations que nous venons de faire on conclût que *la transformation* a′ *en* a , b′ *en* b , c′ *en* c'_1 *en* c *possède toujours une cubique harmonique anallagmatique.*

Quant à 3, on voit que néanmoins les huit points determinent un faisceau anallagmatique. Or, afin que une cubique propre anallagmatique n'y soit pas il faut, que le neuvième sommet soit δ. Les deux cubiques invariables sont alors $aa' + (b'bc'c'_1c'_2c)^2$ et $b'b + (a'ac'_1c'_2)^2$.

4. a' en a, b' en b, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en c. Indice 12. La paire δ, de § 4, III, donne

$$a' \equiv -\gamma \quad , \quad b' \equiv -\gamma + \frac{k_1 + k_2}{3} \quad , \quad c' \equiv \varepsilon(3\varepsilon - 1)\gamma ,$$

ce qui démande $2(\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \equiv -\frac{k_1 - k_2}{3}$. On calcule

$$c'_1 \equiv (\varepsilon^2 - 2)\gamma \quad , \quad c'_2 \equiv 2\varepsilon\gamma \quad , \quad c'_3 \equiv (1 - 2\varepsilon^2)\gamma \quad , \quad c'_4 \equiv (3 - \varepsilon)\gamma \equiv c .$$

Les neuf points ne forment pas la base d'un faisceau.

II. a' en a, b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c. Indice 12.
(Trois variétés).

Courbe harmonique. — 1. La condition $a' + b' + c' \equiv -3\gamma$ conduit ici à

$$\gamma\frac{i-2}{2} + \gamma(2i-1) + \gamma(2i-1) + \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \equiv -3\gamma ,$$

d'où

$$9i\gamma \equiv 0 .$$

Cette condition ne change pas, si l'on choisit quelque autre paire admissible au lieu de $a'a$. Soit donc

$$\gamma = \frac{mk_1 + nk_2}{9} .$$

Alors on a

$$(2i-1)\gamma \equiv \frac{(2n-m)k_1 - (2m+n)k_2}{9} ,$$

$$\frac{i-2}{2}\gamma \equiv \frac{(n-2m)k_1 - (2n+m)k_2}{18} ,$$

et pour $a' + b' + c' + 3\gamma$ la valeur

$$\frac{9(n+1)k_1 - 9(m+1)k_2}{18} .$$

Afin que notre Q^2 soit possible, il faut donc prendre pour

m pair ,	n pair	$\gamma\frac{i-2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2}$,	$\gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2}$
m impair ,	n impair	$\gamma\frac{i-2}{2}$,	$\gamma\frac{1-2i}{2}$
m pair ,	n impair	$\gamma\frac{i-2}{2} + \frac{k_2}{2}$,	$\gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{k_1}{2}$
m impair ,	n pair	$\gamma\frac{i-2}{2} + \frac{k_1}{2}$,	$\gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{k_2}{2}$.

Les neuf valeurs $\gamma \equiv \frac{m'k_1 + n'k_2}{3}$ étant à exclure, il existe 72 corréspondances applicables et à chacune corréspond une seule transformation quadratique de la caractéristique en question.

2. Pour les points fondamentaux on obtient

$$a' \equiv \frac{(n-2m)k_1 - (2n+m)k_2}{18} + \rho\,,\ b' \equiv -\frac{(m-2n)k_1 + (2m+n)k_2}{9}\,,\ c' \equiv b' + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$b'_1 \equiv -\frac{(m+n)k_1 + (m+n)k_2}{9}\,,\ c'_1 \equiv b'_1 + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$a \equiv \frac{(m-2n)k_1 + (2m+n)k_2}{18} + \rho'\,,\ b \equiv -\frac{(n-2m)k_1 - (2n+m)k_2}{9}\,,\ c \equiv b + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

Donc $b'\ b$ sont les points tangentiels de a, a'. Au surplus $c'\,c'_1\ c$ sont les points harmoniquement conjugués à $b'\ b'_1\ b$ sur C_h et forment avec $b'b'_1\ b$ un quadrilatère complet inscrit.

Les points $b'\ b'_1\ b$ appartiennent à des triples tangentiels et parceque

$$3b \equiv 3b' \equiv 3b'_1 \equiv -\frac{(m+n)k_1 + (m-n)k_2}{3} \equiv -\frac{m(k_1+k_2)}{3} - \frac{n(k_1+k_2)}{3}\,,$$

ces trois triples corréspondent au même triangle d'inflexion, forment donc une configuration (A) *).

Les points a', a se définissent comme les points harmoniquement conjugués aux deux points de la configuration (A), dont b', b sont les points tangentiels.

Donc toute la caractéristique est à trouver parmi (A) et les 9 points harmoniquement conjugués $(A)^-$. D'avec (A) et $(A)^-$ on peut composer les caractéristiques de 9 transformations, ainsi que chaque point de (A) fait partie de 3 et chaque point de $(A)^-$ de 5 transformations.

Pris b'_1, b' et b et par suite la droite $b'\ b'_1\ b$ s'ensuivent; cette configuration (A) doit donc jouir d'une structure singulière, au moyen de laquelle à un point corréspond d'une façon particulière une des trois droites incidentes. Cette corréspondance s'exprime ainsi: « Si l'on détermine la droite harmoniquement conjuguée à la tangente d'une point de (A) par rapport aux deux tangentes conjuguées de C_h, dont l'une appartient au triple tangentiel, la droite ainsi déterminée passe par deux autres points de (A) et est la droite corréspondante, dont je viens de parler. C'est une conséquence de § 4, II, α.

3. Des points doubles de Q^2 deux sont sur $b'\ b'_1\ b$, l'un au rencontre avec aa', un autre d_3 est le point d'intérsection de aa' avec C_3 et possède l'argument

$$-\frac{b'_1}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{b'_1}{2} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)\,,$$

selon que $m \equiv n \pmod 2$ ou non. Le quatrième est harmoniquement conjugué à d_3.

On voit que d_2 appartient à (A) et est alligné avec les conjugués de $a'a$, d_4 appartient donc à $(A)^-$. Les 9 Q^2 nommées ci-haut ont donc chacune un point de (A) pour point double.

Un autre point de (A) est $(ac\,,\ a'c')$ et parcequ'il complète avec $b'b'_1\ b$ un cycle, il est le point tangentiel de b'_1.

*) Cf. Kantor, *Ueber eine eindreideutige ebene Abbildung einer Fläche 3. Ordnung.* Cr. J. Bd. 95, p. 147.

Les quatre autres points de (A), qui sont alignés deux à deux avec b'_1, forment un cycle de la corréspondance contenue dans Q^2. De là incidemment la conclusion: Des trois droites passant par un point d'une (A) sur C_h, deux certaines et l'autre avec la tangente forment deux paires d'une involution, dont un rayon double est la tangente appartenant au triple tangentiel.

Parmi $(A)^-$ on a un point double, le quadruple $c'c'_1c$, $(a'b', ab)$ et a', a avec les points de rencontre de $b'c'$, bc avec C_h forment un autre quadruple.

4. Les huit points de la caractéristique déterminent la base d'un faisceau de cubiques, dont le neuvième pivot est

$$\frac{(m+n)k_1+(n-m)k_2}{18}+\rho+\rho'+\frac{1}{2}(k_1-k_2),$$

donc en tous cas d_4. Le faisceau est anallagmatique. Une cubique anallagmatique est $b'b'_1b+(c'c'_1ca'ad_4)^2$. À cause des alinéations bc'_1c', $b'_1cc'_1b'cc'$, on a les cubiques $b'cc'_1+(a'ac'b'b'_1d_4)^2$, $b'_1cc'+(a'ac'_1b'bd_4)$, $bc'_1c'+(a'acb'_1b'd_4)^2$ qui par Q^2 sont permutées entre elles. Donc:

La périodicité entre les cubiques du faisceau a l'indice 3.

Par conséquent chaque cubique porte une périodicité d'indice 4 entre les points et leurs troisièmes transformés. Cette corréspondance doit donc être de l'espèce $u'-iu\equiv\gamma$. Donc:

Toutes les cubiques du faisceau sont harmoniques.

Je fais noter ce résultat important, qu'ici incidemment on trouve un faisceau encore inconnu, dont toutes les cubiques ont le même rapport i des périodes.

5. Comme je viens de démontrer dans le § 9, 2, $(a'ac'c'_1cd_4)^2$ touche la droite $b'b'_1b$ et j'éclairerai ci-bas que cela représente trois courbes rationnelles. Or en supposant les trois courbes C_1+C_2 douées de deux points doubles, trois courbes rationnelles resteraient formant un cycle. Pour la troisième répétition (C_7) les trois points doubles r corréspondraient à soi-mêmes. L'homographie sur C^4_3 a les voisins de r ou de deux coincidences ou d'une paire involutive.

Le premier cas fournirait trois points doubles de l'homographie et par consequent une infinité de triples pèriodiques et $b'b'_1b$ en serait un, ce qui est impossible. L'autre cas entraînerait une infinité de sextuples périodiques. Chaque courbe donne une de ces sextuples, qui engendrent une courbe du quatrième dégré. Il y a au surplus une droite remplie de triples. La sixième transformation (cf. § 3.) devrait posséder une courbe au moins du 13e ordre lieu de points doubles, ce qui est impossible.

Ainsi je conclus, que les trois courbes décomposées remplacent 9 courbes rationnelles; donc:

Le quadrilatère $b'b'_1bc'c'_1c$ *et le triangle* $a'ad_4$, *qui sont circonscrits à la même conique, ont telle position, que chacune des quatre coniques par* $a'ad_4$, *qui contiennent un triangle du quadrilatère est tangente à son quatrième côté.*

Je supprime l'énoncé explicite de la manière, de choisir les sommets d'un pareil faisceau sur C_h. On la reconnaîtra facilement des numéros précédents. J'ajoute la rémarque que la base déterminée par ces paramètres n'est pas la plus générale sur C_h.

6. *Digression.* Il me reste à vérifier, qu'une courbe décomposée en $C_1 + C_2$, qui se touchent, réduit de trois le nombre des courbes rationnelles du faisceau considéré. J'ai envisagé le faisceau, dont la base contient un quadrilatère $g_1 g_2 g_3 g_4$ dans un Mémoire inséré au Journal de Borchardt, Bd. 86, et j'ai trouvé, que les quatre points doubles encore existants forment un quadrangle, dont les points diagonaux sont les trois autres sommets $g'_1 g'_2 g'_3$.

Soient $\alpha_1 \alpha_2 \sigma_3$ les sommets d'un triangle du quadrilatère. Quand il y a une conique, qui passe par $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 g'_1$ et touche g_4, le point de contact doit être un point double de l'involution constituée sur g_4 par $g'_1 \alpha_1$ et $\alpha_2 \alpha_3$; $g'_2 \alpha_2$ et $\alpha_3 \alpha_1$; $g'_3 \alpha_3$ et $\alpha_1 \alpha_2$ et partant doit être situé sur un rayon double de l'involution, qui du point g'_1 projette les sommets opposés du quadrilatère. Et si la conique en question passe aussi par $g'_2 g'_3$, par le même point de contact passent des rayons doubles des deux involutions causées en g'_2, g'_3 par le quadrilatère. Or de ce que je dis l. c. il est clair, que les trois paires de rayons doubles sortant de g'_1, g'_2, g'_3 se coupent dans les quatre points doubles. Donc un de ceux ci tombe dans le point de contact sur g_4, et une pareille cubique dégénerée est à compter pour trois courbes à point double *c. q. f. d.*

Ce nombre est indépendant du choix particulier du faisceau.

7. L'indice de l'homographie sur aa' est 3; on en conclût, que bc, $b'c'$, aa' sont convergentes. Toute courbe du faisceau donne origine à un triple périodique, à cause du point double de la corréspondance, qu'elle porte. Le lieu de ces triples ne passe par b ou c, qui ne peuvent jamais entrer en un triple, il n'est donc autre que aa'. Par là: *Sur toutes les courbes* C_h *le point harmoniquement conjugué à* d_4 *est situé sur* aa'.

Le lieu des sextuples périodiques a des points doubles en a, a', parceque a' se change en b, $b'c'$, $(a'b'c'b'_1 c'_1)^2$, $(abca'^2b'^2c'^2b'_1 c'_1)^4$, $(a'^2b'^2c'^2a^2b'^2_1 c'^2_1 bc)^5$, $(a'^3 \ldots)^6$ successivement et qu'un des trois points de C^b infiniment voisins à a' tombe sur aa'. Il passe simplement par $c'c'_1$, c, b', b'_1, b, parceque c' p. e. se transforme en c'_1 en c en $a'b'$, $(a'b'c'ab'_1)^2$, $(a'^2b'c'b'_1c'_1ab)^3$, $(a'^2b'^2c' \ldots)^4$. Il passe par d_4 en tant qu'il existe des directions invariables auprès de ce point, donc 0 ou 1 ou 2 fois et il faut choisir 0 à cause de la divisibilité par 3. Car le lieu rencontre une C_h encore en deux points, les $i_1 i_2$ de sa corréspondance. En tout:

Le lieu des sextuples est une courbe du 4ème ordre par $a'^2a^2c'c'_1cb'b'_1b$. Il va sans dire, qu'elle est anallagmatique.

Une série d'autres propriétés se déduit par transposition (§ 14) de la forme primaire de la transformation ici étudiée.

Courbe équianharmonique $(u' + \varepsilon u \equiv \gamma)$.

1. La condition $a' + b' + c' \equiv -3\gamma$ donne

$$-\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} + \gamma(-1 + 2\varepsilon^2) + \rho + \rho' \equiv -3\gamma,$$

où l'on peut attribuer à ρ ou ρ' deux des quatre valeurs 0, $\frac{k_1}{2}$, $\frac{k_2}{2}$, $\frac{k_1 + k_2}{2}$.

De là on conclut d'abord, que le centre de convergence pour la corréspondance

est en tous cas un *point d'inflexion*. Le point double est un point τ_3 de premier contact. Soit $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{6}$.

On voit de suite, que $a'\,a$ sont les deux autres points $\tau_1\,\tau_2$ de premier contact, alignés avec le point double. Le centre t et $a'\,a$ forment donc un triple périodique (§ 4. III) et $b'c'$, bc convergent en t. Cela montre, que b', c' sont contenus dans le même sextuple périodique et de manière, que b vient à c'. Donc $a'c'$ est tangente à C_3 en c' et également ac, ab, $a'b'$ en c, b, b'. Les six points $b'b'_1\,b\,c'c'_1\,c$ forment dans cet ordre un sextuple.

Restent encore six points τ_{ij} de deuxième contact, ils forment ensemble un sextuple. Il consiste en deux triples alignés de transformés successifs; deux transformés doublement séparés sont contangentiels et ont τ_1, τ_2, τ_3 comme points tangentiels.

2. Quant à la distribution des points principaux $a'\,a$ aux 27 valeurs m, n on trouve qu'il faut combiner

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad m + n \equiv 0\,,$$

$$\sigma = 1 \quad \text{et} \quad m + n \equiv 1\,, \qquad \text{mod. 3.}$$

$$\sigma = 2 \quad \text{et} \quad m + n \equiv 2\,,$$

Quant à la distribution des paires bb', cc' il faut prendre (§ 4, III, β)

le 1. et 2. ou 3. et 4. pour $m \equiv 1$, $n \equiv 0$,

le 1. et 3. ou 2. et 4. pour $m \equiv 0$, $n \equiv 1$, mod. 2.

le 1. et 4. ou 2. et 3. pour $m \equiv 1$, $n \equiv 1$,

À cause de ce partage il serait trop compliqué, d'etablir en général les paramètres de la caractéristique.

Dans une C_e donnée il y a 108 caractéristiques de cette espèce. En effet, le point d'inflexion t est arbitraire, puis on a trois hypothèses pour le point double et enfin on peut choisir $b\,c$ et $b'\,c'$ de deux manières, en tout 9. 3. 2. 2. Chacune des transformations ainsi construites transforme entre eux aussi les autres points de premier et second contact provenant de points d'inflexion.

3. La caractéristique ensemble au point double d_2 forme la base d'un faisceau de cubiques. Celui-ci contient la courbe $aa'd_2 + b'b'_1b + c'c'_1c$, cette Q^2 se range donc aussi dans le § 7. Il s'ensuit en outre, que ces trois droites convergent en un point double d_1 de aa'; ce triple de droites absorbe donc quatre courbes rationnelles. Le faisceau n'admet donc que l'indice 2 ou 4. Le premier est impossible, parceque les points doubles des C'_3 restants seraient combinés à des paires involutives, tandis que l'unique paire existante est contenue dans C_e. Donc:

Les cubiques du faisceau sont permutées à l'indice 4, chacune porte une corréspondance d'indice 3, $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$, *et est équianharmonique. Les quatre* C^3_3 *du faisceau forment un quadruple.*

4. L'indice de la périodicité entre les diréctions de d_4 est 4. Le lieu des quadruples périodiques est une courbe du 4ème ordre par $a'^2 a^2 b' b'_1 b\, c' c'_1 c\, d_3 d_4$. Car on a b' en b'_1 en b en $a'c'$ en $(a'b'c'ac'_1)^2$ et a' en a en $b'c'$ en $(a'b'c'b'_1 c'_1)^2$ en $(a'^2 \ldots)^4$ et deux intersections variables du lieu avec une C_e du faisceau.

Courbe à rebroussement.

Voir § 34.

III. a' en a b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c.
(Deux variétés).

Courbe équianharmonique.

Réunissant trois paires de α, β, γ, § 4, III, on obtient

$$-\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} + \frac{-1 + 2\varepsilon^2}{2}\gamma + \rho + 2\varepsilon^2\gamma + \sigma' \frac{k_1 - k_2}{3} \equiv -3\gamma\,,$$

ou

$$(\sigma + \sigma')\frac{k_1 - k_2}{3} + \rho + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2}\gamma \equiv 2\varepsilon\gamma\,,$$

partant

$$-(\sigma + \sigma')\frac{k_1 - k_2}{3} \equiv 3(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma\,,$$

et

$$\gamma \equiv -(\sigma + \sigma')\frac{k_1 + k_2}{9} + \frac{\mu k_1 + \nu k_2}{3(\varepsilon - \varepsilon^2)}\,,$$

on peut donc prendre toutes les 72 valeurs $\frac{mk_1 + nk_2}{9}$. Chaque fois le centre de convergence est un point d'un triple tangentiel.

Quant à la distribution des paires α) β) γ) suivant les valeurs $\frac{mk_1 + nk_2}{9}$, on a:

Pour

$$\begin{matrix} m \equiv 0 & , & m \equiv 0 & , & m \equiv 1 & , & m \equiv 1 \\ n \equiv 0 & , & n \equiv 1 & , & n \equiv 0 & , & n \equiv 1 \end{matrix} \quad \text{mod. 2.}$$

il faut prendre $\rho = 0, \frac{k_2}{2}, \frac{k_1}{2}, \frac{k_1 + k_2}{2}$;

pour $\begin{matrix} m \equiv 2 & , & m \equiv 4 & , & m \equiv 4 & , & m \equiv 8 \\ n \equiv 4 & , & n \equiv 2 & , & n \equiv 8 & , & n \equiv 4 \end{matrix}$ mod. 9. $\sigma + \sigma' = 0$

pour $2n - m \equiv -1$, $n - 2m \equiv 1$, mod. 3. $\sigma + \sigma' = 1$

pour $2n - m \equiv 1$, $n - 2m \equiv -1$, mod. 3. $\sigma + \sigma' = 2$.

La valeur de $\sigma + \sigma'$ une fois établie, on a trois combinaisons pour σ, σ'; une d'el-

les ($\sigma = \sigma'$) conduit à la coincidence de b'_1, b'_2 avec a', a et par là à l'identité de c, c' (Voir § 4, III).

Pour $\sigma + \sigma' = 0$ on aurait $3(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma \equiv 0$, le centre de convergence et son point tangentiel devraient former une paire involutive (§ 4, III). À raison de cette supposition les points $a'_1 a$, b', b'_1, b'_2, b, le centre de convergence et son point corréspondant ainsi que d_1 appartiennent à des triples tangentiels de la série, qui corréspond au triangle Hessien et d'après les paramètres de § 4, III, ils appartiennent à la même configuration cyclique. Mais a' a d_1 sont alignés et puisque b' b sont alignés avec le point tangentiel de d_1, ou ils seraient les points tangentiels de a', chose dont nous avons déjà démontré l'impossibilité ou a et b' coincideraient. Donc $\sigma + \sigma' = 0$ est à exclure.

Les autres valeurs de γ se répartissent 27 à 27 aux cas $\sigma + \sigma' = 1$, 2. Les points doubles de ces 27 corréspondances remplissent trois (A) tangentielles qui sont liées à une terne.

Ensuite pour $\sigma + \sigma'$ donné on a deux combinaisons σ, σ', donc en tout $2.27.2 = 108$ transformations Q^2 pour une C_e donnée.

2. Tous les points de la caractéristique appartiennent chaque fois à des triples tangentiels de la même terne (à 27 points).

Les paramètres de la caractéristique sont

$$a' \equiv -\frac{mk_1 + nk_2}{9} + \sigma\frac{h_1 - k_2}{3} \qquad b' \equiv -2\frac{nk_1 + (n-m)k_2}{9} + \sigma'\frac{k_1 - k_2}{3}$$

$$a \equiv \frac{nk_1 + (n-m)k_2}{9} - \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad b \equiv 2\frac{mk_1 + nk_2}{9} - \sigma'\frac{k_1 - k_2}{3}$$

$$b'_2 \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{9} + \sigma'\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad c' \equiv -\frac{(2n+m)k_1 + (3n-2m)k_2}{18} + \rho$$

$$b'_1 \equiv \frac{nk_1 + (n-m)k_2}{9} + \sigma'\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad c \equiv \frac{(2m+n)k_1 + (3n-m)k_2}{18} + \varepsilon^2\rho$$

$$c'_1 \equiv \frac{(n-m)k_1 - mk_2}{18} - \varepsilon\rho\,.$$

Le choix préscrit ci-haut pour ρ fera, que c', c'_1, c ne contiennent que des multiples pairs dans le numérateur. On voit que

d_1, c', c'_1, c, le 1. et 5. transformé du centre, le centre et la paire involutive appartiennent à une (A) tangentielle;

a', b, le 2. transformé de a', le 3. transformé de a, b'_2 et le point de rencontre de ac à une seconde, et

a, b', le 2. transformé de a, le 3. transformé de a', b'_1 et le point de rencontre de ac à une troisième (A) tangentielle.

3. Les neuf points de la caractéristique forment la base d'un faisceau de cubiques. La seconde courbe anallagmatique se décompose en $c'c'_1c + (b'b'_1b'_2ba'a)^2$ et parceque selon le § 3 droite et conique se touchent, cette cubique compte pour 3 courbes rationnelles. Les 9 autres sont transformées entre elles.

L'indice 1 du faisceau est impossible, parce qu'il y aurait encore 9 points doubles de Q^2, ou au moins 3.

En supposant l'indice 3, on aurait sur chaque C_3 une corréspondance d'indice 6. Si celle ci avait un point double, toutes les cubiques seraient équianharmoniques, les cubiques rationnelles seraient toutes à rébroussement, ce qui est incompatible avec le nombre 9. Si la corréspondance n'avait pas de point double, elle serait de l'espèce $u' \equiv u + \frac{C}{6}$, chaque point et son 3. transformé seraient contangentiels et par suite aussi b' et b dans la courbe invariable C_e ce qui n'a pas lieu.

L'indice 6 est impossible, parceque les 9 points doubles du faisceau ne peuvent pas se partager en sextuples et l'indice 18, parceque il n'y a plus de 12 courbes rationnelles. Donc:

Les cubiques du faisceau anallagmatique sont transformées entre elles à l'indice 9.

Quelques autres propriétés sont réconnues par les transpositions du § 14.

Courbe à rébroussement.

Voir § 34.

IV. a' en a_1 b' en b'_1 en b'_2 en b'_3 en b, c' en c'_1 en c.

Courbe équianharmonique.

La condition pour γ devient (§ 4, III, α β δ)

$$\sigma \frac{k_1 - k_2}{3} - \gamma + \varepsilon(3\varepsilon - 1)\gamma + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2}\gamma + \rho \equiv -3\gamma$$

$$5(\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \equiv \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$$

où

$$\gamma \equiv -\sigma \frac{k_1 + k_2}{15} + \frac{\mu k_1 + \nu k_2}{5(\varepsilon^2 - \varepsilon)}.$$

Soit donc $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{15}$. Alors il devient

$$5(\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \equiv \frac{m - 2n)k_1 + 2m - nk_2}{3} \equiv (m + n)\frac{k_1 - k_2}{3},$$

et on a pour

$$\left.\begin{array}{l} m + n \equiv 0 \\ m + n \equiv 1 \\ m + n \equiv 2 \end{array}\right\} \text{ mod. 3. } \quad \begin{array}{l} \sigma \equiv 0 \\ \sigma \equiv 1 \\ \sigma \equiv 2. \end{array}$$

Ensuite il faut prendre pour

$$\left.\begin{array}{llll} m \equiv 0 & m \equiv 1 & m \equiv 0 & m \equiv 1 \\ n \equiv 0 & n \equiv 0 & n \equiv 1 & n \equiv 1 \end{array}\right\} \text{ mod. 2.}$$

$$\rho \equiv 0 \quad , \quad \frac{k_1}{2} \quad , \quad \frac{k_2}{2} \quad , \quad \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Il y a donc 216 corréspondances admissibles et le même nombre de Q^2.

2. Les paramètres de la caractéristique sont

$$a' \equiv -\frac{mk_1 + nk_2}{15} + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad b' \equiv \frac{(m-4n)k_1 + (4m-3n)k_2}{15}$$

$$a \equiv \frac{nk_1 + (n-m)k_2}{15} - \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad b \equiv \frac{(4m-n)k_1 + (m+3n)k_2}{15}$$

$$b'_1 \equiv -\frac{(2m+n)k_1 + (3n-m)k_2}{15} \qquad b'_1 \equiv \frac{(2n-2m)k_1 - 2mk_2}{15},$$

$$b'_3 \equiv \frac{(m+2n)k_1 + (n-2m)k_2}{15}$$

$$c' \equiv -\frac{(2n+m)k_1 + (3n-2m)k_2}{30} + \rho$$

$$c'_1 \equiv \frac{(n-m)k_1 - mk_2}{30} - \varepsilon\rho$$

$$c \equiv \frac{(2m+n)k_1 + (3n-m)k_2}{30} + \varepsilon^2\rho$$

$$d_1 \equiv \frac{(m-n)k_1 + mk_2}{15}.$$

De là on conclut, que tous les points de la caractéristique et d_1 appartiennent à des *quadruples tangentiels* *).

Les points $b'_1 b'_2 b'_3 b' b\, d_1$ corréspondent au même point d'inflexion j_1 et b', b sont alignés avec ce point $-\frac{(m-n)k_1 + km_2}{3}$. Je fais observer, que b'_2 est le centre de convergence.

Les points a', a appartiennent aux points d'inflexion

$$\frac{mk_1 + nk_2}{3} + \sigma\frac{k_1 + k_2}{3} \text{ et } -\frac{nk_1 + (n+m)k_2}{3} - \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}$$

et au moyen des préscriptions relatives à σ on voit, qu'ils sont identiques avec j_1.

On réconnaît les alinéations $b'b'_3b'_2$, $bb'_1b'_2$, $b'_1b'_3d_1$ et que $a'c'$, ac se rencontrent sur C_3 en un point y, le point tangentiel de b'_2. Le point tangentiel de c'_1 est d_1, il est donc aligné avec b'_2 et j_1. Ainsi $b'_2\, d_1\, c'_1\, y$ forment un quadruple tangentiel.

En somme les six quadruples tangentiels appartenant à j_1 se distribuent sur la caractéristique comme il suit:

b'_2	c	c'	a'	a	b'
y	b'_1	b'_3	$-(b'+c')$	$-(b+c)$	2. transformé de a (α')
c'_1	β_2	β_5	$-(a+b)$	$-(a'+b')$	b
d_1	β_3	β_4	β'	β	3. transformé de a (α)

*) Il y a 54 quadruples tangentiels sur une cubique donnée, ils se partagent suivant les points d'inflexion en 9 groupes de 6. Les diagonaux de chaque quadruple passent par le point d'inflexion, auquel il appartient. Six quadruples groupés au tour du même point d'inflexion forment une configuration (3, 10).

$\beta\beta'$ et $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ sont des points successifs dans la corréspondance, qui sont étrangers à la caractéristique.

Quelqu'unes des 80 alinéations sont rémarquables:

$$b'_2\,,\,c'\,,\,(a'+b')\;;\;b'_2\,,\,c\,,\,(a+b)\;;\;b'_2\,,\,b'\,,\,b'_3\;;\;b'_2\,,\,b'\,,\,b'_1\;;\;b'_2\,,\,a'\,,\,\alpha';$$

$$b'_2\,,\,a\,,\,\alpha\;;\;b'_2\,,\,(b+c)\,,\,(b'+c');$$

$$y\,,\,a',c'\,;\,y\,,\,a\,,\,c\,;\,y\,,\,b'_1\,,\,\beta'\,;\,y\,,\,b'_3\,,\,\beta.$$

Courbe à rébroussement.

Voir § 34.

§ 11. — Les caractéristiques, qui sont dérivées de a' en a, b' en c, c' en b par des intercalations.

I. b′ *en* c , c′ *en* b , a′ *en* $a'_1 \ldots, a'_m = a$. Indice $2m+1$.

Je démontrerai, que des Q^2 douées de cette caractéristique, malgré les transformations succéssives donnent la même série finie que 1. du § 3, n'existent pas.

Le faisceau de coniques aa' bb' est anallagmatique. La droite aa' se transforme successivement en $a'b$, $b'b$, $b'a$, aa', et revient à elle-même après quatre applications de Q^2; les coniques aa', bb' et ab', $a'b$ sont donc transformées involutivement entre elles. Le faisceau est partagé en paires involutives et la conique ab, $a'b'$ doit se changer vers les deux directions dans la même conique par c', c. Donc abc, $a'b'c'$ sont dans une conique. Les transformés successifs entre c' et c devraient tomber sur les droites ab et $a'b'$. Mais le transformé de c' vers le second système ne peut se trouver sur $a'b'$, parceque les points de $a'b'$ viennent à c, partant le transformé de c' devrait être sur ab. Mais tous les points se transforment vers le second système en c' et n'arrivent donc jamais à c. Une périodicité ne peut donc entrer du tout et elle est même impossible, quand on prend c sur $a'b'$ et c' sur ab. Cf. § 32.

II. a′ *en* a , b′ *en* c , c′ *en* c'_1 *en* b. Indice 9.

La conique $b'cc'c'_1b$ est anallagmatique. Elle ne peut rencontrer la droite aa' en une paire involutive, car aa' serait alors une seconde paire et $a'b'c'$ seraient alignés. Elle ne la peut rencontrer non plus en deux points doubles d_1, d_2. Chacun d'eux determinerait avec la caractéristique un faisceau d'un contact commun en d_i; $aa' + C_2$ y comptant pour deux courbes rationnelles, en restent 10 et à raison de l'indice 9 une autre cubique rationnelle serait anallagmatique, qui devrait posséder un point double, dont les voisins sont invariables. Ce point double d_j determinerait un autre faisceau anallagmatique d'un contact commun en d_j et la tangente commune devrait être une des tangentes de C^4_3 en d_j, ce qui est paradoxe.

Un raisonnement analogue à celui du § 6 prouve de même, que aa' et C_2 n'ont pas en commun deux points doubles. Je vais l'exposer ici.

L'indice dans C_2 *ne peut pas être 3*. Autrement C_2 serait tangente à ab, $a'c'$ en b, c'. Les tangentes de C_2 produiraient sur aa' une homographie, ou $a'a$ sont séparés par un transformé, le point d'intérsection avec tangente en c'_1. D'autre part $b'a'$ et ca devrait se rencontrer sur C_2 et si l'on projette aa' de ce point sur C_2, on aurait une

paire de l'omographie sur C_2, ce qui ne peut pas avoir lieu. L'indice de C_2 et de aa' ne peut donc être que 9. Prenez dans C_2 une homographie de cet indice, deux suites $b'c$ et $c'c'_1 b$ et soient $\gamma'\gamma\,\beta'\beta$ corréspondants aux points $cc'\,bb'$ vers les directions libres. Alors $b'\gamma'$ et $c'\beta'$ se coupent en a', $b\gamma$ et $c\beta$ en a. Laissant fixe $c'c'_1 b$ et mouvant $b'c$, les points $a'a$ décrivent deux séries d'une corréspondance (2, 2) sur $b\gamma$ et $c'\beta'$. Quand a vient dans l'intérsection $d_1 d_2$, les deux points a' corréspondants ne peuvent jamais tomber sur $d_1 d_2$ *c. q. f. d.*

Reste donc la conclusion, *que* C_2 *touche* aa' *en un point double.* Il est visible, qu'il y a deux faisceaux anallagmatiques de C_3, l'un d'un contact commun en d_2, l'autre contenant d_1 et d_3 dans la base (d_3 sur C_2).

Premier faisceau. $C_2 + aa'$ absorbe quatre courbes C^4_3. Les huit restantes ne sont pas anallagmatiques, parceque l'indice 1 est impossible. *L'indice du faisceau est donc 3. Toutes les cubiques sont équianharmoniques portant* $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Il y a quatre C^3_3 dont une est anallagmatique, le rébroussement est un point double de Q^2, savoir d_4. Les trois autres C^3_3 forment un triple périodique.

Deuxième faisceau. $C_2 + aa'$ absorbe trois C^4_3. L'autre cubique anallagmatique ne pouvant plus absorber trois ou six courbes rationnelles, est necessairement équianharmonique avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ et contient en outre de d_1, d_3 un point double, qui sera d_4. L'indice sera 3 ou 9. En supposant 3 toutes les courbes seraient équianharmoniques avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$, toutes les courbes rationnelles seraient C^3_3 et leur nombre ne conviendrait point à l'indice 3.

Donc l'indice du faisceau est 9. Les paramètres dans C_e se calculent comme il suit:

$$b' \equiv \varepsilon b - 2\gamma\ ,\ c \equiv \varepsilon^2 b + (1 - 2\varepsilon)\gamma\ ,\ c' \equiv b + 3\varepsilon\gamma\ ,\ c'_1 \equiv \varepsilon b + (2\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma\ ,$$

$$b \equiv \varepsilon^2 b + (3 - \varepsilon^2)\gamma$$

ce qui fournît

$$b(1 - \varepsilon^2) \equiv (3 - \varepsilon^2)\gamma$$

et en choisissant

$$a' \equiv \frac{4\varepsilon - 1}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\ ,\quad a \equiv \frac{\varepsilon^2 - 4\varepsilon}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}$$

j'obtiens

$$-\varepsilon^2 b + \frac{4\varepsilon - 1}{3}\gamma + 3\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \equiv -\gamma\,,$$

et en retranchant

$$b \equiv \frac{2\varepsilon - 14\varepsilon^2}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}$$

d'où par comparation avec la valeur précédente

$$(3\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \equiv (\sigma - \mu)\frac{k_1 - k_2}{3} \qquad \text{A)}\,.$$

En posant $\gamma \equiv \dfrac{mk_1 + nk_2}{9}$, l'équation A) donne $m + n \equiv \mu$.

Remarquons que

$$b' - c \equiv b(\varepsilon - \varepsilon^2) + (2\varepsilon - 3)\gamma \equiv 6\varepsilon\gamma \text{ et } c - c'_1 \equiv (\varepsilon^2 - \varepsilon)\,b + (2 - \varepsilon^2)\gamma \equiv 3\varepsilon\gamma$$

et que $b' c c'_1$ forment par conséquence un triple conjugué par rapport à un certain triangle d'inflexion. Si $m+n\equiv 0$ (mod. 3) on aurait $3\gamma\equiv\frac{k_1-k_2}{3}$, le triangle en discours serait le Hessien et comme c'_1 est le tangentiel de d_1 (voir le tableau ci-après), b', c seraient les tangentiels de d_3, d_4, ce qui est contradictoire à la caractéristique.

Ensuite il faut que, pour compléter des triples, C_e soit tangente à ba et $a'c'$ en b, c' et passe par $(a'b', ca)$.

Pour une courbe C_e proposée on a 72 correspondances admissibles et en tout $3.72.\ Q^2$.

$$b\equiv\frac{5-2\varepsilon}{3}\gamma+\mu\frac{k_1-k_2}{3}\ ,\ b'\equiv\frac{9\varepsilon-4}{3}\gamma+\mu\frac{k_1-k_2}{3}\ ,\ c\equiv\frac{4\varepsilon^2-7\varepsilon}{3}\gamma+\mu\frac{k_1-k_2}{3}\ ,$$

$$c'\equiv\frac{5+7\varepsilon}{3}\gamma+\mu\frac{k_1-k_2}{3}\ ,\ c'_1\equiv\frac{2(\varepsilon^2-1)}{3}\gamma+\mu\frac{k_1-k_2}{3}\ ,\ d_1\equiv\frac{\gamma}{1-\varepsilon}+\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$$

$$d_3\equiv\frac{\gamma}{1-\varepsilon}\ ,\ d_2\equiv\frac{\gamma}{1-\varepsilon}-\sigma\frac{k_1-k_2}{3}\ .$$

Troisième faisceau F_3. Sur C_e le point tangentiel de d_4 est aligné avec $d_1\ d_3$, donc d_4 deux fois ajouté à la caractéristique donne la base d'un troisième faisceau F *). La seconde courbe anallagmatique est celle, qui a un point double en d_4, c'est donc la courbe C_3^3 du premier faisceau. Les cubiques de F_2 rencontrent C_3^3 en deux points variables, et parce qu'elles sont transformées à l'indice 9, l'indice de l'homographie dans C_3^3 est aussi 9.

L'indice de F_3 se trouve ayant égard à ce que l'indice de C_2 est 9, sur le champ aussi égal à 9. La considération des courbes rationnelles y conduit de même.

3. Une autre manière d'aborder la discussion serait celle-ci. Les points $c'c'_1 b$ forment *un triple périodique impropre* de Q^2 (voir IVième partie), b étant transformé en $c'a'$, de même b' en c en $a'b'$ en $a'b'c'ac$ fournit un triple et a' en a en $b'c'$ en $a'b'c'cc'_1$ en fournit un troisième. Mais une Q^2 générale possédant seulement deux triples, il en existe ici une infinité. On conclût ensuite, qu'ils remplissent une cubique et y engendrent une correspondance $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$.

4. Les homographies, qui s'établissent au moyen du théorème du § 9, sont:

a en a', b en b' en c'_1, c en c' en c ;	b en b' en a en a' en c en c',
a en a', b en b' en b, c'_1 en c en c' ;	c en c' en a en a' en c'_1, b en b',
c' en a en a' en b en b', c en c' ;	a en a', c en c' en b en b', c'_1 en c'_1.

5. Les coniques directives conduisent aux relations suivantes: $(ab', a'c)$, $(ab, a'c')$, $(ac, a'b')$, $(ac', a'c'_1)$, $(ac'_1, a'b)$ sont alignés, $(bc, b'a')$, $(ba, b'c')$, $(bc', b'c'_1)$, $(ba', b'a)$

*) Je désignerai dans ce qui suit, les cubiques et les faisceaux de cubiques anallagmatiques d'une transformation simplement par C_3 et F.

sont dans une conique qui a dans b, b' les tangentes $bc'_1, b'c$. De là s'ensuivent les alinéations

$$(b'c\ ,\ bc'_1) \text{ avec } (bc\ ,\ b'c')\ ,\ (b'a'\ ,\ ba) \quad ; \quad (bc\ ,\ b'a)\ ,\ a'$$

$$(bc\ ,\ b'c'_1)\ ,\ (b'a'\ ,\ bc') \quad ; \quad (ba\ ,\ b'c'_1)\ ,\ c'$$

$$(bc'\ ,\ b'a)\ ,\ (b'c'_1\ ,\ ba').$$

Six alinéations analogues se tirent de la conique de direction pour c, c'; savoir $(c'c'_1, b'c)$ avec

$$(ca\ ,\ c'a')\,(cb\ ,\ c'b') \quad ; \quad (ca\ ,\ c'b)\,(c'b'\ ,\ cc'_1) \quad ; \quad a(c'b'\ ,\ ca') \quad ; \quad b(c'a'\ ,\ cc'_1)\ ;$$

$$a'(cb\ ,\ c'a) \quad ; \quad (cc'_1\ ,\ c'a)\,(c'b\ ,\ ca').$$

III. a' en a, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en b. Indice 12.

Les 8 points déterminent un faisceau de cubiques, dont le neuvième pivot est double pour Q^2. Cela peut avoir lieu de deux manières.

1. *Première variété.* Un point double d_3 non situé sur aa' est le 9ième pivot du faisceau F. Les deux C_3 anallagmatiques ne se partagent pas parceque les alinéations nécessaires sont impossibles suivant le § 3. Des courbes rationnelles demanderaient deux autres points doubles de Q^2 et extérieurs à aa'.

Donc l'une au moins a $p=1$, supposons-la *harmonique* avec $u'-i'u\equiv\gamma$ et passant par d_1, l'autre passera par d_2 et afin d'empêcher l'indice impossible 1 de F, par d_4. Contenant trois points fixes *elle est équianharmonique avec* $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$. Sortant de C_e on arrive à C_h. L'indice de F n'est pas 1 ni 2, le même indice se produisant sur aa', il n'est pas 3 ni 4, parceque toutes les cubiques devraient être harmoniques ou équianharmoniques, ce qui visiblement n'a pas lieu. Restent à discuter 6 et 12. Or c'est le seul cas, où il est impossible de discerner sans récourir au § 14 et par suite au § 20. L'indice est 12.

Paramètres sur C_h. $c'\equiv ic-2\gamma\ ,\ c'_1\equiv -c+(1-2i)\gamma\ ,\ b\equiv -ic+(i+3)\gamma\ ,$

$$b'\equiv c+3(i-1)\gamma\ ,\ b'_1\equiv ic-(2+3i)\gamma\ ,\ c\equiv -c+(4-2i)\gamma$$

d'où

$$c\equiv(2-i)\gamma+\rho\ ;$$

ensuite

$$a'\equiv\frac{i-2}{2}\gamma+\rho'\ ,\ a\equiv\frac{1-2i}{2}\gamma+\rho''$$

fournit la condition

$$(i+3)\gamma+(3i-5)\gamma+\frac{i-2}{2}\gamma+(i+1)\rho+\rho'\equiv-3\gamma.$$

Il se trouve $\gamma\equiv\frac{mk_1+nk_2}{9}$. La somme des $c'c'_1c\ b'b'_1b$ devant être différent de 0

il faut $\rho \equiv \frac{k_1}{2}$ ou $\frac{k_2}{2}$, c'est-à-dire, c ne doit pas être le tangentiel de a' ou le point harmoniquement conjugué; b et c sont conjugués par $\frac{k_1 - k_2}{2}$. On voit de plus, qu'on doit prendre

$$(1+i)\rho + \rho' \equiv 0 \,,\ \frac{k_1}{2} \,,\ \frac{k_2}{2} \,,\ \frac{k_1 + k_2}{2}$$

suivant que

$$\begin{matrix} m \equiv 0 \ , & m \equiv 0 \ , & m \equiv 1 \ , & m \equiv 1 \\ n \equiv 0 \ , & n \equiv 1 \ , & n \equiv 0 \ , & n \equiv 1 \end{matrix} \qquad \text{mod. } 2$$

La condition, que $a'c'$, bc se coupent sur C_h, dit que

$$\frac{5i-4}{2}\gamma + \rho' \equiv \frac{5-4i}{2}\gamma + \rho''$$

ou

$$\frac{9(i-1)}{2}\gamma \equiv \rho' + \rho''$$

ce qui demande que $\rho' + \rho'' \equiv 0$ ou $\frac{k_1 + k_2}{2}$, selon que $n \equiv m$ ou non et cela se ramène précisément aux relations mutuelles des paires de § 4, II, α. On a donc 72 correspondances, pour chacune 2 Q^2, en tout 2. 72.

Paramètres sur C_e. En s'appuyant au § 4. III. on a

$$c' \equiv \varepsilon c - 2\gamma \,,\ c'_1 \equiv \varepsilon^2 c + (1-2\varepsilon)\gamma \,,\ b \equiv c - 3\varepsilon^2\gamma \,,\ b' \equiv \varepsilon c - 5\gamma \,,$$

$$b'_1 \equiv \varepsilon^2 c + (1-5\varepsilon)\gamma \,,\ c \equiv c - 6\varepsilon^2\gamma \,.$$

Donc $6\,\varepsilon^2\gamma \equiv 0$. Ensuite

$$a' \equiv \frac{4\varepsilon - 1}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \,,\ a \equiv \frac{\varepsilon^3 - 4\varepsilon}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}$$

et comme ci-haut

$$2c' + \frac{4\varepsilon - 1}{3}\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} \equiv 0 \,.$$

Mais ici $c'c'_1$ $b'b'_1$ bc n'étant pas sur une conique, il résulte, que $m + n \equiv 0$ est à exclure; c' prend 12 valeurs, donc les 18 correspondances donnent lieu à 18. 3. 4 Q^2 pour une C_e donnée.

Chacun des trois points doubles sur C_e a une propriété remarquable, l'un est contenu sur aa', l'autre entre dans la base de F, le troisième est le point de contact des deux coniques transformées involutivement $a'a\,c'b'_1b$, $a'a\,b'c'_1c$.

3. Des homographies, auxquelles les points de la caractéristique sont aggroupés, quelquesunes sont: a en a', b en b' en c en c', b'_1 en b'_1; a en a', b'_1 en b en b', c'_1 en c'; b en b' en a en a' en b'_1, c en c'; c'_1 en a en a' en b en b', c en c'.

Seconde variété. Un point double d_1 sur aa' est le 9ième pivot; alors $b'b'_1 c\, c'c'_1 b$ sont dans une conique C_2, qui constitue avec aa' une cubique du faisceau; C_2 est tangente à aa' en d_2 et contient un autre point double d_3. A l'extérieur se trouve d_4. La seconde C_3 anallagmatique ne peut pas se décomposer, elle n'est pas C_3^3 parceque les 7 C_3^4 restantes ne pourraient se permuter d'aucune façon compatible avec l'indice 12. Elle a donc $p=1$ et parce qu'elle contient aussi d_4, elle porte une correspondance $u'-i\,u\equiv\gamma$. On aurait le même calcul que ci-haut. Mais de la circonstance, que $b'b'_1 c\, c'c'_1 b$ sont dans une conique, on conclût, que ρ ne peut être 0 ou $\frac{k_1+k_2}{2}$. D'autre part on a $b\equiv(2-i)\,\gamma-i\rho$ et si $\rho\equiv 0$ ou $\frac{k_1+k_2}{2}$, on a $b\equiv c$, contradictoirement à la caractéristique. *Donc la décomposition supposée est inadmissible* et par là la conclusion:

Si la 2de variété subsiste, il faut que la conique $c'c'_1 b\, b'b'_1 c$ se partage. L'unique possibilité est $c'b'_1 b+b'c'_1 c$, qui se transforment involutivement entre elles et se coupent en d_2. Cette cubique trilaterale compte pour 4 C_3^4. La seconde C_3 anallagmatique doit contenir les deux autres points doubles de Q^2, parceque autrement l'indice de F serait 1.

Elle est donc équianharmonique avec $u'+\varepsilon\, u\equiv\gamma$. L'indice de F n'est pas 12 vu le nombre 8 des C_3^4, ni 6 pour la même raison, ni 2 parceque sur aa' une involution est impossible, ni 3 toutes les cubiques devenant alors harmoniques, *l'indice de* F *est donc* 4 et toutes les C_3 sont équianharmoniques avec $u'-\varepsilon\, u\equiv\gamma$. Les 4 cubiques C_3^3 forment un quadruple.

Paramètres sur C_e. $c'_1\equiv\varepsilon\, c'+\gamma$, $b\equiv\varepsilon^2 c'-\varepsilon^2\gamma$, $b'\equiv c'-3\gamma$, $b'_1\equiv\varepsilon\, c'+(1-3\varepsilon)\gamma$ $c\equiv\varepsilon^2 c'-4\varepsilon^2\gamma$, $c'\equiv c'-6\gamma$, d'où $6\gamma\equiv 0$, $\gamma\equiv\frac{mk_1+nk_2}{6}$ et avec $a'\equiv\frac{4\varepsilon-1}{3}\gamma+\rho\frac{k_1-k_2}{3}$ il s'ensuit la condition $\frac{4\varepsilon-1}{3}\gamma+\sigma\frac{k_1-k_2}{3}+2c'\equiv 0$.

Cela donne 27 correspondances dont 9 seulement sont admissibles.

Car afin d'avoir la conique $c'c'_1\, bb'b'_1 c$ on doit prendre $m+n\equiv 0$, mod. 2.

Cela fournit 9. 3. 4. Q^2.

IV. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 14.

Les 8 points déterminent un faisceau de C_3 propres, parceque en vertu du § 3 une alinéation de quatre points est impossible. Supposé, le neuvième sommet ne tomberait pas sur aa', le faisceau ne pourrait contenir nulle C_3 décomposée et invariable. L'indice de F évidemment ne peut devenir 1 ni 14, et le nombre 7 est inadmissible, parceque les deux C_3 invariables devraient compter pour cinq courbes rationnelles.

Le 9ième sommet étant sur aa', il y a une C_3 décomposée en $aa'+(b'cc'c'_1c'_2b)^2$ qui se touchent en un autre point double. Elle tient lieu de trois C_3^4 et la seconde C_3 fixe doit avoir un rebroussement en d_1. L'indice de F est 7. Voir § 34.

V. a' en a'_1 en a, b' en c, c' en c'_1 en b. Indice 14.

La caractéristique est la base d'un faisceau F de C_3, dont le neuvième sommet est double pour Q^2. Sur l'indice de F on fait les mêmes raisonnements comme précédemment et on obtient le seul indice possible 7, qui demande une C_3^3 et une C_3 décomposée fixes. Les parties de celle-ci ne peuvent pas être trois droites, parcequ'une considération de la caractéristique montre, qu'il n'y a point un triple périodique, ni plus une paire involutive de droites.

La seule alinéation à supposer est $a' a'_1 a$, qui entraîne la conique C_2 $(b' c c' c'_1 b)$ tangente à $a a'$ en d_2. Le 9ième sommet est d_3 sur C_2, la C_3^3 anallagmatique a d_4 pour rebroussement.

Des considérations analogues à celles du § 6 sont applicables ici.

VI. a' en a, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 20.

Première variété. Le faisceau F de cubiques par la caractéristique visiblement n'aura pas l'indice 1 ni 20. Il n'est pas égal à 2, parceque aussi l'indice dans $a a'$ serait 2, ni à 4, parceque 4 C_3^4 devraient se réduire aux deux C_3 anallagmatiques. Mais un coup d'œil sur la caractéristique apprend, qu'une cubique décomposée invariable est impossible et que les 4 C_3^4 devraient être remplacées par deux C_3^3. Certainement aucune d'elles ne contient une paire involutive et comme la *caractéristique ne la produit pas improprement,* elle se trouve à l'extérieur des C_3^3, ce qui serait inadmissible à raison de l'indice 4.

L'indice 5 est aussi inadmissible. Car deux cas pourraient s'imaginer: ou deux C_3^4 restent fixes ou une C_3^3 et une courbe à $p=1$. Le premier cas: les points doubles des C_3^4 n'ont pas leurs voisins fixes, parceque l'homographie dans C_3^4 aurait trois points doubles; ils ne les ont pas unis à des paires involutives, parceque les C_3^4 devraient passer par deux autres points d de Q^2, qui n'existent pas. Le deuxième cas: la courbe à $p=1$ serait harmonique, à cause de C_3^3 il est impossible, que toutes les courbes soient harmoniques, et si elles avaient des correspondances $u'-u\equiv\gamma$, cela serait contradictoire aux quintuples contenus sur $a a'$.

L'indice est 10 par conséquent; les courbes fixes sont une C_3^3 *et une courbe harmonique,* C_h *passant par* d_1 *sur* $a a'$ *et par* d_3, C_3^3 *par* d_2 *sur* $a a'$ *et par* d_4.

Paramètres sur C_h. $a'\equiv\frac{i-2}{2}\gamma+\rho'$, $a\equiv\frac{1-2i}{2}\gamma+\rho''$

ensuite

$$b\equiv ib-2\gamma\,,\quad b'_1\equiv -b+(1-2i)\gamma\,,\quad c\equiv -ib+(3+i)\gamma\,,\quad c'\equiv b+3(i-1)\gamma\,,$$

$$c'_1\equiv ib-(2+3i)\gamma\,,\quad c'_2\equiv -b-2(i-2)\gamma\,,\quad b\equiv -ib+(4i+3)\gamma\,,$$

d'où

$$b\equiv\frac{i+7}{2}\gamma+\rho\quad,\quad\left(\rho\equiv 0\,,\ \frac{k_1+k_2}{2}\right)$$

et

$$b\,(1+i)+3\,(i-1)\gamma+\frac{i}{2}\gamma+\rho'\equiv 0\ ,\quad \text{partant}\quad \frac{15i}{2}\gamma+\rho'\equiv 0\,.$$

Les paramètres s'expriment en γ de la manière suivante:

$$a'\equiv\frac{i-2}{2}\gamma+\rho'\quad,\quad a\equiv\frac{1-2i}{2}\gamma+\rho'',$$

$$b\equiv\frac{i+7}{2}\gamma+\rho\,,\ b'\equiv\frac{7i-5}{2}\gamma+i\rho\,,\ b'_1\equiv-\frac{5i+5}{2}\gamma-\rho\,,\ c\equiv\frac{7-5i}{2}\gamma-i\rho\,,$$

$$c'\equiv\frac{13i-5}{2}\gamma+\rho\,,\ c'_1\equiv\frac{i-5}{2}\gamma+i\rho\,,\ c'_2\equiv-\frac{3(i+1)}{2}\gamma-\rho\,.$$

Des valeurs de γ, qui sont toutes de la forme $\frac{m k_1+n k_2}{15}$ on doit exclure celles,

où $m \equiv n \equiv 5$ comme reduisant Q^2 à une homographie, et $m \equiv n \equiv 3$, comme faisant coincider b', c'. Comme la caractéristique est la base d'un F, il faut $\rho' + \rho'' - \rho \equiv 0$, ce qui donne un seul ρ pour une correspondance donnée, en somme 4. 48. Q^2 de cette variété.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34 *).

Deuxième variété. La caractéristique n'étant pas la base d'un faisceau la seule cubique anallagmatique est harmonique. Le calcul des paramètres est identique au précédent, seulement devant exister ici $\rho' + \rho'' - \rho \equiv \frac{k_1 + k_2}{2}$, on obtient les autres 4. 48. Q^2 dérivées des mêmes correspondances.

Troisième variété. La seule cubique déterminée par la caractéristique est $a a' + (b' b'_1 c c' c'_1 c'_2 b d_2 d_3)^2$, qui se touchent en d_2 sur $a a'$. Les raisonnements du § 6 s'appliquent à ce cas. Je remarque, que $b' c'_1$, $b'_1 c'_1$, $c c'_2$ ainsi que $b c$, $b'_1 c'_2$, $b' c'_1$ se coupent sur $d_2 d_3$.

VII. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b. Indice 24.

Première variété. La caractéristique est la base d'un faisceau F dont l'indice n'est ni 1 ni 2 ni 24 ni 3. Cela résulte d'une manière analogue au n. III.

L'indice 12 n'a pas lieu parceque les deux courbes fixes seraient nécessairement de $p = 1$ et je démontrerai, que C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ ne fournit pas notre Q^2. En effet des paramètres

$$a' \equiv -\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}, \quad a \equiv -\varepsilon^2 \gamma - \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$$

$$b' \equiv -\varepsilon b - 2\gamma, \quad c \equiv \varepsilon^2 b + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma, \quad c' \equiv -b + \varepsilon\gamma, \quad c'_1 \equiv \varepsilon b + (1 - \varepsilon^2)\gamma,$$

$$c'_2 \equiv -\varepsilon^2 b + (2 - \varepsilon)\gamma, \quad c'_3 \equiv b - 3\varepsilon\gamma, \quad b \equiv -\varepsilon b + (2\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma,$$

e tire les conditions

$$b \equiv (\varepsilon^2 - 2)\gamma \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 b + \varepsilon\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} \equiv 0$$

ou

$$(2\varepsilon - 2\varepsilon^2)\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} \equiv 0.$$

Mais on a $b' - c' \equiv (1 - \varepsilon) b + (\varepsilon^2 - 1)\gamma \equiv -6\gamma \equiv 0$, ce qui ferait la caractéristique illusoire.

L'indice 8 est inadmissible, parceque les C_3 porteraient l'indice 3 et la droite $a a'$ étant remplie d'octuples, chacune C_3 aurait un point invariable et leurs correspondances devraient être $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Les C_3 étant équianharmoniques par conséquent, F ne contiendrait que six C_3^3, ce qui est incompatible avec l'indice.

Reste donc l'indice 4. *Toutes les* C_3 *jouissant d'une correspondance de l'indice* 6 *à un point double situé sur* $a a'$, *sont équianharmoniques. Il y a six* C_3^3, *dont deux sont anallagmatiques et contiennent les quatre points* d_i *de* Q^2. Les rebroussements des autres C_3^3 donnent *le seul quadruple périodique, qui se trouve à côté de la série sur* $a a'$.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

*) De ce paragraphe on tirera la conclusion, qu'une Q^2 à une C_3^3 anallagmatique appartient nécessairement à la première variété.

Le lieu des octuples est C_8 par $a'^4 a^4 b'^2 c^2 c'^2 c'^2_1 c'^2_2 c'^2_3 b^2$, celui des 12uples est C_{12} par $a'^6 a^6 b'^3 c^3 c'^3 c'^3_1 c'^3_2 c'^3_3 b^3$. Elles passent par d_3, d_4 et C_{12} touche là les tangentes de C_3^3.

Seconde variété. Par la caractéristique passe une C_3 unique, qui par suite du calcul de ci-haut ne sera pas équianharmonique, ni C_3^3 (voir § 34). Elle se décompose donc en $aa' + (b'cc'c'_1c'_2c'_3bd_2d_3)^2$. Je remarque que $b'c'_1$, cc'; $b'c'_2$, cc'_1; $b'c'_3$, cc'_2; $b'b$, cc'_3 de même que ba, $c'c'_3$, $c'_1c'_2$; $a'c'$, c'_1b, $c'_2c'_3$ se coupent sur $d_2\,d_3$.

VIII. a' en a'_1 en a'_2 en a, b' en c, c' en c'_1 en b. Indice 24.

Première variété. La caractéristique détermine un faisceau F. Une C_c anallagmatique avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ est impossible, parceque

$$b' \equiv -\varepsilon b - 2\gamma\,,\quad c \equiv \varepsilon^2 b + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma\,,\quad c' \equiv -b + \varepsilon\gamma\,,\quad c'_1 \equiv \varepsilon b + (1-\varepsilon^2)\gamma\,,\ b \equiv -\varepsilon^2 b + (2-\varepsilon)\gamma\,,$$

donc

$$b \equiv (1 - 2\varepsilon^2)\gamma\,,\quad \text{et comme}\quad a' \equiv 2\varepsilon^2\gamma$$

$$2\varepsilon^2\gamma - 2\varepsilon\gamma + \varepsilon^2\gamma + 2\gamma + \varepsilon\gamma \equiv -3\gamma\,,$$

savoir

$$4(1-\varepsilon)\gamma \equiv 0\,;$$

il s'ensuit $b' \equiv -\varepsilon\gamma$, de plus $b' \equiv c$, contrairement à la caractéristique.

Une C_3 décomposée ne reste pas fixe, puisque la seule alinéation anallagmatique serait $a'a'_1a'_2a$. Mais C_2 par $c'c'_1bb'c$ étant en tous cas anallagmatique, on en peut conclure l'indice de F. Visiblement il n'est ni 1 ni 2 ni 12 ni 24. S'il était 3, les C_3 auraient l'indice 8 et leurs correspondances un point double sur C_2, chose impossible (§ 4). Pour la même raison, l'indice 8 entraînerait que les C_3 soient harmoniques et deux C^4_3 anallagmatiques, mais les 10 restantes ne s'absorbent pas par l'indice 8. *Reste l'indice 4 et toutes les* C_3 *sont équianharmoniques avec* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$, *deux* C_3^3 *restent fixes.*

Seconde variété. La seule C_3 par la caractéristique ne peut pas être C_3^3 (voir § 34). Il existe donc $(a'a'_1a'_2a)^4 + (b'cc'c'_1b)^2$, qui se touchent en d_2.

[§ 12.—La caractéristique a' en b, b' en c, c' en a. Indice 6.]

1. Les transformations successives sont

	Droite	C_2	C_4	C_5	C_4	C_2	Droite
a'		1	2	2	1		
b			1	2	2	1	
b'		1	2	2	1		
c			1	2	2	1	
c'		1	2	2	1		
a			1	2	2	1	

2. Envisageons la conique directive D_a appartenant à aa'. Elle passe par $k=(ac, a'b')$, $\alpha=(a'c, ab')$ et touche les droites $a'b$ en a', ac' en α, parceque les paires de droites aa', $a'b$ et ac', $a'a$ sont correspondantes.

Il y a donc un quadrangle $ak\,a'\alpha$ inscrit en D_a et les deux tangentes en a, a' se coupent sur la droite qui joigne $(ak, a'\alpha)$ à $(a'k, a\alpha)$. Tenant compte du résultat précédent on en tire la condition:

$a'b$, $b'c$, $c'a$ convergent vers le point σ', 1)

les triangles a'b'c' *et* bca *sont donc homologiques dans l'ordre écrit.*

En considérant le quadrangle complet $a, k, a', (ab, a'c')$ on voit, que aussi les points

$$(ac\,,\,a'c')\quad,\quad(ab\,,\,a'b')\quad,\quad(ac'\,,\,a'b)$$

sont alignés. Et la même considération pour bb' fournit la propriété, que

$$(bc\,,\,b'c')\quad,\quad(ba\,,\,b'a')\quad,\quad(ba'\,,\,b'c)$$

sont alignés.

Mais les deux points qui se trouvent à la fin des deux dernières lignes sont identiques à cause de 1), donc aussi les droites respectives sont identiques. Cela rend évident, que $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$ sont alignés ou que la condition doit être satisfaite

$a'a$, $b'b$, $c'c$ convergent vers un point σ 2)

Suivant des théorèmes déjà vulgarisées on en tire, que

$a'c$, $b'a$, $c'b$ convergent vers un point σ''. 3)

De plus les alinéations de ci-haut donnent la condition:

L'axe d'homologie 2) *passe par le centre* σ' *de l'homologie* 1).

Plus précisément ces conditions se distribuent dans l'ordre suivant aux demandes de la caractéristique: Afin que l'homographie des faisceaux a, a' soit celle, qui satisfait à la caractéristique, il est bésoin de l'homologie 1) et que σ' soit dans la droite $(ab, a'b')$ $(ac, a'c')$. Afin que la paire $b'c$ soit pleinement produite, σ' doit se trouver sur $(ab, a'b')$ $(bc, b'c')$. Cela entraîne l'homographie 2) et de là aussi 3).

Les triangles abc, $a'b'c'$ donnent ainsi lieu à une configuration (A) $(3, 3)_9$ *) et il existe une homographie ternaire d'indice 3, qui transforme a en b en c en a et c' en b' en a' en c'. Elle transforme σ en σ'' en σ' en σ et nos homologies dans l'ordre 2) 3) 1). De là:

Le triple des axes est circonscrit au triple des centres de cette manière, que les axes pour σ, σ', σ'' *passent par* σ', σ'', σ.

En supposant donnés deux triangles pareillement situés, on peut choisir une quelconque des trois homologies comme 2), on doit en tirer la conjonction des paires principales et prendre l'homologie, dont le centre est situé dans l'axe de 2), comme 1). Par là on doit déterminer l'enchaînement des points principaux par la transformation. D'où je conclus ce théorème important:

Quand deux triangles principaux admettent une fois la caractéristique en question, ils l'admettent de trois manières.

*) Voir Math. Ann. XIX, p. 297: Kantor, *Bemerkung zu Herrn Sturms Aufsatz über die reciproke Verwandtschaft.*

Il existe une position des triangles (cf. § 2, n. 10) où le triangle des axes est identique au triangle des centres, alors ils sont six fois homologiques et admettent 12 fois la présente caractéristique.

3. Le point a' étant transformé vers le premier système en bc, il existe la paire involutive impropre $a'b$, de même $b'c$; mais s'il y en a deux, il y en a ∞^1. Leur lieu est une cubique qui par rapport au quadrangle des points doubles est conjuguée à soi-même. Car le lieu ne peut pas être du 1er ou 2d degré à raison de la propriété citée, ni plus d'un degré supérieur à 3 à raison de l'ordre de la seconde transformation du tableau. Cette courbe J_3 est tangente à bc en b, à ca en c, à ab en a et de même à $b'c'$ en c', à $c'a'$ en a', à $a'b'$ en b'. Donc bca, $b'c'a'$ sont deux cycles tangentiels. En s'appuyant aux homographies périodiques d'indice 3, démontrées dans les n. 2 ou 4, on conclût, que les deux cycles tangentiels appartiennent au même triangle d'inflexion. En faisant usage du n. 4 on pourrait même dériver la triple homographie de l'existance des cycles tangentiels.

La courbe J_3 contient donc aussi $\sigma\sigma'\sigma''$. Or les droites aa', bb', cc' sont transformées en $a'b$, $b'c$, $c'a$ et puis en $b'b$, $c'c$, $a'a$ *par suite le point* σ *est transformé involutivement en* σ'.

Or $\sigma\sigma'$ sont contenus sur J_3 et $\sigma\sigma'\sigma''$ forment là un cycle tangentiel dans l'ordre $\sigma'\sigma\sigma''$. Ainsi des paires involutives quatre sont alignées avec σ', savoir: $\sigma'\sigma$, $a'b$, $b'c$, $c'a$. L'involution est donc de l'espèce $u'+u\equiv\gamma$.

J_3 contient les quatre points doubles. L'un d'eux est σ'' et ses directions sont permutées à l'indice 3.

4. Je vais exposer, de quelle façon on peut tirer parti de la 2ième transformation du tableau. La conjonction des points fondamentaux se détermine, comme il suit:

$$\begin{array}{cccccccc} \Sigma & a' & b' & c' & ac & ba & bc \\ \Sigma' & a'c' & b'a' & c'b' & a & b & c. \end{array}$$

D'après les conditions sur les points fondamentaux de la transformation biquadratique on a

$$a(a'b'c'b) \;\pi\; b(c'a'b'c) \;\pi\; c(b'c'a'a).$$

Mais cela exprime exactement, qu'il y a une transformation linéaire, qui possède les triples périodiques abc et $a'c'b'$. Cela démontré, les conclusions se suivent comme au n. 2.

5. Le théorème du § 9 donne:

Il existe une homographie, qui renferme la paire involutive aa' *et transforme* c *en* c' *en* b *en* b'.

Cela entraîne, que cc' et bb' se coupent sur aa'. C'est l'une homographie du n. 2.

6. J'énoncerai ici expressément sur la cubique à $p=1$ une propriété qui est contenue dans n. 3:

Si trois triples tangentiels d'une cubique, qui appartiennent au même triangle d'inflexion, forment une configuration (A), *celle-ci a la propriété particulière, que deux des trois triangles fournissent des axes d'homologie, qui sont circonscrits dans un certain sens aux trois centres d'homologie.*

Deux telles configurations appartiennent à un triangle d'inflexion et elles jouissent des deux sens opposés de la circonscription.

7. *Cubiques et faisceaux anallagmatiques.* À cause du petit nombre des points de la caractéristique les C_3 et F sont assez nombreuses et aussi variées. La grande variabilité des points principaux fait immédiatement voir, que cette transformation peut donner lieu aux récherches le plus intéressantes.

Les points de la cubique $a'c+b'a+c'b$ sont combinés à des sextuples, dans chaque droite les points et leurs troisièmes transformés forment les paires d'une involution, les points de coincidence sont σ'' et trois points τ_1, τ_2, τ_3. Ceux-ci font un triple périodique de Q^2.

Les points $\tau'_1=(aa', b'c)$, $\tau'_2=(a'b, c'c)$, $\tau'_3=(b'b, c'a)$ donnent un autre triple périodique de Q^2.

Un faisceau F est donc constitué par la caractéristique et $\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3$; il contient $aa'+bb'+cc'$ et $a'b+b'c+c'a$ comme deux cubiques permutées entre elles. La courbe D_3 qui passe par $\tau_1\tau_2\tau_3$ est anallagmatique et devra couper J_3 ou en un seul point double ou en les trois points doubles $d_2\, d_3\, d_4$. Dans le premier cas elle aurait une correspondance d'indice 3 à un point double, donc $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$ et par là deux autres points doubles extérieurs à J_3, ce qui est impossible.

Donc D_3 *est équianharmonique avec* $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$ *et contient outre* $d_2\, d_3\, d_4$ *les deux triples périodiques* $\tau_1\tau_2\tau_3$, $\tau'_1\tau'_2\tau'_3$. Elle passe par $(a'c', cb)$, $(c'b', ab)$, $(b'a', ac)$, situés sur l'axe de σ''. Toutes les C_3 de F étant équianharmoniques il n'y a que deux C_3^3, dont les rebroussements constituent une paire involutive de J_3.

On reconnaît ce théorème très singulier *):

Quand on a sur une cubique arbitraire deux triples tangentiels, qui forment une configuration (A), *les trois courbes* C_3, *qui contiennent les deux triples et passent par les trois intersections de côtés sur une des trois axes d'homologie, sont équianharmoniques et chacune rencontre la cubique donnée en trois points contangentiels avec le centre respectif d'homologie.*

La seconde cubique S_3 invariable de F passe par σ'' et elle n'aura pas là une osculation avec J_3, parce qu'elle ne pourrait pas porter l'indice 3 ni 6, les deux points doubles ou involutifs ne se trouvant pas sur J_3. Soient donc $j_1\, j_2$ les points d'intersection de S_3 avec J_3. *La correspondance de* S_3 *a l'indice 6.*

Les cubiques J_3 et $a'c+b'a+c'b$ constituent un faisceau d'indice 3. Donc chaque courbe porte une involution, dont les points doubles sont: σ'' et les trois points d'intersection avec D_3. Le point triple en σ'' compte pour 6 C_3^4, les autres 6 se partagent en deux triples périodiques.

J_3 et D_3 constituent un autre faisceau anallagmatique. S_3 est rencontrée par J_3 en σ'' et $j_1\, j_2$, par D_3 en un triple périodique, d'où il s'ensuit, que l'indice du faisceau est 6.

Un faisceau important contient les cubiques S_3 et $a'c+b'a+c'b$. Ses cubiques ont une osculation dans la seconde direction invariable de σ'' (l'une est celle de J_3). Deux cubiques de F rencontrant J_3 en $j_1\, j_2$ et le point σ'' deux fois compté, toutes les cubiques la rencontrent en des paires alignées avec σ'. *Ces* C_3 *sont donc toutes anallagmatiques et par suite équianharmoniques avec* $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. Leurs triples périodiques sont les

*) [Voir l'énoncé dans mon Mémoire Cr. J. XCV, p. 197].

points d'intersection avec D_3. Le faisceau contient 3 C_3^3, dont les rebroussements sont d_2, d_3, d_4 et les tangentes de rebroussement sont les secondes directions invariables de d_2, d_3, d_4.

Chaque courbe de ce faisceau F détermine avec J_3 un faisceau, dont les cubiques sont permutées à l'indice 3.

Chaque courbe du même faisceau F détermine avec D_3 un faisceau à l'indice 2. Je conclus ce théorème:

Les courbes D_3, S_3, $a'c+b'a+c'b$ *constituent un réseau de cubiques équianharmoniques.*

Tous ces résultats sont réunis dans le tableau suivant où deux points infiniment voisins, p. e., d'un point d déterminé sont distingués par $\bar{d}$, $\bar{\bar{d}}$ tandis que les points infiniments voisins des différents ordres dans la même direction sont distingués par $'d$, $''d$. De là les signes $''\bar{\bar{d}}$, $'\bar{\sigma}$ etc.

Courbes invariables	Nature des cubiques	Points base	Indice de F	Indice des C_3
S_3, $a'c+b'a+c'b$	équianharm.	$\sigma''+'\bar{\bar{\sigma}}''+''\bar{\bar{\sigma}}''$	1	6
D_3, J_3	arbitraires	$d_2+d_3+d_4$	6	1
D_3, S_3	équianharm.	$\tau'_1+\tau'_2+\tau'_3$	2	3
D_3, $a'c+b'a+c'b$	équianharm.	$\tau_1+\tau_2+\tau_3$	2	3
D_3, A^3_3	équianharm.	$d_2+'\bar{\bar{d}}_2+''\bar{\bar{d}}_2$	2	3
D^3, B^3_3	équianharm.	$d_3+'\bar{\bar{d}}_3+''\bar{\bar{d}}_3$	2	3
D_3, C^3_3	équianharm.	$d_4+'\bar{\bar{d}}_4+''\bar{\bar{d}}_4$	2	3
J_3, $a'c+b'a+c'b$	arbitraire	$\sigma''+'\bar{\sigma}''+''\bar{\sigma}''$	3	2
J_3, A^3_3	arbitraire	$d_2+'\bar{d}_2+\sigma''$	3	2
J_3, B^3_3	arbitraire	$d_3+'\bar{d}_3+\sigma''$	3	2
J^3, C^3_3	arbitraire	$d_4+'\bar{d}_4+\sigma''$	3	2
J_3, S_3	arbitraire	$j_1+j_2+\sigma''$	3	2

8. *Paramètres sur* J_3. $b\equiv\gamma-a'$, $b'\equiv a'-3\gamma$, $c\equiv 4\gamma-a'$, $c'\equiv a'-6\gamma$, $a\equiv 7\gamma-a'$, $a'\equiv a'-9\gamma$. Cela demande $9\gamma\equiv 0$. Ensuite $a'+b'+c'\equiv -3\gamma$ ou $3\,a'\equiv -3\gamma$ donne $a'\equiv -\gamma+\frac{C}{3}$. En déterminant la valeur de γ, on voit en effet, que $a'b'c'$ et abc sont deux triples tangentiels:

$$a'\equiv -\gamma+\frac{C}{3},\ b'\equiv -4\gamma+\frac{C}{3},\ c'\equiv 2\gamma+\frac{C}{3},\ a\equiv\gamma-\frac{C}{3},\ b\equiv 2\gamma-\frac{C}{3},\ c\equiv -4\gamma-\frac{C}{3}.$$

Il y a 72 correspondances. Leurs centres de convergence sont les 72 points des triples tangentiels. À toute correspondance appartient une seule Q^2.

9. *Paramètres sur* D_3. $b \equiv \varepsilon a' + \gamma$, $b' \equiv \varepsilon^2 a' + (\varepsilon - 2)\gamma$, $c \equiv a' - 3\varepsilon\gamma$, $c' \equiv \varepsilon a' + (2\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a \equiv \varepsilon^2 a' + 2\varepsilon^2\gamma$, $a' \equiv a'$. Il existe la condition $(4\varepsilon - 1)\gamma \equiv -3\gamma$, ou

$$2(\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \equiv 0 \quad , \quad \gamma \equiv \rho \frac{k_1 - k_2}{6} = \frac{C}{2}.$$

Pour chaque correspondance existe une infinité simple de Q^2.

10. *Paramètres sur* S_3. $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$, $a' + \varepsilon a \equiv -2\gamma$.

$b \equiv \gamma - \varepsilon a'$, $b' \equiv \varepsilon^2 a' + (\varepsilon^2 - 1)\gamma$, $c \equiv -a' + \varepsilon\gamma$, $c' \equiv \varepsilon a' + (\varepsilon - 1)\gamma$, $a \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma$, $a' \equiv a'$. Aussi la condition $a' + b' + c' \equiv -3\gamma$ est remplie de soi-même.

La correspondance est donc arbitraire et étant une fois choisie, la caractéristique peut être prise de ∞^1 *manières.*

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

11. Cette transformation est distinguée des autres, parce qu'elle contient un paramètre variable, c'est le rapport anharmonique de la cubique J_3.

§ 13. — La caractéristique a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a. Indice 15.

La considération du tableau § 3, p. 42, montre que à côté des alinéations de l'espèce abb' ou abb'_1 les suivantes alinéations sont impossibles:

$$b'bc'_1 \;,\; b'bb'_1 \;,\; b'b'_1c'_1 \;,\; b'ab'_1 \;,\; b'ac'_1 \;,\; b'cb'_1 \;,\; b'cc'_1$$

$$a'ab'_1 \;,\; a'ac'_1 \;,\; a'b'_1c'_1 \;,\; a'bb'_1 \;,\; a'bc'_1 \;,\; a'cb'_1 \;,\; a'cc'_1$$

$$c'cb'_1 \;,\; c'cc'_1 \;,\; c'b'_1c'_1 \;,\; c'ab'_1 \;,\; c'ac'_1 \;,\; c'bb'_1 \;,\; c'bc'_1.$$

Les 8 points déterminent donc un faisceau F, dont le 9ième sommet est d_1. L'indice 1 est impossible, comme une correspondance d'indice 15 et à un point double n'existe pas. L'indice 15 est impossible à raison du nombre des C_3^4, car les deux courbes anallagmatiques ne peuvent point absorber toutes les 12 C_3^4. L'indice 3 est impossible à cause de l'indice 5, que chaque cubique devrait porter.

Reste donc l'indice 5 de F. Toutes les cubiques sont équianharmoniques avec $u' - u \equiv \gamma$. *Les deux* C_3 *invariables sont une* C_3^3 *et une* C_e, *passant respectivement par* d_2 *et par* d_3, d_4. La courbe C_e touche ac en c, $b'a'$ en b', ab en a et $c'b'$ en c' et passe en $(bc, a'c')$.

Paramètres sur C_e. $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Il s'ensuit

$$a' \equiv \varepsilon a - 2\gamma \;,\; b \equiv \varepsilon^2 a + (1 - 2\varepsilon)\gamma \;,\; b' \equiv a + 3\varepsilon\gamma \;,\; b'_1 \equiv \varepsilon a + (2\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma \;,\; c \equiv \varepsilon^2 a + (3 - \varepsilon^2)\gamma \;,$$

$$c' \equiv a + 3(\varepsilon - 1)\gamma \;,\; c'_1 \equiv \varepsilon a + 2\varepsilon(\varepsilon - 2)\gamma \;,\; a \equiv \varepsilon^2 a + (3 - 4\varepsilon^2)\gamma \;,$$

ce qui demande que

$$(\varepsilon^2 - 1)a \equiv (4\varepsilon^2 - 3)\gamma.$$

Ensuite

$$a' + b' + c' \equiv -3\gamma \quad \text{ou} \quad (1 - \varepsilon^2)a \equiv 2(1 - 3\varepsilon)\gamma.$$

Par là

$$5(\varepsilon^2-\varepsilon)\gamma\equiv 0 \quad \text{ou} \quad \gamma\equiv\frac{(2n-m)k_1-(2m-n)k_2}{15}$$

et

$$a\equiv\frac{2(m-n)k_1+(2m+n)k_2}{15}+\rho\,\frac{k_1-k_2}{3}.$$

La caractéristique est donc

$$a\equiv\frac{4\varepsilon^2-3}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ a'\equiv\frac{8-\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ b\equiv\frac{8\varepsilon-1}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ b'\equiv\frac{4\varepsilon^2-3\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ b'_1\equiv\frac{3-2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\gamma$$

$$c\equiv\frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ c'\equiv\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\gamma\,,\ c'_1\equiv\frac{3\varepsilon-2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\gamma.$$

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

§ 14. — La caractéristique illusoire a' en b, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en a.

Quoique dans le § 3 j'aie établi le tableau des transformations successives qui reviennent à l'homographie, je démontrerai maintenant, qu'un tel enchaînement des points principaux est du tout inconstructible. La vraie cause de cette circonstance est celle que les deux transitions a' en b, b' en c amènent nécessairement la troisième c' en a. Mais c'est un des nouveaux et singuliers problèmes, suggérés par notre objet, que d'éclairer dans ce cas l'existence du tableau limité.

L'apparition de la Q_{17} à la suite des répétitions, c'est-à-dire la nature de la caractéristique empêche toute alinéation entre les 8 points. De plus quelques alinéations seraient aussi contradictoires à l'enchaînement voulu.

Les 8 points sont donc la base d'un faisceau F, dont le 9ième sommet serait un point double d_1. La courbe anallagmatique ne peut pas dégénerer, parceque droite et conique invariables n'existent pas et que d'autre part l'ensemble devrait passer par d_1, sans y avoir un point double. Une C_3^4 n'est pas anallagmatique, car sa correspondance ne peut pas être une involution, en vertu de c' en c'_1 en c'_2 en a, ni peut avoir les voisins de d_2 comme doubles, parceque un point invariable déjà existe sur elle. Quand on aurait une ou deux courbes C_3^3, les 10 ou 8 courbes rationnelles restantes devraient se partager par l'indice 2. L'indice 9 à un point double n'existe pas sur une C_3. Restent 3 ou 4 comme indice de F. Toutes les C_3 seraient équianharmoniques; C_e invariable avec $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$ n'existe pas à cause de c' en c'_1 en c'_2 en a; C_e avec $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ ni plus à cause du calcul fait au § 12, n. 10. Donc toutes les hypothèses s'écartent comme inadmissibles.

Remarque. Les différentes considérations, qui m'ont servi dans les paragraphes précédents pour démontrer l'existence des courbes anallagmatiques du 2d ou 3ième ordre, jouent un rôle plus élévé que celui d'éclairer et de préciser la nature des transformations. En même temps qu'elles vérifient l'existence des transformations, *elles achèvent la démonstration de leur périodicité.* Car si le tableau de la caractéristique finit par l'homographie, l'existence d'une cubique ou d'une conique remplie de groupes périodiques en démontre la périodicité. Comme dans tous les cas traités l'indice sur la courbe est facteur de l'indice de la caractéristique, l'homographie elle-même est dejà une identité.

§ 15. — La transposition. Application aux transformations des §§ 10 à 13.

Avant de continuer la recherche des caractéristiques et des transformations leur appartenantes, il faut introduire un autre principe, qu'on peut dire la *transformation des transformations.*

S'il existe dans un plan E une transformation T qui conduit p_1 à p_2 et qu'on applique une transformation $\mathfrak{T}$ constituant une relation entre E et E', elle traduira T en une autre transformation T' dans E'. Soit p'_1 un point de E', cherchez suivant T le point p_1 de E, transformez-le par $\mathfrak{T}$ en p_2 et celui-ci par T en p'_2, alors vous aurez une paire $p'_1\, p'_2$ de la nouvelle transformation T'.

Une transformation périodique traduite par une transformation non dégénerée donne une transformation périodique du même indice.

Originairement ce principe m'a servi à déduire de transformations connues d'autres Q^2 périodiques, ensuite je l'ai utilisé pour réduire des transformations les unes aux autres et enfin il est devenu un moyen pour établir dans les cas supérieurs une forme précise du problème des transformations périodiques. Voir § 35 et la IV. partie.

Mais au fond cette transposition est la même opération que celle que la théorie avec groupes désigne par $T\,S\,T^{-1}$ et envisagée sous ce point de vue elle est susceptible, d'être généralisée.

Notations. Je désignerai les droites, coniques, cubiques etc. du plan E par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par des indices 1 ou 2, suivant qu'elles appartiennent au premier ou second système transformé de ce plan, et analoguément les lieux sur E' par $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \ldots$ ou $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2, \ldots$ Les points fondamentaux de E sont désignés par les lettres minuscules, ceux de E' par les majuscules.

Applications.

§ 9. II. 1. α' en $\beta\,(aa'b)$ *) en $\begin{cases} \beta_2\,(a'ab') \text{ en } \beta'_2\,(A'AB') \\ \gamma_1\,(a^2a'b'_1\,bc) \text{ en } \beta'_1\,(AB'_1C) \end{cases}$

A' en ab en $\begin{cases} c' \text{ en } C' \\ (abc\,a'b'_1)^2 \text{ en } B'_1C. \end{cases}$ $\quad B'$ en b' en $\begin{cases} b'_1 \text{ en } B'_1 \\ ac \text{ en } AC \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} C' \text{ en } c' \text{ en } c' \text{ en } C'_1 \\ C'_1 \text{ en } c'_1 \text{ en } c \text{ en } C. \end{matrix}$

Caractéristique de E': $A'A$, $B'B'_1$, AC accouplés et B' en B'_1, A' en C' en C'_1 en C. Voir § 17, I.

2. α' en $\beta\,(cc'c'_1)$ en $\begin{cases} \gamma_2\,(c'^2c'_1\,ca'b') \text{ en } \beta'_2\,(C'A'B') \\ \gamma_1\,(c^2c'c'_1\,ab) \text{ en } \beta'_1\,(CAB). \end{cases}$

C' en cc'_1 en $\begin{cases} cc' \text{ en } C'_1 \\ (cabc'c'_1)^2 \text{ en } AB. \end{cases}$ $\quad B'$ en b' en $\begin{cases} b'_1 \text{ en } B'_1 \\ ac \text{ en } AC \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} A' \text{ en } a' \text{ en } a \text{ en } A, \\ C'_1 \text{ en } cc' \text{ en } c'c'_1 \text{ en } C, \\ B'_1 \text{ en } b'_1 \text{ en } b \text{ en } B. \end{matrix}$

Caractéristique de E': $A'A$, $B'B$, $C'C$ accouplés et A' en A, C' en C'_1 en C, B' en B'_1

*) D'autres $\mathfrak{T}$ analogues seraient $\mathfrak{T}_{(aa'b')}$, $\mathfrak{T}_{(aa'c)}$, $\mathfrak{T}_{(aa'c')}$.

en B; c'est de nouveau § 9, II, mais en égard aux alinéations $b'cc'_1$, b'_1cc', $bc'c'_1$ il s'ensuit, que T' possède deux paires de points principaux infiniment voisins B'C' et BC. Cf. § 33.

$$3.\ \alpha' \text{ en } \beta\ (aa'd_4) \text{ en } \begin{cases} \gamma_2\,(a'^2 ad_4\, b'c') \text{ en } \beta'_2\,(A'B'C') \\ \gamma_1\,(a^2 a' d_4\, bc) \text{ en } \beta'_1\,(ABC) \end{cases}$$

$$A' \text{ en } ad_4 \text{ en } \begin{cases} a'd_4 \text{ en } A \\ (a'd_4\, abc)^2 \text{ en } BC \end{cases} \qquad B' \text{ en } b' \text{ en } \begin{cases} b'_1 \text{ en } B'_1 \\ ac \text{ en } AC \end{cases} \qquad C' \text{ en } c' \text{ en } \begin{cases} c'_1 \text{ en } C'_1 \\ ab \text{ en } AB \end{cases}$$

$$B'_1 \text{ en } b'_1 \text{ en } b \text{ en } B\ ,\quad C'_1 \text{ en } c'_1 \text{ en } c \text{ en } C\ .$$

Caractéristique de E': A'A, B'B, C'C accouplés et A' en A, B' en B'_1 en B, C' en C'_1 en C, comme § 9, II.

Autres $\mathfrak{T}^2$, qui produiraient des transformations quadratiques, n'existent pas.

§ 10. III. 1. α' en β $(aa'b)$ donne A'A, $B'B'_2$, AC accouplés et B' en B'_1 en B'_2, A' en C' en C'_1 en C'_2 en C.

2. α' en β $(aa'c)$ donne A'A, AB, $C'C'_1$ accouplés et C' en C'_1, A' en B' en B'_1 en B'_2 en B. Voilà les caractéristiques de § 17, II.

3. α' en β $(aa'd_4)$ donne A'A, B'B, C'C accouplés et A' en A, B' en B'_1 en B, C' en C'_1 en C, la même caractéristique § 10, III.

§ 10. IV. 1. α' en β $(aa'b)$ donne A'A, $B'B'_3$, AC accouplés et B' en B'_1 en B'_2 en B'_3, A' en C' en C'_1 en C. Voir § 17, IV.

2. α' en β $(aa'c)$ donne A'A, AB, $C'C'_1$ accouplés et C' en C'_1, A' en B' en B'_1 en B'_2 en B'_3 en B. Voir § 17, IV.

3. α' en β $(aa'd_4)$ donne A'A, B'B, C'C accouplés et A' en A, B' en B'_1 en B'_2 en B'_3 en B, C' en C'_1 en C, la même caractéristique § 10, IV.

Remarque. Je veux annoter encore deux $\mathfrak{T}^3$, qui sont communes aux caractéristiques du § 10.

1. α' en γ $(a'^2 ac'c'_1c)$ donne T'^2: C'_1C, $C'C'_1$, CB' accouplés et B' en $B'_1 \ldots B'_i$ en B en C'. En outre A'A deviennent des points doubles. La caractéristique est celle du § 27 et on a ainsi une transition immédiate du § 10 au § 27 tandis que les $\mathfrak{T}^2$ y conduisent par deux degrés. Voir les $\mathfrak{T}$ du § 17, I.

2. α' en γ $(c'^2c'_1\, ca'a)$ donne T'^2: A'A, AB', C'_1C accouplés et B' en $B'_1 \ldots B'_i$ en B en A', C en C'_1, voir § 17.

§ 11. II, 1. α' en $\beta_1(aa'd_i)$ donne A'A, B'B, C'C accouplés et A' en A, B' en C, C' en C'_1 en B, nouvellement § 11, II.

2. α' en β $(aa'c)$ en $\begin{cases} \beta_2\,(a'c'a) \text{ en } \beta'_2\,(A'AC') \\ \gamma_1\,(a^2 ca'\, bb') \text{ en } \beta'_1\,(ABB')\ . \end{cases}$ *Caractéristique de* E': AA', BA', B'C' accouplés et A' en B', C' en C'_1 en B. Voir § 19.

3. α en β $(aa'c)$ en $\begin{cases} \gamma_2\,(a'^2 ab'c'c'_1) \text{ en } \beta'_2\,(A'B'C'_1) \\ \beta_1\,(aca') \text{ en } \beta'_1\,(AA'C) \end{cases}$ *Caractéristique de* E': AA', A'B', accouplés et B' en C, C'_1 en B en A. Voir § 19.

4. α' en β $(b'cc')$ en $\begin{cases} \gamma_2\,(c'^2 a'\, b'cc'_1) \text{ en } \beta'_2\,(C'A'C'_1) \\ \beta'_1\,(bcb') \qquad \text{en } \beta'_1\,(BCB')\ . \end{cases}$ *Caractéristique de* E': BC'_1, CC', $B'A'_1$ accouplés et C'_1 en B, C' en B', A' en A en C.

C'est la même caractéristique que § 11, II.

§ 11. III, 1. α' en β $(aa'd_i)$ donne A'A, B'B, C'C accouplés et A' en A, B' en B'_1 en C, C' en C'_1 en B, la caractéristique § 11, III elle même.

2. α' en β $(aa'c)$ donne AA', BA, B'_1C' accouplés et A' en B' en B'_1, C' en C'_1 en B, c'est § 20.

§ 11. IV. 1. α' en β $(aa'd_i)$ donne AA', BB', CC' et A' en A, B' en C, C' en C'_1 en C'_2 en B, la même caractéristique *).

2. α' en β $(b'cc')$ donne B'A', CC', BC'_1 et A' en A'_1 en C, C' en B, C'_1 en C'_2 en B, c'est § 11, V.

3. α' en β $(aa'c)$ donne AA', BA, B'C' et A' en B', C' en C'_1 en C'_2 en B, voir § 21.

§ 11. V. 1. α' en β $(b'cc')$ donne § 11. IV. et 2. α' en β $(b'cb)$ donne § 21.

§ 11. VI. 1. α' en β $(aa'd_i)$ donne la même caractéristique, tout en échangeant entre elles les deux variétés.

2. α' en β $(aa'c)$ donne AA', BA, B'C' accouplés et A' en B', C' en C'_1 en C'_2 en C'_3 en B, voir § 22.

§ 11. VII. 1. α' en β $(b'cc')$ donne § 11. VIII, savoir elle transforme la 1., 2. variété en la 2. 1. variété de § 11. VIII.

2. α' en β $(aa'd_i)$ échange les deux variétés.

3. α' en β $(aa'c)$ donne § 23.

§ 11. VIII. 1. α' en β $(b'cc')$ change la 1., 2. variété en la 2., 1. variété de VII.

§ 12. 1. α' en β $(aa'b)$ en $\begin{cases} \beta_2\,(a'b'b) & \text{en } \beta'_2\,(A'BB') \\ \gamma_1\,(a^2c'bca') & \text{en } \beta'_1\,(AC'C) \end{cases}$ A'A, BC, B'C' accouplés et A' en C', B en A, B' en C; c'est nouvellement § 12.

2. α' en γ $(b'^2a'bcc')$ en $\begin{cases} \delta_2\,(b'^2c'c^2a'ab) & \text{en } \beta'_2\,(AA'B) \\ \beta_1\,(ba'b') & \text{en } \beta'_1\,(CC'B') \end{cases}$ donne la même caractéristique.

Il n'existe de $\mathfrak{T}$, qui transformerait cette Q^2 en une autre caractéristique.

§ 13. Cette Q^2 ne se transforme d'aucune façon soit en soi-même soit en une autre transformation quadratique.

II.de Section

LES CARACTÉRISTIQUES À UNE SEULE COINCIDENCE

§ 16. — Quatre classes de transformations périodiques.

La coincidence peut se faire de deux façons, sur deux points principaux accouplés ou non accouplés **). Dans le premier cas (cc') s'obtiennent deux différentes caractéristiques, selon que a' et b, b' et a ou a' et a, b' et b sont enchaînés. Le nombre des intercalations étant variable on obtient deux *classes* de caractéristiques. Dans le second cas (ab') deux autres classes se présentent. Il convient de faire précéder la recherche de ces caractéristiques à celle des autres.

*) Les points doubles d_3, d_4 échangent leurs rôles. On en conclût de suite, que les indices en d_3, d_4 et aa' sont égaux et moyennant § 21 qu'ils sont égaux à 14.

**) Afin de désigner la coincidence de deux points principaux, je les réunirai entre deux crochets.

I. (cc'), a' en a'_1 en a'_2 en . . . $a_m = a$, b' en b'_1 en b'_2 en . . . $b'_n = b$.

Droite en

C_2	a'	b'	c'
C_3	$a'\,a'_1$	$b'\,b'_1$	c'^2
C_4	$a'\,a'_1\,a'_2$	$b'\,b'_1\,b'_2$	c'^3
. . .	. . .	. . .	. . .
C_m	$a'\,a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}$	$b'\,b'_1\,b'_2 \,.\, b'_{m-2}$	c'^{m-1}
C_{m+1}	$a'\,a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}$	$b'\,b'_1\,b'_2 \,.\, b'_{m-2}\;\; b'_{m-1}\,.$	c'^m
C_{m+2}	$a'\,a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}\,a$	$b'\,b'_1\,b'_2 \,.\, b'_{m-2}\;\; b'_{m-1}\,.$	c'^{m+1}
. . .	. . .	. . .	. . .
C_{m+2}	$a'\,a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}\,a$	$b'\,b'_1\,b'_2 \,.\, b'_{n-m-1} \,.\,.\,.\,.\, b'_{n-1}$	c'^{m+1}
C_{m+2}	$a'\,a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}\,a$	$b'\,b'_1\,b'_2 \,.\;\; b'_{n-m} \,.\, b'_{n-1}$	$b\,c'^{m+1}$
C_{m+1}	$a'_1\,a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}\,a$	$b'_1\,b'_2 \,.\, \ldots\;\; .\, b'_{n-1}$	$b\,c'^m$
C_m	$a'_2 \,.\, a'_{m-2}\,a'_{m-1}\,a$	$b'_2 \,.\, \ldots\;\; .\, b'_{n-1}$	$b\,c'^{m-1}$
. . .	. . .	. . .	. . .
C_3	$a'_{m-1}\,a$	b'_{n-1}	$b\,c'^2$
C_2	a		$b\,c'$.

Droite

La transformation peut devenir périodique à l'indice $m+n+2$.

2. *Transpositions.* α' en β $(cb'b'_1)$ donne $C'C'$, B'_2B, $A'B'$ accouplés et B'_2 en B'_3 . . . en B'_{n-1} en B; A' en A'_1 . . . en A'_m en A en B'_1 en B'.

Cette $\mathfrak{T}^2$ est toujours appliquable, car cb', cb'_1 sont certainement différentes et il résulte une T^2 de la même classe toutefois privée d'un point intercalaire. Si l'on procède en appliquant la même T^2 dans le même sens, on est conduit enfin ou à (cc') (bb'), qui est réductible à une homographie suivant le § 30 ou à (cc'), b' en b, a' en . . . en $a'_{m+n-1} = a$, qui est réductible à une homographie par T^2 $(cb'b)$.

[Je pourrais remplacer les $\mathfrak{T}^2$ successives par une seule transformation de Jonquières, qui contiendrait tous les points de la caractéristique de T^2 comme points fondamentaux et particulièrement c comme point $(n-1)$ tuple]. L'homographie, qui résulte, est réconnue périodique et ainsi en même temps *l'existence et la périodicité de* Q^2 *sont démontrées.*

Si l'on veut réciproquément déduire notre Q^2 d'une Q^1 proposée, on emploiera une $\mathfrak{T}^2$, qui a pour points principaux un point double et deux points successifs d'un groupe périodique. La distance des points principaux séparés dans la Q^2 obtenue se laisse diminuer, quand on prend les deux derniers points de cette suite et c dans le triple principal de $\mathfrak{T}^2$.

3. Quant aux propriétés de Q^2 le point c porte nécessairement une homographie

périodique d'indice $m+n+2$. Toutefois l'indice peut devenir facteur de $m+n+2$, alors sur chaque rayon de c est engendrée une homographie périodique et il y a des intercalaires qui eux aussi sont alignés par groupes avec c. Cela n'est pas contraire à ce que parmi les rayons se trouve aussi cb. Car un point de cb se transforme en un certain point infiniment voisin de a', celui-ci successivement en un point infiniment voisin de a, alors en un point de $c'b'$ et enfin en un point de $c'b$. Or rien n'empêche, que ce dernier point de cb ne coincide pas déjà après le premier tour avec le point de départ sur cb. Un tel accident dépend seulement de la relation entre $\mathfrak{C}^2$ et l'homographie donnée.

4. Les conditions pour notre Q^2 se trouvent aussi de la manière suivante. On prend les deux triples principaux cab, $c'a'b'$ et on cherche un point tel, que, pris comme a'_1, il fait coincider a'_m avec a. Pareillement on cherche les conditions, afin que b'_n coincide avec b. Cette recherche serait analogue à une autre pour un problème de la même espèce, qui concerne les homographies et qui est résolu dans K. 4 *).

5. Quelques cas admettent une recherche directe.

$m=1$, $n=1$. Deux points doubles d_2, d_3 de Q^2 sont en $(a'b, ab')$ et $(a'a, b'b)$ deux autres d_1, d_4 marqués par $a'a$ et $b'b$ sur une droite par c et $(a'b', ab)$. La transformation possède ∞^1 paires involutives sur le second rayon double.

Les coniques $a'acd_2d_4$ et $b'bcd_3d_1$ touchent respectivement bb', aa' en d_4, d_1. De là il s'ensuit: *Les cubiques par la caractéristique et* d_2, d_3 *qui ont en* d_2 *la direction vers* $(a'b', ab)$ *ont une osculation.* Elles sont toutes anallagmatiques et par suite harmoniques avec $u'-iu\equiv\gamma$. De $a'-ia\equiv-2\gamma$ se conclût $c\equiv-\gamma(1+i)+\frac{k_1-k_2}{2}$; $-\gamma(1+i)$.

Ensuite

$$a'\equiv\frac{i-2}{2}\gamma, +\frac{k_1}{2}, +\frac{k_2}{2}, +\frac{k_1+k_2}{2};\ a\equiv\frac{1-2i}{2}\gamma, +\frac{k_2}{2}, +\frac{k_1}{2}, \frac{k_1+k_2}{2}.$$

De même est $b'b$ une de ces quatre paires et la condition est

$$(i-2)\gamma+\rho-\gamma(1+i)+\rho'\equiv-3\gamma, \text{ savoir } \rho+\rho'\equiv0,$$

et parceque $\sigma'\equiv0, \frac{k_1+k_2}{2}$, il s'ensuit $\sigma\equiv0, \frac{k_1+k_2}{2}$, donc on doit prendre pour aa', bb' deux paires qui passent par le même point double sur C^h.

Les coniques $a'bcd_3\sigma$ et $ab'cd_3\sigma'$, où σ, σ' sont les points d'intersection de ab', $a'b$ avec d_1d_4, sont transformées involutivement et parceque ab', $a'b$ ne contiennent nulle autre paire involutive, on trouve: $(a'bcd_3\sigma)^2$ et $(ab'cd_3\sigma')^2$ touchent resp. ab', $a'b$ en σ, σ'.

Les C_3 du faisceau déterminé par ces coniques resp. ensemble à ab', $a'b$, sont transformées involutivement. Elles s'osculent toutes en d_3. Une courbe fixe est cd_2d_3+ $+a'ad_3+b'bd_3$, l'autre est harmonique. Elle coupe d_1d_4 en la paire, qui divise harmoniquement d_1d_4 et $\sigma\sigma'$.

Un 3ième faisceau anallagmatique est constitué par $a'a+b'b+cd_2d_3$ et cd_1d_4+ $+a'b+ab'$.

$m=1$, $n=2$. Il existe une homographie a' en a en a', a'_1 en a'_1, c en c', b en b' et

*) Une pareille recherche serait elle même l'objet d'un travail étendu.

afin que $ca'a$ ne soient pas alignés, il faut que $a'a'_1a$ le soient. Une C_3 propre anallagmatique n'existe pas.

$m=2$, $n=2$. Certainement $a'a'_1a$ et $b'b'_1b$ sont alignés. Le point d'intersection de ces droites est double. En ajoutant le point double d_4 non situé dans aa', bb' à la caractéristique, on obtient un faisceau de C_3, qui en d_4 touchent la droite cd_4. La seconde C_3 anallagmatique a un rebroussement en d_4. L'indice de F est 3.

$m=2$, $n=3$. La caractéristique détermine un faisceau F, dont le 9ième sommet est double de Q^2. L'une C_3 anallagmatique est $a'a'_1a+(cb'b'_1bd_1d_4)^2$, qui se touchent en d_4, l'autre a un rebroussement en d_3 (d_3 étant aligné avec cd_4).

II. (cc'), a' en a'_1 en . . . $a'_m=b$, b' en b'_1 en . . . $b'_m=a$.

1. Les droites cb, $c'a'$, $c'a'_1$, $c'a'_2$ . . . $c'b$ se transforment successivement entre elles, de même ca, $c'b'$, $c'b'_1$, $c'b'_2$, . . . $c'a$ et forment deux groupes d'une même homographie périodique. Le nombre des intercalaires est donc le même de part et d'autre.

2. Les transformations successives sont

Droite en				Droite				
C_2	c'	b'	a'	C_2	c'		a	b
C_3	c'^2	$b'b'_1$	$a'a'_1$	C_3	c'^2		$b'_{m-1}a$	$a'_{m-1}b$
C_4	c'^3	$b'b'_1$.	$a'a'_1$.	C_4	c'^3	b'_{m-2}	$b'_{m-1}a$	$a'_{m-2}a'_{m-1}b$
C_5	c'^4	$b'b'_1$.	$a'a'_1$.	C_5	e'^4	b'_{m-2}	$b'_{m-1}a$	$a'_{m-3}a'_{m-2}a'_{m-1}b$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
C_m	c'^{m-1}	$b'b'_1$.	$a'a'_1$.	C_m	c'^{m-1}	$b'_2b'_3$	$b'_{m-1}a$	a'_3 a'_4 . $a'_{m-1}b$
C_{m+1}	c'^m	$b'b'_1$.	$a'a'_1$. a'_{m-1}	C_{m+1}	c'^m	$b'_1b'_2b'_3$	$b'_{m-1}a$	$a'_2a'_3$ a'_4 . $a'_{m-1}b$

C_{m+2} c'^{m+1} $b'b'_1b'_2 \ldots a a'a'_1a'_2 \ldots b$.

3. *Transpositions.* 1. α' en β_2 $(ca'a'_1)$ en $\begin{cases} \gamma_2(c'^2a'_1a'_2a'b') \text{ en } \beta'_2(C'A'_2B') \\ \beta_1(c\ a\ a') \quad \text{ en } \beta'_1(C'A'A) \end{cases}$

A'_2A, $B'A'$, accouplés; A'_2 en A'_3, . . en A'_{m-1} en B en A'_1 en A'; B' en B'_1 en . . . B'_{m-1} en A.

2. α' en β (acd) donne $(C'C)$, $A'B'_{m-1}$, DB accouplés et A' en A'_1 . . . en A'_{m-1} en B; D en B'_1 . . en B'_{m-1}. Les points A et D ont échangés leur signification.

3. α' en γ $(c^2aa'a'_1b'_{m-1})$ donne $(C'C')$, $A'_2B'_{m-2}$, $B'_{m-1}A'_1$ accouplés et A'_2 en A'_3 . . . en B en A' en A'_1; B'_{m-1} en A en B' en B'_1 . . . en B'_{m-2}.

4. α' en γ $(c^2aa'd_1d_2)$ donne $(C'C')$, AA', $A'_1B'_{m-1}$ accouplés et A en B' en B'_1 . . . en B'_{m-1}; A'_1 en A'_2 . . . en A'_{m-1} en B en A'.

Toutes les $\mathcal{T}$, qui produisent une Q^2, en donnent une de l'espèce proposée.

4. Supposez, que la Q^2 existe. Les droites par c se distribuent en groupes de $m+1$, il y aura donc des points, qui se reproduisent déjà après $m+1$ transformations. Une involution se présente par suite sur chaque droite et les points doubles appartiennent à des groupes périodiques de $m+1$ points. Deux tels groupes sont les points infiniment voisins à b', b'_1 . . . a sur les droites $b'c$, . . . ac et les points infiniment voisins à a', a'_1, . . . b sur les droites $a'c$, . . . bc.

La courbe lieu des groupes à $m+1$ *points est du* $(m+2)^{\text{ième}}$ *ordre, a* (cc') *pour point* m *tuple et est tangente dans tous les autres points de la caractéristique aux droites dirigées vers* c. *La paire involutive de* Q^2 *est contenue sur la courbe ou non, selon que* $m+1$ *est pair ou impair.*

Les 2 droites fixes par c portent des homographies périodiques de l'indice $2m+2$ ou d'un indice facteur de $2m+2$, mais non de $m+1$. Leurs 4 points doubles sont sur C_{m+2} *).

5. $m=1$. Une homographie transforme c en c', a' en a en a', b' en b en b'. Donc les paires ca', ca; cb', cb forment une involution, dont un rayon double passe en $(a'a, b'b)$. *La courbe des paires involutives est une* C_h, *qui touche* ca', ca, cb', cb *en* a', a, b', b *et contient les points* $(ab, b'b)$, $(a'b, ab')$, $(a'b', ab)$. Les tangentes dans les points doubles passent par $(a'b, ab')$. Les paramètres sur C_h se trouvent par $b \equiv \gamma - a'$, $b' \equiv -3\gamma + a'$, $a \equiv 4\gamma - a'$, $a' \equiv -6\gamma + a'$, d'où $6\gamma \equiv 0$. Ensuite $c \equiv -\gamma + \rho$ et $2a' \equiv \gamma - \rho$. Donc $(a'a, b'b)$ est un point d'inflexion de C_h et le point tangentiel de c. Cela donne cette construction de la caractéristique:

Tirez d'un point d'inflexion d'une courbe harmonique une tangente et de son point de contact c *les 4 tangentes, désignez leurs points de contact par* a', a, b', b *de façon que* $a'a$, $b'b$ *passent par le point d'inflexion et vous aurez une caractéristique* (cc'), a' *en* b, b' *en* a.

Pour C_h donnée il y a 9. 3. 2. telles caractéristiques.

Les autres C_3 anallagmatiques sont harmoniques avec $u' - iu \equiv \gamma$.

$$b \equiv ia' + \gamma\,,\ b' \equiv -a' + (i-2)\gamma\,,\ a \equiv -ia' - 2i\gamma\,,\ a' \equiv a'\,.$$

Étant $c \equiv -\gamma(1+i)$ ou $-\gamma(1+i) + \frac{k_1 - k_2}{2}$, il s'ensuit $3(1-i)\gamma \equiv \frac{k_1 - k_2}{2}$ ou $3(1-i)\gamma \equiv 0$.

On doit donc prendre $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{6}$, alors le choix de a' est arbitraire. J'en tire ce théorème.

Tout quadruple du plan forme avec la caractéristique la base d'un faisceau F. *Les deux courbes fixes du faisceau sont harmoniques.*

$m=2$. Une homographie possède a'_1 en a'_2, c en c et a en a' en b en b'. Le lieu des triples périodiques est ici une courbe C_4 par c^2. Une C_3 anallagmatique est équianharmonique avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Elle passe par un point double et touche là la droite vers c. Les paramètres sur C_e donnée se calculent ainsi:

$$a'_1 \equiv -\varepsilon a' + \gamma\,,\ b \equiv \varepsilon^2 a' + (1-\varepsilon)\gamma\,,\ b' \equiv -a' + (2\varepsilon^2 - 1)\gamma\,,\ b'_1 \equiv \varepsilon a' + (\varepsilon - 1)\gamma\,,$$
$$a \equiv -\varepsilon^2 a' - 2\varepsilon^2\gamma\,,\ a' \equiv a'\,.$$

Étant $c \equiv 2\gamma\varepsilon$, il subsiste identiquement $a' + b' + c' \equiv -3\gamma$. Donc:

Sur une courbe équianharmonique C_e *on peut prendre arbitrairement* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ *et alors encore arbitrairement le point* a'. *Il y a* ∞^2 *des caractéristiques en discours pour* C_e *donnée.*

La paire involutive de Q^2 forme ensemble à la caractéristique la base d'un faisceau F. Il est important, qu'on peut reconnaître ici décidemment, *qu'un rayon double par* c *porte une homographie d'indice* 2, *l'autre une homographie d'indice* 6.

*) Cette classe de transformations paraît mériter une recherche plus approfondie. Voir aussi la IV. partie.

Les 6 points $a a'_1 b b' b'_1 a$ sont dans une conique anallagmatique, qui touche le rayon double d'indice 6 dans le point double situé à l'extérieur de C_e et $c i_1 i_2$ en un autre point double. Les C_3 par $i_1 i_2$ sont transformées à l'indice 3. Je remarque encore, que Q^2 possède une seule C_e anallagmatique.

$m=3$. Une C_3 anallagmatique d'indice 4 ou à $p=1$ et d'indice 8 n'existe pas ici. La seule cubique, qui nécessairement existe, est rationnelle et contient une homographie à l'indice 8. *Elle touche la* C_5, *lieu des quadruples en* 2 *points doubles, en ayant dans l'un d'eux un rebroussement.*

La symmétrie permet de conclure, que les 9 points de la carectéristique sont la base d'un faisceau F et qu'il y a deux C_3^3 de la dite position.

III. (ab'), a' en b, c' en c'_1 en $c'_2 \ldots$ en $c'_m = c$. Indice $m+4$.

1. Les transformations successives sont:

Droite en											
C_2	a'		b'	c'							
C_3	a'^2	b	b'	c'	c'_1						
C_4	a'^2	b^2	b'^2	c'	c'_1	c'_2					
C_4	a'^2	b^2	b'^2		c'_1	c'_2	c'_3				
C_4	a'^2	b^2	b'^2			c'_2	c'_3	c'_4			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
C_4	a'^2	b^2	b'^2				....	c'_{m-3}	c'_{m-2}	c'_{m-1}	
C_4	a'^2	b^2	b'^2						c'_{m-2}	c'_{m-1}	c
C_3	a'	b^2	b'							c'_{m-1}	c
C_4		b	b'								c
Droite											

2. *Transpositions.* 1. α' en β $(aa'b)$ donne une homographie C en B en A en C' en $C'_1 \ldots$ en $C'_m = C$.

2. α' en β (abd) donne la même Q^2 avec A'A, BA', CD accouplés et D en C' en $C'_1 \ldots$ en C.

3. $m=1$ admet α' en β $(cc'd_1)$, qui donne C'C, A'A, B'B accouplés et C' en C, A' en B.

4. $m=2$ admet α' en β $(cc'c'_1)$, qui donne C'C, A'A, accouplés et C' en C, A' en B.

3. La position des 5 points principaux est assujettie à une condition, que j'exprime ainsi. En établissant une T^2 involutive qui possède les points principaux (ab'), $a'b$ et conduit c, c' en $\bar{c}$, $\bar{c}'$, l'homographie $\bar{c}$ en b en a en a' en $\bar{c}'$ est périodique. Si l'on prend particulièrement $\bar{c}, \bar{c}'$ dans c', c on conclût:

L'homographie c' *en* b *en* a *en* a' *en* c *est périodique de l'indice* m+4. Q^2 et cette homographie subsistent en même temps *).

Si p. e. $a\,b\,c$, a' sont donnés, il faut pour construire c', résoudre le problème sui-

*) L'application successive de ces deux opérations fournit une Q^2 d'indice 5 du § 25.

vant: Un réseau d'homographies est determiné par 4 points succesifs $baa'c$, le point auquel b doit correspondre pour amener la périodicité de l'homographic, est demandé.

Ce problème peut se résoudre au moyen des méthodes appliquées dans K 4. Or il y a des moyens suffisants pour construire directement la Q^2.

4. d étant point double de Q^2, le théorème du § 9 fournit l'homographie suivante. Il y a une homographie d'indice 4, qui traduit a en b' en a' en d en b et c en c'. Si l'on transpose cette homographie elle aussi par $\mathfrak{T}^2$, on aura: *Étant* ${}_2p\ {}_1p\ p\ p_1\ p_2$ *5 points successifs d'une homographie et* d *en étant un point double, il y a une* Q^2 *d'indice* 4 *à* dd, ${}_1p\ p$, $p\ p_1$ *accouplés et possédant* ${}_2p$ *en* p_2, p_1 *en* ${}_1p$.

5. $m=1$. Les homographies c' en b en a en a' en c en c' et c' en d en c en c', b en a en a' découlent du § 9. La dernière devient périodique à l'indice 3, où d_1 est à l'extérieur de cc'. *Il s'ensuit ainsi la triple homologie de* $cc'd_1$ *et* $aa'b$ *et par là je conclus une* T^2 *à* bb', aa', $a'b$ *accouplés, qui possède* d_1 *en* d_1, c *en* c'.

Une C_3 anallagmatique, qui porterait $u-v\equiv\frac{1}{5}\gamma$ n'existe pas, parceque $b'\equiv b-2\gamma$, $a'\equiv b-3\gamma$, $b\equiv b-3\gamma$ demanderait $3\gamma\equiv 0$.

J'avais traité ce cas tout directement au moyen des coniques directives et je propose ici la construction, auquelle j'étais arrivé: Je prend un quadrilatère complet, deux sommets opposés comme cc', deux autres comme ba', je cherche sur la troisième diagonale un point k tel que $\delta\delta' ks$, où δ, δ', s désignent $(bc', a'c)$, $(bc, a'c')$, $(ba', \delta\delta')$, forment 4 points d'un groupe homographiquement périodique d'indice 5; alors k est le point (ab') et la transformation d'indice 5 est complètement établie.

$m=2$, 3 ne possèdent aucune C_3 anallagmatique.

IV. (ab'), a' en a'_1 en b, c' en c'_1 en . . . $c'_{m-2}=c$. Indice $2(m+1)$.

1. Les transformations successives sont

Droite en											
C_2	a'			b'	c'						
C_3	a'^2	a_1	.	b'	c'	c'_1					
C_5	a'^3	a'^2_1	b	b'^2	c'^2	c'_1	c'_2				
C_7	a'^4	a'^3_1	b^2	b'^3	c'^2	c'^2_1	c'_2	c'_3			
C_9	a'^5	a'^4_1	b^3	b'^4	c'^2	c'^2_1	c'^2_2	c'_3	c'_4		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.		
C_{2m-3}	a'^{m-1}	a'^{m-2}_1	b^{m-3}	b'^{m-2}	c'^2	c'^2_1	c'^2_2	c'^2_3	c'^2_4	. . .	c'_{m-3}
C_{2m-2}	a'^{m-1}	a'^{m-1}_1	b^{m-2}	b'^{m-2}	c'^2	c'^2_1	c'^2_2	c'^2_3	c'^2_4	. . .	$c'^2_{m-3}\ c$
C_{2m-1}	a'^{m-1}	a'^{m-1}_1	b^{m-1}	b'^{m-1}	c'^2	c'^2_1	c'^2_2	c'^2_3	c'^2_4	. . .	$c'^2_{m-3}\ c^2$
C_{2m-2}	a'^{m-2}	a'^{m-1}_1	b^{m-1}	b'^{m-2}	c'	c'^2_1	c'^2_2	c'^2_3	c'^2_4	. . .	$c'^2_{m-3}\ c^2$
C_{2m-3}	a'^{m-3}	a'^{m-2}_1	b^{m-1}	b'^{m-2}	c'	c'_1	c'^2_2	c'^2_3	c'^2_4	. . .	$c'^2_{m-3}\ c^2$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	. . .	.
C_7	a'^2	a'^3_1	b^4	b'^3					c'_{m-5}	c'_{m-4}	$c'^2_{m-3}\ c^2$
C_5	a'	a'^2_1	b^3	b'^2						c'_{m-4}	$c'_{m-3}\ c^2$
C_3		a'_1	b^2	b'							$c'_{m-3}\ c$
C_2			b	b'							c.
Droite											

2. *Transpositions.* 1. α' en $\beta\,(abd)$ donne $A'A'_1$, AB, DC accouplés et A' en A'_1, A' en B, D en C' en C'_1 . . . en C'_{m-2} en C. Voir § 9, I. Cette $\mathfrak{T}^2$ est toujours applicable, puisque un point double au moins existe nécessairement *).

2. α' en $\beta\,(aba')$ donne $A'A$, AB, $A'_1A'_1$ accouplés et A' en C' en C'_1 . . . en C en B. Voir § 24.

3. α' en $aa'a'_1$ donne $A'A$, BB, $C'A'$ accouplés et C' en C'_1 en ... C'_{m-3} en C en A'_1 en A, § 24.

4. $m=1$ admet de plus α' en $\beta\,(cc'd)$ qui conduit à $C'C$, $B'B$, $A'A$ accouplés et A' en A'_1 en B, C' en C, la même caractéristique que la donnée.

5. $m=2$ admet de plus α' en $\beta\,(c'c'_1c)$. Il résulte $C'C$, $B'B$, $A'A$ accouplés et A' en A'_1 en B, C' en C'_1 en C, la caractéristique donnée.

3. Q^2 possède un faisceau de coniques anallagmatiques $a'a'_1ba$. Les droites aa'_1, $a'b$ qui en constituent une, sont transformées involutivement et se coupent en un point double d_1. Les directions de celui-ci sont en involution.

Les coniques sont transformées à l'indice $m+1$. Chacune porte une involution; le lieu des points doubles**) est $C_{m+1}\,(a^{\frac{1}{2}m}\,a'^{\frac{1}{2}m}\,a'^{\frac{1}{2}m}_1\,b^{\frac{1}{2}m})$ ou $C_m\,(a^{\frac{1}{2}(m-1)}\,a'^{\frac{1}{2}(m-1)}\,a'^{\frac{1}{2}(m-1)}_1\,b^{\frac{1}{2}(m-1)})$.

[*$m=3$ Indice 8.* Bien que cette caractéristique soit simple, un grand intérêt se rattache à la figure des points principaux. Je vais donc en décrire plus amplement les propriétés.

1. D'abord je répète les transformations successives.

Droite en						
C_2	a'	b'	c'			
C_3	a'^2	b'	c'	a'_1	c	
C_4	a'^2	b'	c'^2	a'^2_1	b	c
C_5	a'^2	b^2	c'^2	a'^2_1	b^2	c^2
C_4	b'	b^2	c'	a'	a'^2_1	c^2
C_3	b^2	c'	a'_1	c	a	
C_2	a	b	c			
Droite						

Les points accouplés sont arrangés dans la même colonne.

2. Le lieu des cycles 4-ponctuels est C_3 et sa correspondance, ne pouvant pas être $u'-u\equiv\gamma$ (voir § 4. I), sera $u'-iu\equiv\gamma$. Cela fait

$$b'\equiv ib-2\gamma,\ a'\equiv -b-2\gamma(1+i),\ a'_1\equiv -ib-\gamma(2i-3),\ b\equiv b+3\gamma(1+i)$$

et $3\gamma(1+i)\equiv mk_1+nk_2$, d'où $\gamma\equiv\dfrac{(m-n)k_1+(m+n)k_2}{6}$ ou $\dfrac{(m-n)k_1+(m+n)k_2}{6}+\dfrac{k_1+k_2}{2}$

*) Si d est $(aa'_1,\ a'b)$, la Q^2 obtenue est particulière.

**) C'est ce lieu qui sert à démontrer la périodicité de la caractéristique, supposé qu'elle existe.

Mais γ ne devant pas être $\equiv \frac{C}{3}$, il faut que $m-n$, $m+n$, soient impairs et les γ admissibles sont

$$\frac{k_1+k_2}{6}, \frac{k_1+3k_2}{6}, \frac{k_1+5k_2}{6}, \frac{3k_1+k_2}{6}, \frac{3k_1+3k_2}{6}, \frac{3k_1+5k_2}{6}, \frac{5k_1+k_2}{6}, \frac{5k_1+3k_2}{6}, \frac{5k_1+5k_2}{6}.$$

Alors un point double devient $\frac{\gamma(1+i)}{2} \equiv \frac{mk_1+nk_2}{6}$, où m et n sont incongruents mod. 2. Donc *chacune des 9 correspondances a un point d'inflexion comme centre, celui-ci avec son harmoniquement conjugué comme paire involutive et les deux autres conjugués comme points doubles.*

Caractéristique. La condition $a'+b'+c' \equiv -3i\gamma$ donne $b(i-1)+\left(\frac{3i}{2}-5\right)\gamma+\rho \equiv 0$,

$$\text{ou } c' \equiv \frac{(3n-m)k_1-(3m+n)k_2}{12}+\rho, \ (ab') \equiv \frac{(6n+5m)k_1-(6m-5n)k_2}{12}+\frac{\rho i}{1-i}, \ a' \equiv$$

$$\equiv \frac{(2m-3n)k_1+(2n+3m)k_2}{12}+\frac{\rho}{i-1} \ c \equiv -\frac{(3n+m)k_1-(3m-n)k_2}{12}+\rho', \ b \equiv$$

$$\equiv \frac{(2m+3n)k_1+(2n-3m)k_2}{12}+\frac{\rho}{1-i}, \ a'_1 = 5\,\frac{mk_1+nk_2}{12}+\frac{\rho i}{i-1} \ (\S\ 4.\ \text{II.}\ \alpha).$$

Ensuite on voit, qu'il y a pour chaque correspondance 4. 2. Q^2, pour une C_h donnée y a-t-il donc 9. 4. 2 = 7 2 Q^2 *).

3. L'intérêt principal de cette Q^2 se rattache aux homographies existant entre la caractéristique. Ici j'introduirai une méthode nouvelle et féconde pour les établir. Les paramètres de ci-haut définissent la correspondance $a'-ia \equiv -2\gamma$ de façon qu'un point d'inflexion et son harmoniquement conjugué en sont les points doubles. Une telle correspondance est renfermée par une homographie périodique d'indice 4, trouvée au § 3 de la 1ère partie. Cette remarque conduit à une grande série de propriétés.

Une homographie T_1 *conduit* b *en* a *en* a' *en* α *en* b *et* i_1 *en* i_1, i_2 *en* i_2, c *en* c'. *Le point double* d_3 *à l'extérieur de* c c' *forme ensemble à un autre* d_2 *sur* c c' *une paire involutive de* T.

La droite $d_2 d_3$ *passe par* i_1 *sur* aa'_1. *Le point* α *tombe sur* (c'b, ca') *et est aussi contenu dans* C_h.

Le point d_3 *est dans la droite par* (bc', aa') *et* (ba, ca').

Le point d'intersection de a α *et* a'b, *c'est un point d'inflexion de* C_3 *est le point* i_2.

Les derniers résultats se trouvent par l'application de l'homographie en discours. J'applique celle-ci inversément après la Q^2 et j'obtiens une transformation quadratique involutive aux points principaux abc et avec i_1 en i_2, d_2 en d_3, a'_1 en α. Or de la transition α en a'_1 je conclus, que par $T'(ca, a'_1c')$ correspond à a'_1 et que ca'_1 est conduite en $c'a'_1$ et ba'_1 en ca, partant: *L'homographie conduit* c' *en* (ab, a'a'$_1$); *en* (aa', ba'$_1$) *en* c. *Les droites* c (ab, a'a'$_1$); c' (aa', ba'); (ac, c'a'$_1$) (b'c', ca'$_1$) *passent par* i_2. *Enfin* c' (ab, aa$_1$) *et* c (aa', ba'$_1$) *se coupent en* d_3 *et la droite* (ab, a'a'$_1$) (aa', ba'$_1$) *passe par* d_3.

On peut facilement au moyen de ces données construire la caractéristique, quand $ab\,a'a'_1$ et α sont donnés.

*) Ce serait un nouveau problème que de poursuivre la relation de ces 72 Q^2 avec les 72 du § 10, I.

4. J'ajoute quelques autres homographies: b en a en a' en c en c' en a'_1 et l'autre a' en a en b en c' en c en a'_1. Par application de la première et de la seconde en sens réciproque résulte *une homographie périodique* b en a' en c' en c en b, Π_4. Par là je conclus de même que aa'_1, $a'b$, cc' se coupent en un point d_1. La droite cc' est touchée en d_2 par une conique du faisceau anallagmatique.

Π_4 possède α comme double et aa'_1 comme paire involutive, d'où la conclusion que les deux homographies mentionnées sont périodiques à l'indice 6.

Enfin l'homographie b en a en a' en d en a'_1 et c en c' existe pour m quelconque.

Je me rapporte ensuite à un théorème, que je démontrerai III. partie, § 1, d'où il s'ensuit:

Il existe une homographie périodique, qui conduit b' *en* c' *en* a'$_1$ *en* c *en* b' *et* a' *en* b. *Elle a le point double* d$_1$ *et la droite double* a' b.

Ces trois homographies d'indice 4 permettent des combinaisons et permettent ainsi à trouver de nouveaux résultats. P. e. bc, $a'c'$ se coupent sur aa'_1, cette propriété transformée par la 3ième homographie apprend la construction des transformés de $a'b$. Tirez $a'a'_1$ jusqu'à l'intersection avec cc' et joignez le point de rencontre avec (ab') et en second lieu tirez ba'_1 jusqu'à l'intersection avec cc' et joignez le point de rencontre avec (ab') ces deux droites coupent $a'b$ dans les deux transformés etc.

$m=4$. *Indice 10*. Le lieu des cycles 5 ponctuels est $C_5\,(b^2a^2a'^2a'^2_1)$. Il est aisé de démontrer qu'une C_3 ($p=1$) anallagmatique n'existe pas.

Toutefois remarquons, qu'il y a une couple involutive propre, par laquelle passe au moins une C_3 anallagmatique. Celle-ci n'a pas donc $p=1$, ni $p=0$, parceque Q^2 ne possède pas ∞^1 paires involutives, elle doit se décomposer, savoir $c'c'_1c$ sont alignés. Cette droite contient deux points doubles et un d'eux est $(a'b,\ aa'_1)$, puisque autrement $c'c'_1c$ porterait une involution. Or le troisième point double d_3 détermine un faisceau F, dont les courbes s'y touchent et il y a une C_3^3, qui a un rebroussement en d_3. Ce faisceau contient aussi $c'c'_1c+(aa'a'_1bd_1)$ et six C_3^4. De là je conclus inversèment, que i_1i_2 ne détermine pas un faisceau anallagmatique. Les indices de la conique fixe, de la C_3^3 fixe et de l'homographie dans $c'c'_1c$ sont 10.

$m=5$. *Indice 12*. Envisageons de nouveau la couple involutive propre qui doit exister. Si la caractéristique est la base d'un faisceau propre l'indice de celui-ci ne sera pas 2. Le 9ième sommet de la base est donc nécessairement $(aa'_1,\ a'b)$ et la courbe, dont aa'_1 fait partie, contient aussi $a'b$. La troisième droite sera $c'c'_1c'_2c$. Le faisceau propre n'existe donc pas et aa'_1, $a'b$ se coupent en un point double sur $c'c'_1c'_2c$.

$m=6$. *Indice 14*. Une courbe C_3 anallagmatique à $p=1$ est impossible. La C_3 déterminée par la caractéristique sera donc ou une C_3^3 ou $a'_1c'_1c'_3+(a'b'c'bcc'_2)^2$ ou $c'c'_1c'_2c'_3c+C_2$ par $aa'a'_1b$. Le cas de C_3^3 sera répris au § 34, les deux autres admettent un traitement par la méthode du § 6.

§ 17.—Application des principes de l'enchaînement des points fondamentaux et des transformations successives.

La coincidence (ab') donne lieu à d'autres caractéristiques à tableaux fermés, que je vais établir.

*) Pour chacune de ces transformations particulières existe une foule d'autres propriétés, qui sont une conséquence de celles décrites dans le texte.

I. $(a\,b')$, a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c. Indice 12.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\quad b'\ c'$	$C_2\quad a'_2\ b^2\quad c$
$C_3\ a'^2\ a'_1\quad b'\ c'\ c$	$C_3\quad a'_1\ a'^2_2\ b^2\ b'\ c'\ c$
$C_4\ a'^2\ a'^2_1\ a'_2\quad b'\ c'^2\ c$	$C_4\ a'\ a'^2_1\ a'^2_2\ b^3\ b'\ c'\ c^2$
$C_6\ a'^3\ a'^2_1\ a'^2_2\ b\quad b'^2\ c'^3\ c^2$	$C_6\ a'^2\ a'^2_1.a'^3_2\ b^3\ b'^2\ c'^2\ c^3$
$C_7\ a'^3\ a'^3_1\ a'^2_2\ b^2\ b'^2\ c'^3\ c^3$	$C_7\ a'^2\ a'^3_1\ a'^3_2\ b^3\ b'^2\ c'^3\ c^3$

$C_7\ a'^2\ a'^3_1\ a'^3_2\ b^2\ b^2\ c'^3\ c^3$.

II. $(a\,b')$, a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en b, c' en c. Indice 18.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\quad b'\ c'$	$C_2\quad b\ b'\quad c$
$C_3\ a'^2\ a'_1\quad b'\ c'\ c$	$C_3\quad a'_3\ b^2\ b'\ c'\ c$
$C_4\ a'^2\ a'^2_1\ a'_2\quad b'\ c'^2\ c$	$C_4\quad a'_2\ a'^2_3\ b^2\ b'\ c'\ c^2$
$C_6\ a'^3\ a'^2_1\ a'^2_2\ a'_3\quad b'^2\ c'^3\ c^2$	$C_6\quad a'_1\ a'^2_2\ a'^2_3\ b^3\ b'^2\ c'^2\ c^3$
$C_8\ a'^4\ a'^3_1\ a'^2_2\ a'^2_3\ b\quad b'^2\ c'^4\ c^3$	$C_8\ a'\ a'^2_1\ a'^2_2\ a'^3_3\ b^4\ b'^2\ c'^3\ c^4$
$C_{10}\ a'^4\ a'^4_1\ a'^3_2\ a'^2_3\ b^2\ b'^3\ c'^5\ c^4$	$C_{10}\ a'^2\ a'^2_1\ a'^3_2\ a'^4_3\ b^4\ b'^3\ c'^4\ c^5$
$C_{11}\ a'^4\ a'^4_1\ a'^4_2\ a'^3_3\ b^2\ b'^3\ c'^5\ c^5$	$C_{11}\ a'^2\ a'^3_1\ a'^4_2\ a'^4_3\ b^4\ b'^3\ c'^5\ c^5$
$C_{12}\ a'^4\ a'^4_1\ a'^4_2\ a'^4_3\ b^3\ b'^3\ c'^6\ c^5$	$C_{12}\ a'^3\ a'^4_1\ a'^4_2\ a'^4_3\ b^4\ b'^3\ c'^5\ c^6$

$C_{13}\ a'^4\ a'^4_1\ a'^4_2\ a'^4_3\ b^4\ b'^4\ c'^6\ c^6$

III. $(a\,b')$. a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en b, c' en c. Indice 30.

Droite en	Droite
$C_2\ a'\quad b'\quad c$	$C_2\quad b\ b'\quad c$
$C_3\ a'^2\ a'_1\quad b'\ c'\ c^2$	$C_3\quad a'_4\ b^2\ b'\ c'\ c$
$C_4\ a'^2\ a'^2_1\ a'_2\quad b'\ c'^2\ c^3$	$C_4\quad a'_3\ a'^2_4\ b^3\ b'\ c'\ c^2$
$C_6\ a'^3\ a'^2_1\ a'^2_2\ a'_3\quad b'^2\ c'^3\ c^4$	$C_6\quad a'_2\ a'^2_3\ a'^3_4\ b^3\ b'\ c'^2\ c^3$
$C_8\ a'^4\ a'^3_1\ a'^2_2\ a'^2_3\ a'_4\quad b'^2\ c'^4\ c^6$	$C_8\quad a'_1\ a'^2_2\ a'^3_3\ a'^3_4\ b^4\ b'^2\ c'^3\ c^4$
$C_{11}\ a'^5\ a'^4_1\ a'^3_2\ a'^2_3\ a'^2_4\ b\ b'^3\ c'^6\ c^7$	$C_{11}\ a'\ a'^2_1\ a'^3_2\ a'^3_3\ a'^4_4\ b^5\ b'^3\ c'^4\ c^6$
$C_{14}\ a'^6\ a'^5_1\ a'^4_2\ a'^3_3\ a'^2_4\ b^2\ b'^4\ c'^7\ c^8$	$C_{14}\ a'^2\ a'^3_1\ a'^3_2\ a'^4_3\ a'^5_4\ b^6\ b'^4\ c'^6\ c^7$
$C_{16}\ a'^6\ a'^6_1\ a'^5_2\ a'^4_3\ a'^3_4\ b^2\ b'^4\ c'^8\ c^{10}$	$C_{16}\ a'^3\ a'^3_1\ a'^4_2\ a'^5_3\ a'^6_4\ b^6\ b'^4\ c'^7\ c^8$
$C_{19}\ a'^7\ a'^6_1\ a'^6_2\ a'^5_3\ a'^4_4\ b^3\ b'^5\ c'^{10}\ c^{11}$	$C_{19}\ a'^3\ a'^4_1\ a'^5_2\ a'^6_3\ a'^6_4\ b^7\ b'^5\ c'^8\ c^{10}$
$C_{22}\ a'^8\ a'^7_1\ a'^6_2\ a'^6_3\ a'^5_4\ b^4\ b'^6\ c'^{11}\ c^{12}$	$C_{22}\ a'^4\ a'^5_1\ a'^6_2\ a'^6_3\ a'^7_4\ b^8\ b'^6\ c'^{10}\ c^{11}$
$C_{24}\ a'^8\ a'^8_1\ a'^7_2\ a'^6_3\ a'^6_4\ b^5\ b'^6\ c'^{12}\ c^{13}$	$C_{24}\ a'^5\ a'^6_1\ a'^6_2\ a'^7_3\ a'^8_4\ b^8\ b'^6\ c'^{11}\ c^{12}$
$C_{26}\ a'^8\ a'^8_1\ a'^8_2\ a'^7_3\ a'^6_4\ b^6\ b'^7\ c'^{13}\ c^{13}$	$C_{26}\ a'^6\ a'^6_1\ a'^7_2\ a'^8_3\ a'^8_4\ b^8\ b'^7\ c'^{12}\ c^{13}$
$C_{27}\ a'^8\ a'^8_1\ a'^8_2\ a'^8_3\ a'^7_4\ b^6\ b'^7\ c'^{13}\ c^{14}$	$C_{27}\ a'^6\ a'^7_1\ a'^8_2\ a'^8_3\ a'^8_4\ b^8\ b'^7\ c'^{13}\ c^{13}$
$C_{28}\ a'^8\ a'^8_1\ a'^8_2\ a'^8_3\ a'^8_4\ b^7\ b'^7\ c'^{14}\ c^{14}$	$C_{28}\ a'^7\ a'^8_1\ a'^8_2\ a'^8_3\ a'^8_4\ b^8\ b'^7\ c'^{13}\ c^{13}$

$C_{29}\ a'^8\ a'^8_1\ a'^8_2\ a'^8_3\ a'^8_4\ b^8\ b'^8\ c'^{14}\ c^{14}$

IV. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en a'_5 en b, c' en c.

C_2	a'							b'	c'	
C_3	a'^2	a'_1						b'	c'	c
C_4	a'^2	a'^2_1	a'_2					b'	c'^2	c
C_6	a'^3	a'^2_1	a'^2_2	a'_3				b'^2	c'^3	c^2
C_8	a'^4	a'^3_1	a'^2_2	a'^2_3	a'_4			b'^2	c'^4	c^3
C_{11}	a'^5	a'^4_1	a'^3_2	a'^2_3	a'^2_4	a'_5		b'^3	c'^6	c^4
C_{15}	a'^7	a'^5_1	a'^4_2	a'^3_3	a'^2_4	a'^2_5	b	b'^4	c'^8	c^6
C_{19}	a'^8	a'^7_1	a'^5_2	a'^4_3	a'^3_4	a'^2_5	b^2	b'^5	c'^{10}	c^8
C_{23}	a'^9	a'^8_1	a'^7_2	a'^5_3	a'^4_4	a'^3_5	b^2	b'^6	c'^{12}	c^{10}
C_{28}	a'^{11}	a'^9_1	a'^8_2	a'^7_3	a'^5_4	a'^4_5	b^3	b'^7	c'^{15}	c^{12}
C_{43}	a'^{13}	a'^{11}_1	a'^{19}_2	a'^8_3	a'^7_4	a'^5_5	b^4	b'^9	c'^{18}	c^{15}
C_{40}	a'^{15}	a'^{13}_1	a'^{11}_2	a'^{19}_3	a'^8_4	a'^7_5	b^6	b'^{10}	c'^{21}	c^{18}
C_{47}	a'^{17}	a'^{15}_1	a'^{13}_2	a'^{11}_3	a'^9_4	a'^8_5	b^7	b'^{12}	c'^{25}	c^{21}
C_{54}	a'^{19}	a'^{17}_1	a'^{15}_2	a'^{13}_3	a'^{11}_4	a'^9_5	b^8	b'^{14}	c'^{28}	c^{25}
C_{61}	a'^{21}	a'^{19}_1	a'^{17}_2	a'^{15}_3	a'^{13}_4	a'^{11}_5	b^9	b'^{15}	c'^{32}	c^{28}
C_{70}	a'^{24}	a'^{21}_1	a'^{19}_2	a'^{17}_3	a'^{15}_4	a'^{13}_5	b^{11}	b'^{18}	c'^{37}	c^{32}
C_{79}	a'^{27}	a'^{24}_1	a'^{21}_2	a'^{19}_3	a'^{17}_4	a'^{15}_5	b^{13}	b'^{20}	c'^{41}	c^{37}

. . . . . .

Les différences des ordres successives sont les nombres

1 1 2 2 3 4 4 4 5 6 6 7 7 7 9 9 9 10 10 ...
0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 2 0 0 1 0 ...

elles obéissent à une loi singulière; si l'on dénombre la fréquence des chiffres de la série des nombres naturels, on tombe à

3 2 1 3 1 2 3 0 3 2 1 3 1 2 3 0...

V. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c. Indice 18.

| Droite en | | | | | | | | | |

VI. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c. Indice 30.

Droite en

C_2	a'						b'	c'																
C_3	a'^2	a'_1					b'	c'	c'_1															
C_5	a'^3	a'^2_1	a'_2				b'^2	c'^2	c'_1	c'_2														
C_8	a'^5	a'^3_1	a'^2_2	b			b'^3	c'^3	c'^3_1	c'_2	c													
C_{11}	a'^6	a'^5_1	a'^3_2	b^2			b'^4	c'^4	c'^4_1	c'^3_2	c													
C_{15}	a'^8	a'^6_1	a'^5_2	b^3			b'^6	c'^5	c'^5_1	c'^4_2	c^2													
C_{19}	a'^{10}	a'^8_1	a'^6_2	b^5			b'^7	c'^6	c'^6_1	c'^5_2	c^3													
C_{23}	a'^{11}	a'^{10}_1	a'^8_2	b^6			b'^9	c'^7	c'^7_1	c'^6_2	c^4													
C_{27}	a'^{13}	a'^{11}_1	a'^{10}_2	b^8			b'^{10}	c'^8	c'^8_1	c'^7_2	c^5													
C_{31}	a'^{13}	a'^{13}_1	a'^{11}_2	b^{10}			b'^{12}	c'^9	c'^9_1	c'^8_2	c^6													
C_{34}	a'^{15}	a'^{13}_1	a'^{13}_2	b^{11}			b'^{13}	c'^9	c'^9_1	c'^9_2	c^7													
C_{37}	a'^{16}	a'^{15}_1	a'^{13}_2	b^{13}			b'^{14}	c'^{10}	c'^9_1	c'^9_2	c^8													
C_{39}	a'^{16}	a'^{16}_1	a'^{15}_2	b^{13}			b'^{15}	c'^{10}	c'^{10}_1	c'^9_2	c^9													
C_{40}	a'^{16}	a'^{16}_1	a'^{16}_2	b^{15}			b'^{15}	c'^{10}	c'^{10}_1	c'^{10}_2	c^9													

C_2								b	b'															c
C_3						a'_2	b^2	b'														c'_2	c	
C_5			a'_1	a'^2_2	b^3	b'^2				c'_1	c'_2	c^2												
C_8	a'	a'^2_1	a'^3_2	b^5	b'^3	c'	c'_1	c'^2_2	c^3															
C_{11}	a'^2	a'^3_1	a'^5_2	b^6	b'^4	c'	c'^2_1	c'^3_2	c^4															
C_{15}	a'^3	a'^5_1	a'^6_2	b^8	b'^6	c'^2	c'^3_1	c'^4_2	c^5															
C_{19}	a'^5	a'^6_1	a'^8_2	b^{10}	b'^7	c'^3	c'^4_1	c'^5_2	c^6															
C_{23}	a'^6	a'^8_1	a'^{10}_2	b^{11}	b'^9	c'^4	c'^5_1	c'^6_2	c^7															
C_{27}	a'^8	a'^{10}_1	a'^{11}_2	b^{13}	b'^{10}	c'^5	c'^6_1	c'^7_2	c^8															
C_{31}	a'^{10}	a'^{11}_1	a'^{13}_2	b^{14}	b'^{12}	c'^6	c'^7_1	c'^8_2	c^9															
C_{34}	a'^{11}	a'^{13}_1	a'^{14}_2	b^{15}	b'^{13}	c'^7	c'^8_1	c'^9_2	c^9															
C_{37}	a'^{13}	a'^{14}_1	a'^{15}_2	b^{16}	b'^{14}	c'^8	c'^9_1	c'^9_2	c^{10}															
C_{39}	a'^{14}	a'^{15}_1	a'^{16}_2	b^{16}	b'^{15}	c'^9	c'^9_1	c'^{10}_2	c^{10}															
C_{40}	a'^{15}	a'^{16}_1	a'^{16}_2	b^{16}	b'^{15}	c'^9	c'^{10}_1	c'^{10}_2	c^{10}															

C_{41} a'^{16} a'^{16}_1 a'^{16}_2 b^{16} b'^{16} c'^{10} c'^{10}_1 c'^{10}_2 c^{10}.

VII. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en c.

Droite en

C_2	a'						b'	c'																
C_3	a'^2	a'_1					b'	c'	c'_1															
C_5	a'^3	a'^2_1	a'_2				b'^2	c'^2	c_1	c'_2														
C_8	a'^5	a'^3_1	a'^2_2	b			b'^3	c'^3	c'^2_1	c'_2	c'_3													
C_{12}	a'^7	a'^5_1	a'^3_2	b^2			b'^4	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	c'_3	c												
C_{17}	a'^9	a'^7_1	a'^5_2	b^3			b'^6	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	c'^2_3	c												
C_{24}	a'^{13}	a'^9_1	a'^7_2	b^5			b'^8	c'^{10}	c'^7_1	c'^5_2	c'^3_3	c^2												
C_{33}	a'^{17}	a'^{13}_1	a'^9_2	b^7			b'^{11}	c'^{14}	c'^{10}_1	c'^7_2	c'^5_3	c^3												
C_{45}	a'^{23}	a'^{17}_1	a'^{13}_2	b^9			b'^{15}	c'^{19}	c'^{14}_1	c'^{10}_2	c'^7_3	c^5												
C_{61}	a'^{31}	a'^{23}_1	a'^{17}_2	b^{13}	b'_{21}	c'^{25}	c'^{19}_1	c'^{14}_2	c'^{10}_3	c^7														
C_{81}	a'^{41}	a'^{31}_1	a'^{23}_2	b^{17}	b'^{27}	c'^{33}	c'^{25}_1	c'^{19}_2	c'^{14}_3	c^{10}														

. . . . . .

Les différences des ordres vont en croissant, savoir :

1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 20, ...

donc, etc.

VIII. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c.

Droite en										
C_2	a'					b'	c'			
C_3	a'^2	a'_1				b'	c'	c'_1		
C_5	a'^3	a'^2_1	a'_2			b'^2	c'^2	c'_1	c'_2	
C_8	a'^5	a'^3_1	a'^2_2	a'_3		b'^3	c'^3	c'^2_1	c'_2	c
C_{12}	a'^6	a'^5_1	a'^3_2	a'^2_3	b	b'^4	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	c
C_{18}	a'^{10}	a'^6_1	a'^5_2	a'^3_3	b^2	b'^7	c'^7	c'^5_1	c'^3_2	c^2
C_{25}	a'^{14}	a'^{10}_1	a'^6_2	a'^5_3	b^3	b'^9	c'^9	c'^7_1	c'^5_2	c^3
C_{35}	a'^{19}	a'^{14}_1	a'^{10}_2	a'^6_3	b^5	b'^{13}	c'^{13}	c'^9_1	c'^7_2	c^5
C_{47}	a'^{25}	a'^{19}_1	a'^{14}_2	a'^{10}_3	b^6	b'^{17}	c'^{17}	c'^{13}_1	c'^9_2	c^7
C_{64}	a'^{34}	a'^{25}_1	a'^{19}_2	a'^{14}_3	b^{10}	b'^{23}	c'^{23}	c'^{17}_1	c'^{13}_2	c^9
C_{86}	a'^{45}	a'^{34}_1	a'^{25}_2	a'^{19}_3	b^{14}	b'^{32}	c'^{31}	c'^{24}_1	c'^{17}_2	c^{13}
C_{113}	a'^{59}	a'^{45}_1	a'^{34}_2	a'^{25}_3	b^{19}	b'^{41}	c'^{40}	c'^{31}_1	c'^{24}_2	c^{17}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences des ordres successifs sont

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 7, & 10, & 12, & 17, & 22, & 27,\ldots \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

donc etc.

Les caractéristiques suivantes donnent ensuite des développements, qui se terminent. Je communiquerai les tableaux à l'occasion de la recherche des Q^2 correspondantes.

IX. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en b. Indice 9.

X. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 14.

XI. (ab'), a' en c, c' en c'_1 on c'_2 en c'_3 en b. Indice 24.

XII. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b. Indice 12.

XIII. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 20.

Je démontrerai, que d'autres transformations périodiques n'existent pas ici.

XIV. (ab'), a' en c, c' en b.

Droite en					
C_2	a'		b'	c'	
C_3	a'^2	c	b'	c'	b
C_3	a'	c^2	b'	c'	b
C_2		c		c'	b
C_2			b'	c'	b
C_2	a'		b'		b
C_2	a'	c	b'		
C_2	a'	c		c'	
C_3	a'	c	b'	c'^2	b
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Le tableau ne se termine pas. Je rappelle une caractéristique du § 3, où se présente un accident analogue.

XV. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en c'_4 en b.

Droite en

C_2	a'		b'	c'					
C_3	a'^2	c	b'	c'	c'_1				
C_4	a'^2	c^2	b'	c'^2	c'_1	c'_2			
C_5	a'^2	c^2	b'	c'^3	c'^2_1	c'_2	c'_3		
C_7	a'^3	c^2	b'^2	c'^4	c'^3_1	c'^2_2	c'_3	c'_4	
C_{10}	a'^5	c^3	b'^3	c'^5	c'^4_1	c'^3_2	c'^2_3	c'_4	b
C_{13}	a'^6	c^5	b'^4	c'^6	c'^5_1	c'^4_2	c'^3_3	c'^2_4	b
C_{16}	a'^7	c^6	b'^4	c'^8	c'^6_1	c'^5_2	c'^4_3	c'^3_4	b^2
C_{20}	a'^8	c^7	b'^6	c'^{10}	c'^8_1	c'^6_2	c'^5_3	c'^4_4	b^3
C_{24}	a'^{10}	c^8	b'^7	c'^{11}	c'^{10}_1	c'^8_2	c'^6_3	c'^5_4	b^4
C_{29}	a'^{12}	c^{10}	b'^9	c'^{13}	c'^{11}_1	c'^{10}_2	c'^8_3	c'^6_4	b^5
C_{34}	a'^{14}	c^{12}	b'^{10}	c'^{15}	c'^{13}_1	c'^{11}_2	c'^{10}_3	c'^8_4	b^6
C_{40}	a'^{16}	c^{14}	b'^{12}	c'^{18}	c'^{15}_1	c'^{13}_2	c'^{11}_3	c'^{10}_4	b^8
C_{46}	a'^{18}	c^{16}	b'^{14}	c'^{20}	c'^{18}_1	c'^{15}_2	c'^{13}_3	c'^{11}_4	b^{10}

. . . . . .

Les différences des ordres sont

1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6,...

la caractéristique ne donne point lieu à une Q^2 périodique.

XVI. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b.

Droite en

C_2	a'			b'	c'				
C_3	a'^2	a'_1		b'	c'	c'_1			
C_5	a'^3	a'^2_1	c	b'^2	c'^2	c'_1	c'_2		
C_7	a'^4	a'^3_1	c^2	b'^2	c'^3	c'^2_1	c'_2	c'_3	
C_{10}	a'^5	a'^4_1	c^3	b'^3	c'^5	c'^3_1	c'^2_2	c'_3	b
C_{13}	a'^6	a'^5_1	c^4	b'^4	c'^6	c'^5_1	c'^3_2	c'^2_3	b
C_{17}	a'^8	a'^6_1	c^5	b'^5	c'^8	c'^6_1	c'^5_2	c'^3_3	b^2
C_{22}	a'^{10}	a'^8_1	c^6	b'^7	c'^{10}	c'^8_1	c'^6_2	c'^5_3	b^3
C_{28}	a'^{13}	a'^{10}_1	c^8	b'^9	c'^{12}	c'^{10}_1	c'^8_2	c'^6_3	b^5
C_{34}	a'^{15}	a'^{13}_1	c^{10}	b'^{11}	c'^{14}	c'^{12}_1	c'^{10}_2	c'^8_3	b^6
C_{41}	a'^{18}	a'^{15}_1	c^{13}	b'^{13}	c'^{17}	c'^{14}_1	c'^{12}_2	c'^{10}_3	b^8
C_{48}	a'^{20}	a'^{18}_1	c^{15}	b'^{15}	c'^{20}	c'^{17}_1	c'^{14}_2	c'^{12}_3	b^{10}
C_{56}	a'^{23}	a'^{20}_1	c^{18}	b'^{18}	c'^{23}	c'^{20}_1	c'^{17}_2	c'^{14}_3	b^{12}
C_{64}	a'^{26}	a'^{23}_1	c^{20}	b'^{20}	c'^{26}	c'^{23}_1	c'^{20}_2	c'^{17}_3	b^{14}
C_{74}	a'^{30}	a'^{26}_1	c^{23}	b'^{24}	c'^{30}	c'^{26}_1	c'^{23}_2	c'^{20}_3	b^{17}

. . . . . .

Les différences des ordres vont toujours en croissant:

1 1 2 2 3 3 4 5 6 6 7 7 8 8 10 . .

XVII. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b.

Droite en

C_2	a'				b'	c'			
C_3	a'^2	a'_1			b'	c'	c'_1		
C_5	a'^3	a'^2_1	a'_2		b'^2	c'^2	c'_1	c'_2	
C_8	a'^5	a'^3_1	a'^2_2	c	b'^3	c'^3	c'^2_1	c'_2	b
C_{11}	a'^6	a'^5_1	a'^3_2	c^2	b'^4	c'^4	c'^3_1	c'^2_2	b
C_{15}	a'^8	a'^6_1	a'^5_2	c^3	b'^5	c'^6	c'^4_1	c'^3_2	b^2
C_{20}	a'^{10}	a'^8_1	a'^6_2	c^5	b'^7	c'^8	c'^6_1	c'^4_2	b^3
C_{25}	a'^{12}	a'^{10}_1	a'^8_2	c^6	b'^8	c'^{10}	c'^8_1	c'^6_2	b^4
C_{32}	a'^{15}	a'^{12}_1	a'^{10}_2	c^8	b'^{11}	c'^{13}	c'^{10}_1	c'^8_2	b^6
C_{39}	a'^{18}	a'^{15}_1	a'^{12}_2	c^{10}	b'^{13}	c'^{15}	c'^{13}_1	c'^{10}_2	b^8
C_{47}	a'^{21}	a'^{18}_1	a'^{15}_2	c^{12}	b'^{16}	c'^{18}	c'^{15}_1	c'^{13}_2	b^{10}
C_{56}	a'^{25}	a'^{21}_1	a'^{18}_2	c^{15}	b'^{19}	c'^{21}	c'^{18}_1	c'^{15}_2	b^{13}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences des ordres vont en croissant, savoir

1 1 2 3 3 4 5 5 7 7 8 9 9 10 11 11 13 13 . . .

la périodicité est donc impossible.

Le but des paragraphes suivants sera de construire et d'étudier de plus près les transformations, auxquelles appartiennent les caractéristiques I, II, III, V, VI, IX, X, XI, XII, XIII.

§ 18. — Les transformations périodiques isolées, douées de (ab'), c' en c'_1 en . . . en c.

I. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c. Indice 12.

1. Cette Q^2 possède nécessairement une C_3 anallagmatique à $p=1$. En effet, deux des 3 points doubles tombent sur cc'. Soit d_3 le troisiéme. La caractéristique de Q^2 détermine un réseau anallagmatique de C_3. Il y a deux faisceaux F, l'un par d_1, d_3, tandis que les courbes de l'autre se touchent en d_2. Le premier contient $cc' + (baa'a'_1a'_2)^2$, qui donc se touchent en d_2 et n'a aucune autre C_3 décomposée fixe, car cc' est l'unique droite anallagmatique, ni une C_3^3, faute de points doubles de Q^2. Donc etc.

2. Ayant égard à cc' on ne peut supposer que les 3 dernières correspondances du § 4.

Courbe harmonique. $b, (ab') \equiv ib - 2\gamma, a' \equiv -b - 2(i+1)\gamma, a'_1 \equiv -ib + (3-2i)\gamma,$ $a'_2 \equiv b + 3(1+i)\gamma, a'_3 \equiv ib + (3i-2)\gamma \equiv b.$

En exprimant b par a, on aura $a(1+i) \equiv -5\gamma i$, d'où pour a

$$-\frac{5(i+1)\gamma}{2}, -\frac{5(i+1)\gamma}{2} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2).$$

Suivant les deux valeurs la conique $a'b'b\,a'_1 a'_2$ passe par le point double $\frac{1}{2}\gamma(1+i)$ ou par l'autre. Chaque fois on peut y réunir ou la paire cc' alignée avec le même point double ou avec l'autre. À cet égard les deux valeurs de a sont coordonnées et il suffit d'en rechercher une seule.

Soit 1. $c' \equiv \gamma \frac{i-2}{2}$ $c \equiv \gamma \frac{1-2i}{2}$ ce qui donne la condition

$$-\frac{5\gamma(1+i)}{2} + \frac{\gamma(i-2)}{2} - \frac{5\gamma(i-1)}{2} - 2\gamma \equiv -3\gamma \text{ ou } -\frac{9\gamma i}{2} \equiv 0.$$

Or étant $(ab') \equiv -\frac{5\gamma(1+i)}{2}$, $a' \equiv -\frac{5\gamma i + \gamma}{2}$, $b \equiv \frac{\gamma(i-5)}{2}$ il s'ensuit

$$a + a' + b \equiv -9\gamma\frac{1+i}{2} \equiv 0.$$

La transformation qui apparaît, se distingue par une position particulière de la caractéristique et je remets sa recherche au § 32.

2. $c' \equiv \gamma\frac{i-2}{2} + \frac{1}{2}k_1$, $c \equiv \gamma\frac{1-2i}{2} + \frac{1}{2}k_2$, ce qui donne

$$-\frac{5\gamma(1+i)}{2} + \frac{\gamma(i-2)}{2} + \frac{1}{2}k_1 - \frac{5\gamma(i-1)}{2} - 2\gamma \equiv -3\gamma \text{ ou } -9\frac{i\gamma}{2} + \frac{1}{2}k_1 \equiv 0.$$

On doit prendre $\gamma \equiv \frac{(2\mu+1)k_2 + 2\nu k_1}{9}$ et obtient la caractéristique suivante:

$$(ab') \equiv -5\frac{(m+n)k_1 + (n-m)k_2}{18}$$

$$a' \equiv \frac{(m-5n)k_1 + (n+5m)k_2}{18}, a'_1 \equiv \frac{(7m+n)k_1 + (-m+7n)k_2}{18}, a'_2 \equiv \frac{(m+7n)k_1 - (7m-n)k_2}{18}$$

$$b \equiv \frac{(-5m+n)k_1 - (m+5n)k_2}{18}, c' \equiv \frac{(n-2m)k_1 - (m+2n)k_2}{18} + \frac{1}{2}k_1, c \equiv \frac{(m-2n)k_1 + (n+2m)k_2}{18} + \frac{1}{2}k_2.$$

La conique $a\,b\,a'\,a'_1\,a'_2$ passe par $\frac{(m+n)k_1 + (n-m)k_2}{18}$, la droite cc' par $\frac{(m+n)k_1 + (n-m)k_2}{18} + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$.

Pour une C_h proposée y a-t-il 72 correspondances admissibles. Quant aux paramètres de a, c, γ on a cette distribution:

$$a \equiv -5\gamma \frac{i+1}{2},\ c' \equiv \gamma \frac{i-2}{2} + \frac{1}{2} k_1, \qquad c \equiv \gamma \frac{1-2i}{2} + \frac{1}{2} k_2, \text{ et } \gamma \equiv \frac{2\mu k_1 + (2\nu+1) k_2}{9}$$

$$a \equiv -5\gamma \frac{i+1}{2},\ c' \equiv \gamma \frac{i-2}{2} + \frac{1}{2} k_2, \qquad c \equiv \gamma \frac{1-2i}{2} + \frac{1}{2} k_1, \text{ et } \gamma \equiv \frac{(2\mu+1) k_1 + 2\nu k_2}{9}$$

$$a \equiv -5\gamma \frac{i+1}{2} + \frac{1}{2}(k_1+k_2),\ c' \equiv \gamma \frac{i-2}{2},\ c \equiv \gamma \frac{1-2i}{2}, \text{ et } \gamma \equiv \frac{(2\mu+1) k_1 + (2\nu+1) k_2}{9}$$

$$a \equiv -5\gamma \frac{i+1}{2} + \frac{1}{2}(k_1+k_2),\ c' \equiv \gamma \frac{i-2}{2} + \frac{1}{2}(k_1-k_2),\ c \equiv \gamma \frac{1-2i}{2} + \frac{1}{2}(k_1-k_2), \text{ et } \gamma \equiv \frac{2\mu k_1 + 2\nu k_2}{9}.$$

Je fais remarquer: Le centre de convergence est un point d'un triple tangentiel. Son second tangentiel est d_1, le premier est le second transformé du centre.

Ses deux autres transformés sont alignés avec le centre [et appartiennent à la même (A)]. Leurs seconds tangentiels sont cc', les points harmoniquement conjugués à $cc'd_1$ sont $a'_2 a'_1 d_3$, d'où les alinéations $ca'_1 d_3$, $c'a'_2 d_3$, $d_1 a'_1 a'_2$. [Les trois autres points de (A) sont alignés, savoir ils sont les seconds tangentiels de $cc'd_1$ les conjugués à ceux-ci sont b, a', a. Les 9 points de (A) se divisent de cette façon en deux quadruples harmoniques et en d_1. Ainsi les 72 Q^2 sont fait correspondre aux 72 Q^2 de § 10. II.].

La Q^2 *construite toute à l'heure possède aussi une* C_e *anallagmatique.* Car l'autre C_3 anallagmatique du second faisceau ne sera pas harmonique, parceque le cas $2\,d_2$ vient d'être exclus sous n. 1., elle est donc équianharmonique.

La correspondance ne peut contenir autre point double que d_2, partant elle est $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$.

Courbe équianharmonique. $a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma$, $b \equiv -\varepsilon^2 a - 2\varepsilon^2\gamma$, $a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_2 \equiv -a + (2-\varepsilon^2)\gamma$, $a'_3 \equiv \varepsilon a + 2(1-\varepsilon)\gamma$, et au moyen de $a'_3 \equiv b$

$$a \equiv -4\varepsilon\gamma.$$

En prenant pour cc' l'un des trois paires de § 4, III. α, on aura

$$a - \varepsilon a - 2\gamma - \gamma + \rho \equiv -3\gamma$$

$$\rho \equiv 0 \qquad \text{demande} \qquad a \equiv 0,\ \frac{k_1-k_2}{3},\ 2\,\frac{k_1-k_2}{3}$$

$$\rho \equiv \frac{k_1-k_2}{3} \qquad a \equiv \frac{k_1}{3},\ \frac{2k_1-k_2}{3},\ \frac{k_2}{3}$$

$$\rho \equiv 2\,\frac{k_1-k_2}{3} \qquad a \equiv \frac{2k_1}{3},\ \frac{2k_2}{3},\ \frac{k_1-2k_2}{3}.$$

a étant pris comme point d'inflexion j, γ peut prendre 12 valeurs. Ces 12 correspondances ont 3 centres savoir les points de premier contact appartenant à j; les points de deuxième contact sont les points doubles de ces correspondances.

Les deux points de premier contact, qui sont alignés avec j sont $a'b$, les tangen-

tiels de a'_1, a'_2. Les points $c'ca'a'_1a'_2b$ forment un sextuple sur C_e, bc, $a'c'$ sont tangentes à C_e en c, c'. Un autre sextuple commence par le centre et contient en outre a, un point contangentiel avec a'_1 et aligné avec a'_1b, $c'c$, un second contangentiel de a'_1, le point contangentiel avec a'_2 et aligné avec a'_2a' et enfin un second point contangentiel de a'_2.

La C_e donnée admet donc 9. 12 Q^2 et chacune permute les 8 autres groupes $(u, -\frac{1}{2}u, \frac{1}{4}u)$ entre eux.

Un troisième faisceau F est enfin constitué par C_h et C_e, qui se coupent évidemment dans la couple involutive de Q^2. Les C_3 de F_1 coupent C_e en des paires corrésiduelles avec i_1i_2, c'est-à-dire alignées avec le centre, elles sont donc transformées à l'indice 3, les C_3 de F_2 coupent C_h en des paires corrésiduelles avec i_1i_2, elles sont donc transformées à l'indice 4.

Or je démontre par des considérations déjà familiarisées au lecteur, que l'indice sur la conique anallagmatique est égal à 12, de là il s'ensuit que l'indice de F_3 est 12 et que l'indice sur aa' lui aussi est 12.

Les C_3 *de* F_1 *sont toutes harmoniques, celles de* F_2 *toutes équianharmoniques.* La courbe $cc'+(aa'ba'_1a'_2)^2$ compte pour 3 C_3^4 de F_1, et l'alinéation $a'_1a'_2d_1$ qui vient de se trouver entraîne $(baa'cc'd_3)^2$. De là s'ensuivent $a'_1cd_3+(a'b'c'a'_2bd_1)^2$ et $a'_2c'd_3+a'b'c\,ba'_1d_1$. Ces trois courbes possèdent des contacts entre leurs parties *) et tiennent lieu aux 9 autres C_3^4. Elles forment un triple périodique.

Transpositions. 1. α' en β (abd_i) donne $A'A'_2$, AB, DC accouplés et A' en A'_1 en A'_2, A en B, D en C' en C. Pour $i=1$, 3 résulte § 10, II. 1., $i=2$ § 10 II. 2.

2. α' en β (aba') donne $A'A$, AB, $A'_1A'_2$ accouplés et A' en C' en C en B, A'_1 en A'_2, c'est la même caractéristique.

3. α' en β $(aa'a'_1)$ donne $A'A$, $C'A'$, A'_2B accouplés et C' en C en A'_1 en A, A'_2 en B, la caractéristique proposée. Toutefois les points aux lettres homologues ont pour la Q^2 nouvelle changé leur signification et on peut poursuivre plus près, comment les relations trouvées admettent un tel changement. *D'autre part cette* $\mathfrak{C}^2$ *pourrait servir à découvrir ces relations.*

4. α' en β $(cc'a)$ donne BC, $C'A'$, CC' et C en B, A' en A'_1 en A'_2 en C, comme 3.

5. α' en β $(cc'd_3)$ donne la même caractéristique, mais une Q^2 du § 33.

6. α' en β $(a'c'c)$ donne $C'B'$, AA'_1, CC' accouplés et A'_1 en A'_2 en B en C. § 26.

7. α' en γ $(a^2a'a'_1a'_2b)$ donne BA'_2, $A'_2A'_1$, A'_1A' accouplés et B en C' en C en A'. § 26.

II. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en b, c' en c. Indice 18.

Cette caractéristique donne origine à 2 variétés qui se réunissent à une seule du § 27, comme celles du § 10 II. se réunîrent au n. I. de ce §.

La caractéristique détermine un faisceau F, dont le 9ième sommet est double pour Q^2. *S'il est situé à l'extérieur de* cc', les C_3 passant par d_1, d_2 sur cc' sont anallagmatiques. Aucune ne se peut décomposer, car je puis écarter tous les cas imaginables : droite et conique, qui sont fixes ou involutives et trois droites qui sont fixes ou permutées entre elles. Faute de points doubles de Q^2, la C_3 invariable ne sera ni plus une C_3^3, d'où la conclusion, qu'elle est C_e.

*) La démonstration s'arrange comme l'analogue au § 10.

Supposé le 9ième sommet tombe sur cc' en d_1. Alors $cc' + (a'b'a'_1 a'_2 a'_3 b)^2$ sera une C_3 de F et deux divers cas se peuvent présenter. Ou la conique $(a'b'a'_1 a'_2 a'_3 b)^2$ se partage ou non. La division est nécessairement telle, que les deux droites $a'a'_2 b d_2 + a a'_1 a'_3 d_2$ sont involutivement transformées. La seconde C_3 anallagmatique passe par C_3 et on démontre, qu'elle n'est ni harmonique ni équianharmonique. Elle est donc une C_3^3, dont le rebroussement tombe en d_3. Car il est encore impossible, qu'elle possède un point double dans d_3, parcequ'elle contiendrait une homographie à trois points doubles ou que les droites $d_3 (aa', bb', cc')$ détermineraient une involution quadratique, ce qui demanderait l'incidence de d_3 et ab.

Si la dite conique est propre, la seconde C_3 ne pourra pas se décomposer ni pourra être rationnelle (faute de points d), elle est par suite C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Je développerai quelques autres propriétés de ces variétés.

Première variété. Elle possède une C_e invariable avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. $a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma$, $b \equiv -\varepsilon^2 a - 2\varepsilon^2 \gamma$, $a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_2 \equiv -a + (2 - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_3 \equiv \varepsilon a + 2(1 - \varepsilon)\gamma$, $a'_4 \equiv -\varepsilon^2 a + (\varepsilon^2 - 3\varepsilon)\gamma$. Étant $a'_4 \equiv b$, on a

$$3(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma \equiv 0 \quad \text{et} \quad -\varepsilon a + a - 2\gamma - \gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} \equiv -3\gamma$$

ou

$$a(1 - \varepsilon) \equiv -\sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$$

partant

$$a \equiv \sigma \frac{k_2}{3} + \frac{\mu k_1 + \nu k_2}{1 - \varepsilon}.$$

La manière, dont cette détermination séparée de γ et a a lieu, est très remarquable. D'abord je fais remarquer, que pour toute valeur $\frac{m'k_1 + n'k_2}{3}$ de a la valeur de σ est préscrite, savoir $\sigma \equiv m' + n'$. De là il s'ensuit:

La droite cc' *passe par le sommet du triangle Hessien qui est opposé au point d'inflexion* a *et par le point double* d_1.

Les six points $aa'ba'_1a'_2a'_3$ ont pour somme $3(1-\varepsilon^2)\gamma$ et sont par suite sur une conique. La caractéristique consiste en trois points d'inflexion $aa'_1a'_3$, trois points $cc'a'_2$ d'une (A) tangentielle qui appartient au triangle d'inflexion, dont $0, 3\gamma, -3\gamma$ fait partie et deux points ba' de la (A) tangentielle conjointe. $b'a'_2$ et $a'a'_2$ se coupent en un point de la seconde (A), ensuite $a'_1 b, c'a'_1, ca'_3$ se coupent sur C_e. En prenant $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3}$, il faut $m + n \equiv 0 \bmod 3$, et 18 seules valeurs de γ sont admissibles. Donc: *Les points de la caractéristique appartiennent nécessairement aux deux* (A) *tangentielles, qui correspondent au triangle Hessien.* Les valeurs de a combinées avec les γ donnent 2. 9. 9 Q^2 pour C_e donnée.

Quant au faisceau F par d_1, son indice est 9. Car $cc' + C_2$ compte pour $3C_3^4$, les 9 autres subsistent séparément et sont transformées à l'indice 3.

Seconde variété. Les courbes de ce faisceau sont trausformées à l'indice 3 et sont donc équianharmoniques. La C_3^3 fixe porte une homographie à l'indice 18, de même cc' et les droites $d_2 a'ba'_2$, $d_2 aa'_1 a'_3$ sont permutées elles aussi à l'indice 18. Les direc-

tions de d_1 sont transformées à l'indice 3, celles de d_2 à l'indice 2 et celles de d_3 à l'indice 18.

Le lieu des nonuples est une courbe C_7 $(c'^3 c^3 a'^2 a^2 b^2 a'^2_1 a'^2_2 a'^2_3)$, le lieu des sextuples une C_4 $(c^2 c'^2 a a' b a'_1 a'_2 a'_3)$. Les courbes C_4 $(c'^2 c^2 a a' b a'_1 a'_2 a'_3)$ d'un faisceau se touchent en d_3, l'indice est 9.

En terminant j'observe que *les deux triples* a'ab et cc'd_3 *ont triple homologie.*

Transpositions. La 1. et 2. variété sont transmises par

1. α' en β (abd_1) en § 9. III. 2. var. et § 9. III. 1. var.
2. α' en β (abd_2) en § 9. III. 3. var. et une du § 32,
3. α' en β (abd_3) en § 9. III. 4. var. et § 9. III. 5. var.
4. α' en β (aba') en § 9. III. 2. var. et une forme du § 32,
5. α' en β $(aa'a'_1)$ en § 9. III. 3. var. et une forme du § 32,
6. α' en β $(cc'd_3)$ en la 2. var. et la 1. var.
7. α' en β $(ce'a)$ en § 27,
8. α' en β $(a'c'c)$ en § 27.
9. α' en β $(aa'b)$ donne A'A, AB, $A'_1A'_3$ accouplés et A'_1 en A'_2 en A'_3, A' en C' en C en B; c'est la caractéristique de ci-après.

III. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c. Indice 18.

Il existe un faisceau F, le 9ième sommet soit d_1. La conique C_2 $(aa'a'_1a'_2b)$ est anallagmatique et certainement ne peut pas se décomposer, sans amener la dégéneration de Q^2 en une forme du § 33. Les points fixes de C_2 sont ou d_2d_3 ou d_1d_2. Le premier cas: Si la conique doit appartenir à une C_3 de F, il est bésoin de la droite $c'cc'_1d_1$, c'est-à-dire d'une alinéation de 4 sommets, donc etc. Si la conique n'appartient pas au faisceau, on remarque deux cubiques par d_2d_3, qui sont anallagmatiques. Par nos considérations fréquemment appliquées toutes les possibilités s'écartent sauf le cas de deux C_h. Mais $c'c'_1c$ devant entrer en un quadruple, ab, $a'b'$ devraient se couper en un point de C_h, demande absurde.

Le 2d cas: Une C_3 de F consiste en $(aa'a'_1a'_2bd_1d_2)^2 + c'c'_1c$ et parceque l'alinéation $c'c'_1cd_1$ est impossible, il faut que C_2 touche $c'c'_1cd_2d_3$ en d_2. La seconde C_3 fixe est évidemment équianharmonique et l'indice de F est 9.

Paramètres sur C_e. $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$.

$$a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma\ ,\ a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma\ ,\ a'_2 \equiv -a + (2 - \varepsilon^2)\gamma\ ,\ b \equiv \varepsilon a + 2(1-\varepsilon)\gamma\ ,$$
$$b' \equiv -\varepsilon^2 a + 4\varepsilon^2\gamma\ ,$$

d'où

$$a \equiv -4\varepsilon\gamma \quad \text{et} \quad 2a(1-\varepsilon) \equiv \gamma(\varepsilon - \varepsilon^2)$$

et

$$\gamma \equiv \frac{(m-2n)k_1 + (n-2m)k_2}{27}$$

donc $(ab') \equiv -4\varepsilon\gamma$, $a' \equiv 2(2\varepsilon^2 - 1)\gamma$, $a'_1 \equiv (2\varepsilon - 3)\gamma$, $a'_2 \equiv (2\varepsilon - 3\varepsilon^2)\gamma$, $b \equiv 2(2-\varepsilon^2)\gamma$,

$$c' \equiv \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2}\gamma + \rho\ ,\ c'_1 \equiv \frac{\varepsilon\gamma}{2} - \varepsilon\rho\ ,\ c \equiv \frac{2-\varepsilon^2}{2}\gamma + \varepsilon^2\rho\ .$$

Le résiduel de $a'b$ est le centre de convergence, (ab') son tangentiel, a', b sont

les deuxièmes tangentiels de c', c. Les points a'_1, a'_2 forment avec le point double trois points d'un groupe neutral. Afin que a'_1 ou a'_2 ne devienne un point de la couple involutive, $3(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$ ne peut pas être $\equiv \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$. Restent donc seulement 2. 9. 9 correspondances et autant de Q^2. Celles-ci transforment entre eux les 9-uples tangentiels de C_e. L'homographie sur $c'c'_1c$ a l'indice 18.

Transpositions. 1. α' en $\beta\,(abd_1)$ donne la varieté de § 9 III.

2. α' en $\beta\,(aba')$ donne II. 1. de ce §,

3. α' en $\beta\,(aa'a'_2)$ réproduit III,

4. α' en $\gamma(a^2a'a'_1a'_2b)$ donne BA'_2, $A'_2A'_1$, A'_1A' accouplés et B en C' en C'_1 en C en A', § 27.

IV. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en b, c' en c. Indice 30.

Première variété. La caractéristique est la base d'un faisceau F. Aucune cubique ne se décompose pas. Les C_3 par d_1, d_2 sur cc' sont fixes.

La considération des points d de Q^2 montre, que ces C_3 ne sont pas rationnelles ni équianharmoniques en même temps. Donc l'une est rationnelle avec rebroussement en d_1, l'autre C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. L'indice de F se trouve égal à 5, toutes les cubiques sont équianharmoniques avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ et les 5 C_3^3 forment un quintuple. L'indice de l'homographie sur cc' est donc 5. Le lieu des groupes 15 ponctuels a 3 points libres sur chaque C_3 de F.

Paramètres sur C_e. $a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma$, $a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_2 \equiv -a + (2 - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_3 \equiv \varepsilon a + 2(1 - \varepsilon)\gamma$, $a'_4 \equiv -\varepsilon^2 a + (\varepsilon^2 - 3\varepsilon)\gamma$, $b \equiv a + \varepsilon^2\gamma$. Donc $a \equiv 5\varepsilon\gamma$. On obtient séparément $a \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3}$, $\gamma \equiv \frac{m'k_1 + n'k_2}{15}$.

Le nombre des Q^2 est 9. 24. Le point a est un point d'inflexion, les autres points de la caractéristique appartiennent à des quadruples tangentiels autour du même point d'inflexion.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

Seconde variété. La caractéristique n'est pas la base d'un faisceau. La seule C_3 anallagmatique, qui existe, peut-on imaginer ou C_3^3 ou décomposée. Mais une C_3^3 conduit aussitôt à un faisceau F, comme on déduit le plus facilement par α' en $\beta\,(cc'd_3)$.

Il existe donc $(aa'a'_2a'_3a'_4b)^2$, qui touche cc' en d_2 et passe par d_3. L'indice des directions en d_2 se trouve 6, celui en d_3 et d_1 15.

Le lieu des groupes 15-ponctuels est C_{11} $(c^5c'^5a^3a'^3a'^3_1a'^3_2a'^3_3a'^3_4b^3)$ celui des groupes 10-ponctuels est C_7 $(c^3c'^3a^2a'^2a'^2_1a'^2_2a'^2_3a'^2_4b^2)$.

Transpositions. Ces deux variétés sont changées par

1. α' en $\beta\,(abd_1)$ en § 9. IV. 5. et § 9. IV. 6.
2. α' en $\beta\,(abd_2)$ en § 9. IV. 3. et § 9. IV. 4.
3. α' en $\beta\,(abd_3)$ en § 9. IV. 1. et § 9. IV. 2.
4. α' en $\beta\,(aa'a'_1)$ en IV. 2. et IV. 1. de ce §.
5. α' en $\beta\,(cc'a)$ en § 28.
6. α' en $\beta\,(cc'd_3)$ en IV. 2. et IV. 1. de ce §.
7. α' en $\beta\,(aba')$ en V. 1. et V. 2. de ce §.

V. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c. Indice 30.

Première variété. La caractéristique sert de base à un faisceau F. Les alinéations

suivantes sont impossibles à cause des ordres des transformations successives (voir § 17. VI.).

Deux points de $a'a'_1a'_2bb'$ avec un de $c'c'_1c'_2c$; trois de $a'a'_1a'_2bb'$ $[C_{41}]$, $c'c'_1a'[C_{27}]$, $c'c'_1a'_1[C_{11}]$, et les autres, en les transformant, à cause des enchaînements.

Une seule alinéation à 4 points est imaginable, savoir $c'c'_1c'_2c$. Comme je viens de le faire au n. IV., les C_3 anallagmatiques sont réconnues comme C_3^3 par $d_2\,d_3$ et C_e par d_1. L'indice de F est 5 et toutes les C_3 sont équianharmoniques.

Paramètres sur C_e. $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. Il vient $a'\equiv-\varepsilon a-2\gamma$, $a'_1\equiv\varepsilon^2a+(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma$, $a'_2\equiv-a+(2-\varepsilon^2)\gamma$, $b\equiv\varepsilon a+2(1-\varepsilon)\gamma$, $b'\equiv-\varepsilon^2a+4\varepsilon^2\gamma$, donc $a\equiv-4\varepsilon\gamma$.

Ensuite $c'\equiv2\varepsilon^2\gamma+\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$, $c'_1\equiv-\gamma-\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$, $c'_2\equiv-\varepsilon^2\gamma+\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$, $c\equiv2\gamma-\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$ d'où $a(1-\varepsilon)\equiv(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma-\sigma\frac{k_1-k_2}{3}$, et

$$a\equiv\varepsilon\gamma+\frac{\mu k_1+\nu k_2}{3},\ \gamma\equiv\frac{mk_1+nk_2}{15}$$

$a'a'$, ba et ba'_2, $a'a$ se coupent sur C_e, les points de la caractéristique sont des quadruples tangentiels, qui appartiennent au même point d'inflexion. Je déduis de la condition $5(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma\equiv-(m+n)\frac{k_1-k_2}{3}$ que $\sigma+m+n\equiv0$ mod 3. Le nombre des Q^2 pour C_e donnée est 9. 24.

Les lieux des groupes 15 et 10 ponctuels se déduisent par $\mathfrak{T}^2$ du § 28.

Seconde variété. Un faisceau F n'existant pas, la seule C_3 ne peut se supposer comme C_e, ni comme C_3^3, donc seulement $c'c'_1c'_2c+(aa'_1a'_2b)^2$, qui se touchent. Quelques propriétés découlent du théorème du § 9.

Transpositions. Je ne citerai que : 1. α' en β (aba') qui donne resp. la 2. et 1. variété de IV.

2. α' en β (abd_i), qui réduit à § 9 et change pour $i=1,2,3$ la 1ère variété en la 5., 3., 1., et la 2de variété en la 6. 4. 2. variété du § 9.

[§ 19. La transformation (ab'), b' en c, c' en c'_1 en b. Indice 9.

Droite	C_2	C_3	C_4	C_4	C_4	C_4	C_3	C_2	Droite
a	1	1	1	1	1	2	1	1	
a'	1	2	2	1	1	1	1		
c		1	2	2	1	1	1	1	
c'	1	1	2	2	2	1	1		
c'_1		1	1	2	2	2	1		
b			1	1	2	2	2	1	

1. Les trois transformations internes ont les caractéristiques :
$a'^2 b^2$, $b'a'$, $c'c'_1$, cc, $c'_1 b'$ accouplés et c' en b,
$a'^2 c$, $c'^2 a'$, $c^2 c'$, $b'b^2$, bc'^4_1, $c'_1 b'^2$ accouplés,
$c'^2 b'$, $c'^2_1 a'$, $c^2 c$, $a'b^2$, $b'c'^2_1$, bc'^2 accouplés.

2. Les homographies directives pour aa', bb', cc' fournissent:
une C_2 par $(b'c', a'c'_1)$, $(b'c'_1, a'b)$, $(b'b, a'c')$ et tangente à $b'c$, $a'c$ en b', a',
une C_2 par $(bc', b'c'_1)$, $(bc, b'a')$, $(ba', b'c)$ et tangente à bc'_1, $b'c'$ en b, b',
une C_2 par $(cc'_1, c'b)$, $(cb, c'a')$, a et tangente à ca', $c'c'_1$ en c, c'.

De là il s'ensuit :
c est aligné avec $(b'c', a'b)$, c'_1 ou $(b'c'_1 ; a'c')$, b ou $(a'c'_1, b'b)$, c',
$(bc'_1, b'c')$ avec $(bc', b'a')$, $(b'c'_1, bc)$ ou c, a' ou $(bc', b'c)$, $(b'c'_1, ba')$,
$(ca', c'c'_1)$ avec $(cc'_1, c'a')$, b ou $(cc'_1, c'b')$, $(c'b, cb')$ ou $(cb, c'b')$, $(cb', c'a')$.

Les triples a'ca *et* c'c'$_1$b *ont triple homologie, savoir*

$$\begin{matrix} a' & c & a \\ b & c'_1 & c' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a' & c & a \\ c' & b & c'_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a' & c & a \\ c'_1 & c' & b \end{matrix}.$$

et une homographie possède a'ca et bc'c'$_1$ *comme triples périodiques et traduit la convergence de* a'c, bc'$_1$, b'c' *en les convergences* ca, c'b, a'c'$_1$ *et* a'a, c'$_1$c', cb. Cela s'exprime ainsi :

Les triples a'ca *et* c'c'$_1$b *ont triple homologie de façon que les trois axes passent par trois intersections déterminées de côtés.*

Un autre aggroupement des 6 convergences conduit au théorème suivant :

Les deux triples a'b'b *et* cc'$_1$c' *ont eux aussi triple homologie et de façon que les trois axes passent par trois intersections déterminées de côtés.*

Ces dernières intersections sont les centres du théorème précédent et il s'ensuit, que les triangles des secondes axes et des premiers centres sont identiques. On remarque une seconde homographie a' en b' en b en a' et c'_1 en c' en c en c'_1.

Ces deux homographies transformant les 6 points $a'b'bc'c'_1c$ entre eux, se combinent à un groupe fini, qui contient les 3 involutions

$$\begin{array}{llll} b \text{ en } b, & c \text{ en } c, & a' \text{ en } c'_1 \text{ en } a', & b' \text{ en } c' \text{ en } b' \\ a' \text{ en } a', & c'_1 \text{ en } c'_1, & b \text{ en } c \text{ en } b, & b' \text{ en } c' \text{ en } b' \\ b' \text{ en } b', & c' \text{ en } c', & a' \text{ en } c'_1 \text{ en } a', & b \text{ en } c \text{ en } b. \end{array}$$

et les 2 *autres homographies d'indice* 3

$$\begin{array}{l} a' \text{ en } c' \text{ en } c \text{ en } a' \text{ et } a \text{ en } b \text{ en } c'_1 \text{ en } a \\ a \text{ en } c \text{ en } c'_1 \text{ en } a \text{ et } a' \text{ en } c' \text{ en } b \text{ en } a'. \end{array}$$

Outre les homologies de ci-haut j'obtiens ainsi deux autres paires de triangles à triple homologie $a'c'c$ et $bb'c'_1$; acc'_1 et $c'a'b$.

Mais tout cela n'est pas encore équivalent aux coniques directives.

On peut l'exprimer ainsi: *On prend sur trois droites trois paires harmoniques aux paires de points d'intersection avec les deux autres droites et les désigne par* $a'c'_1$, ac', bc.

Soient $(b'c, c'b) \equiv \alpha$, $(b'b, c'c) \equiv \alpha_1$, alors α, α_1 se trouvent sur la droite $a'_1 c'$. Or cette paire doit remplir de plus la condition, que $(ca', c'c'_1)$, $(cc'_1, c'a')$, b sont alignés. Quand $c'_1 a'$ décrit l'involution sur $\alpha\alpha_1$, le lieu des points $r = (ca', c'c'_1)$ est une conique par $c', c, (\alpha\alpha_1, b'c') = \beta'$, $(\alpha\alpha_1, bc) = \beta$, qui touche en $c'c$ des droites τ', τ qui se coupent en t sur $\alpha\alpha_1$, de façon que $\alpha\alpha_1'$ $(cc', bc, tc', b'c')$ est $= -1$.

Le lieu de $s = (cc'_1, c'a')$ est la même conique et r, s forment là une involution aux points doubles β, β'. Le centre de l'involution est sur cc' le point harmonique u' à $u' = (\alpha\alpha_1, c'c)$ par rapport à $c'c$. La droite $a'b$ est la position de rs qui correspond à la solution cherchée. Mais je puis démontrer, que cette droite coupe βc, $\beta c'$ en les points de rencontre avec les tangentes de c', c. Ces points sont donc la Hessienne de $\beta c'c$ et en les projetant du centre c sur $\beta\beta'$ on aura:

Les points $a'c'_1$ *sont sur la droite* $\beta\beta'$ *la Hessienne du triple* β u v, *où* $(v\beta u\beta') = -1$.

Par moyen des homographies j'en déduis:

Ces deux points forment sur chaque côté du triangle $\beta\beta'\beta''$ *des droites* $a'c'_1$, bc, $b'c'$ *la Hessienne du triple composé par un sommet de* $\beta\beta'\beta''$ *et par les deux centres d'homologie situés sur cette droite.* Cela démontre ce théorème important:

Si 6 points admettent la caractéristique de la Q^2 *en discours, ils l'admettent de 24 manières.*

Je remarque une autre homographie, qui existe en conséquence de la transformation Q^2 (Voir III. partie) c' en c'_1 en b' en a' en b et c en c.

Par suite les faisceaux $a'(b'c'cc'_1b)$ et $b(a'c'_1cb'c')$ sont homographiques et quelques alinéations existent.

3. *Transpositions.* 1. α' en β $(a'b'c)$ donne B' A', A'C', BC accouplés et B en C'_1 en C', C en B'. La Q^2 est la même que la proposée.

2. α' en β $(a'b'b)$ donne B'B, C'C'_1 accouplés et C'_1 en C' en A', C en B, c'est la même Q^2.

3. α' en β $(a'b'd)$ donne A'A, CB, C'D accouplés et D en C, B en C', A' en A, voir § 11. II.

4. α' en β $(b'bd)$ donne A'C'_1, B'B, D, C accouplés et A' en C, C'_1 en C' en D_1, B' en B.

5. α' en γ $(a'^2b'cc'c'_1)$ donne A'C'_1, CB, C'_1B' accouplés et B' en C, B en C' en A', donc la même Q^2.

4. *Recherche des* C_3 *et* F. Q^2 possède trois points doubles et aucune couple involutive propre, $b'c$ en forment une impropre, $c'c'_1b$ forment un triple périodique impropre (voir la IVième partie) et a', a donnent lieu à 2 autres: a', c, $a'b'$, et a, $b'c'_1$ $a'c'_1$, $a'b'cc'_1$. Comme une Q^2 génerale ne contient que 2 triples périodiques (Voir K. 1), notre Q^2 en contient une infinité. Celle-ci remplit une courbe, qui passant par toute la caractéristique est au moins du 3ième ordre. Le degré n'excède pas 3, attendu le degré 4 de la 3ième transformation du tableau.

Si cette cubique ne passe pas par un point d de Q^2, les cubiques $(d_2^2a'b'cbc'_1c')$ sont transformées entre elles, de sorte que certainement l'indice n'est pas 1, parcequ'autrement les directions de d seraient toutes invariables. L'indice étant donc 3, chaque C_3^4 porte une homographie d'indice 3 et les 3 intersections avec la courbe lieu des triples y seraient doubles.

Partant: *Le lieu des triples périodiques passe par les 3 points doubles et est équianharmonique avec* $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Or on peut en conclure réciproquement, que les 3 points doubles d sont toujours séparés.

Paramètres sur C_e. $a' \equiv \varepsilon a - 2\gamma$, $c \equiv \varepsilon^2 a + (1-2\varepsilon)\gamma$, $c' \equiv a + 3\varepsilon\gamma$, $c'_1 \equiv \varepsilon a + (2\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma$, $b \equiv \varepsilon^2 a + (3-\varepsilon^2)\gamma$, $b' \equiv a + 3(\varepsilon - 1)\gamma$, d'où $3(\varepsilon-1)\gamma \equiv 0$ et $a(1-\varepsilon^2) \equiv (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\gamma$.

Caractéristique: $a \equiv \frac{(2m-3n)k_1 + (3m-n)k_2}{9} + \sigma\frac{k_1-k_2}{3}$, $a' \equiv \frac{mk_1+nk_2}{9} +$

$$+ \sigma\frac{k_1-k_2}{3},\ c \equiv 2\frac{mk_1+nk_2}{9} + \sigma\frac{k_1-k_2}{3},\ c' \equiv -4\frac{mk_1+nk_2}{9} + \sigma\frac{k_1-k_2}{3},$$

$$c'_1 \equiv \frac{(4m+3n)k_1 - (3m+4n)k_2}{9} + \sigma\frac{k_1-k_2}{3},\ b \equiv -\frac{(m+3n)k_1 + (4n-3m)k_2}{9} + \sigma\frac{k_1-k_2}{3}.$$

Ensuite: Les triangles $a'cc'$, $b'c'_1b$ forment deux triples tangentiels et ont donc triple homologie.

Étant $\gamma \equiv \frac{mk_1+nk_2}{9}$, il s'ensuit $3(\varepsilon-1)\gamma \equiv (m+n)\frac{k_1-k_2}{3}$, d'où $m+n \equiv 0$ mod. 3 et $m \equiv n \equiv 0$ mod 3 sont exclus. Les (A) tangentielles qui renferment la caractéristique, appartiennent au triangle Hessien. *$a'cc'$, $b'c'_1b$ font partie d'une configuration cyclique* *). Les points d appartiennent à une autre (A), car $3d \equiv \frac{\mu k_1 - (\mu+m)k_2}{3}$ n'est $5\frac{k_1-k_2}{3}$ que si $m \equiv 0$ mod 3, cas inadmissible.

L'une des (A) *qui appartiennent au triangle Hessien renferme les triples* $a'cc'$, $b'c'_1b$ *et les points* $(a'b', bc)$, $(b'c', ba')$, $(ac, a'c'_1)$.

La Q^2 peut être déterminée de 54 manières dans 18 correspondances. Leurs points d forment 18 triples conjugués au triangle Hessien et se distribuent sur les 6 autres (A) tangentielles.

Par la combinaison de ces résultats avec ceux du n. 2. sur la caractéristique arrive-t-on à une étude de cette figure de six points, et d'un groupe de 4 courbes équianharmoniques, qui me paraît bien digne de l'attention des géomètres.

Les trois d de Q^2 donnent la somme $\frac{3\gamma}{1-\varepsilon}$, ils complètent avec la caractéristique une base d'un faisceau F. En nommant d'_1, d'_2, d'_3 les voisins de d_1, d_2, d_3 sur C_e, *trois faisceaux anallagmatiques sont déterminés par* $d_1 + d'_1 + d_2$, $d_2 + d'_2 + d_3$, $d_3 + d'_3 + d_1$.

La seconde C_3 *fixe est en tout cas une* C_3^3 *ayant son rebroussement dans le sommet respectif* d_1, d_2, d_3 *et un point simple en* d_2, d_3, d_1.

Ces C_3^3 *constituent deux à deux trois autres* F, *dont la base a 3 points infiniment voisins vers la seconde direction fixe de* d_1, d_2, d_3.

Toute C_3^3 *est touchée dans son* d_i *simple par le rebroussement d'une autre* C_3^3, *qui a* d_{i+1} *double.*

L'indice des premiers F *est 9.* Car l'indice 3 demanderait toutes les C_3 de F équianharmoniques et conduirait à des triples périodiques à l'extérieur de C_e, ce qui n'a pas lieu.

L'indice des 3 autres F est 3, parceque toute C_3 du faisceau coupe la C_e en 2

*) Cette remarque conduit à des conséquences bien intéressantes.

points libres, qui sont transformés à l'indice 3. Donc toutes les C_3 sont équianharmoniques et la courbe C_3^3 du faisceau, qui passe doublement par le sommet, compte pour 6 C_3^4 de F. Je déduis encore ce théorème:

Le réseau déterminé par les trois courbes C_3^3 ne contient que des cubiques équianharmoniques. La courbe Hessienne est une C_6 à 9 rebroussements dans $d_1\, d_2\, d_3$ et les points de la caractéristique. Elle est donc de la 3ième classe. Toutes les courbes du réseau sont C_3^3.

Les courbes Hessiennes pour les réseaux par la caractéristique et un d_i sont C_6 par $a'^2\, b'^2\, c'^2\, c'^2_1\, c^2\, b^2$, avec un rebroussement en d_i et un point simple en d_{i-1}, qui coupent C_e en un triple périodique.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34].

[§ 20. — La transformation (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b. Indice 12.

Droite	C_2	C_3	C_5	C_6	C_7	C_7	C_7	C_6	C_5	C_3	C_2	Droite
a	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	
a'	1	2	3	3	3	2	2	1	1			
a'_1		1	2	3	3	3	2	2	1	1		
c			1	2	3	3	3	2	2	1	1	
c'	1	1	2	2	3	3	3	2	1			
c'_1		1	1	2	2	3	3	3	2	1		
b			1	1	2	2	3	3	3	2	1	

La recherche intime de cette caractéristique paraît une des plus difficiles.

2. Alinéations, dérivées des coniques directives:

$(ac, a'a'_1)$ avec b $(ac'_1, a'c)$; c'_1 $(ac'_1, a'b)$; $(aa'_1, a'c')$, $(ab, a'c)$;
$(aa', a'b)$, $(ac'_1, a'c)$; $(aa'_1, a'c'_1)$, $(ac', a'c)$.

$(b'c', bc'_1)$ avec a' $(b'a'_1, bc')$; a'_1 $(b'a'_1, ba')$; $(b'c'_1, bc)$, $(b'a', bc')$;
$(b'b, ba')$, $(b'a'_1, bc')$; $(b'c'_1, ba'_1)$, $(b'c, bc')$.

$(ca'_1, c'c'_1)$ avec b $(cc'_1, c'a')$; a' $(cb, c'a'_1)$; $(ca, c'b)$, $(cc'_1, c'b')$;
$(ca, c'a')$, $(cb, c'b')$; $(ca, c'a'_1)$, $(ca', c'b')$.

3. Homographies, déduites du théorème du § 9:

b en b' en a' en c en c', a'_1 en c'_1 ; c en c' en b en b' en a', c'_1 en c'_1 ;
b en b' en a' en c'_1, c en c' en a'_1 ; b en b' en a' en b, c'_1 en a'_1, c en c' ;
b en b' en a', a'_1 en c'_1, c en c' en c ; a'_1 en b en b' en a', c'_1 en c en c' ;

du théorème sur les Q^3 (III. partie): a' en b', c' en c'_1 en a en a'_1 en c.

4. *Transpositions.* 1. α' en β (aba') donne $A'A$, AB, $A'_1C'_1$ accouplés, A' en C' en C'_1, A'_1 en C en B, la caractéristique proposée.

2. α' en β $(aa'c'_1)$ donne $A'A$, CB, $C'A'$ accouplés, C en A'_1 en A, C' en C'_1 en B, la même caractéristique.

3. α' en β $(aa'd)$ donne AA', BA'_1, DC' accouplés, A' en A en C en D, C' en C'_1 en B. § 11. III. 1. ou 2. variété, selon que $i=1$ ou 2, 3 (voir n. 5 de ce §).

5. *Recherche des* C_3 *et* F. La droite $a'_1c'_1$ est transformée involutivement en la conique $a'cc'bb'$ et forme avec cette conique une C_3 du réseau déterminé par la caractéristique.

C_2 et $a'_1c'_1$ ne se coupent pas en une couple involutive. Car il y a alors à l'extérieur de $a'_1c'_1$ et C_2 un point double de Q^2, qui avec la caractéristique forme la base d'un faisceau F, dont le 9ième sommet est double pour Q^2 et évidemment n'est pas contenu sur $a'_1c'_1$. L'indice de F est donc 2 et il serait bésoin, qu'entre les points de $a'_1c'_1+C_2$ existe une involution. La chaîne a'_1, c, $a'b'$ montre, que cela n'a pas lieu.

C_2 et $a'_1c'_1$ ne se coupent pas en deux points doubles. Car les directions de chacun d'eux seraient en involution et particulièrement les rayons vers aa', bb', cc' ce qui a seulement lieu, si $a'b$ passe par les deux points doubles, cas inadmissible.

De là je conclus: C_2 *et* $a'_1c'_1$ *se touchent en un point double* d_1 *de* Q^2 *et elles contiennent ensemble la paire involutive* i_1i_2, *soit* $a'_1c'_1$ *le point* i_1, C_2 *le point* i_2.

La caractéristique détermine avec d_1 la base d'un faisceau F, dont les C_3 se touchent le long de la seconde direction fixe de d_1. Examinons la seconde cubique invariable de ce faisceau.

I. Elle ne peut pas se décomposer, parceque la droite, qui ici ne sera pas anallagmatique, contiendrait évidemment d_1, d'où pour toutes les C_3 du faisceau résulterait un point double en d_1.

II. Elle ne peut pas être rationnelle, parceque le rebroussement (point double est à rejeter comme précédemment) est alors un point d_2 de Q^2. Afin que l'indice de F ne soit pas 1, le troisième point double doit coincider avec d_2.

Or d_2 complète avec la caractéristique la base d'un autre F, dont le 9ième sommet est nécessairement d_2. Donc toutes ses C_3 se touchent en d_2 et une C_3 invariable est la C_3^3 supposée. La seconde C_3 fixe ne peut pas se décomposer, le cas de conique et droite involutivement liées se trouvant seulement une fois, elle n'est pas rationnelle, parceque le point double serait un troisième d de Q^2. Analoguément il s'ensuit, qu'elle n'est pas harmonique avec $u'-iu\equiv\gamma$, ni équianharmonique avec $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$. Reste le cas d'une C_e avec $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. Cette courbe coupe $a'_1c'_1+C_2$ certainement dans la paire involutive. Les cubiques du premier faisceau coupent donc C_e en des paires de points alignées avec le centre de convergence et transformées donc à l'indice 3. Les C_3 du premier F devraient porter l'indice 4, seraient donc toutes harmoniques ce qui est contradictoire à l'existence de la C_2^3 supposée.

Paramètres pour $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$: $a'\equiv-\varepsilon a-2\gamma$, $a'_1\equiv\varepsilon^2 a+(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma$, $c\equiv-a+(2-\varepsilon^2)\gamma$, $c'\equiv\varepsilon a+(\varepsilon^2-\varepsilon)\gamma$, $c'_1\equiv-\varepsilon^2 a+\varepsilon^2\gamma$, $b\equiv a$. Ainsi l'impossibilité de $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ dans cette Q^2 est vérifiée.

III. La courbe discutée sub I. et II. n'est pas harmonique. Car elle devrait contenir outre d_1 un point double d_3 de Q^2. Comme d_1 et d_2 sont contangentiels sur C_h il y a un faisceau F d'un contact commun en d_2 avec C_h. La seconde cubique fixe de

ce faisceau est nécessairement C_3^3 à un rebroussement en d_2. Elle coupe $a'_1 c'_1 + C_2$ dans la couple involutive et devrait donc contenir une involution quadratique, contrairement à la Q^2.

IV. La courbe en question n'est pas équianharmonique, comme on conclût des paramètres sub II.

V. Reste donc le cas d'une C_e avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. L'existence d'une pareille courbe se conclût des trois triples $a' a'_1 c$, $c' c'_1 b$, $(a, b' c', a' c'_1, a' b' c' a'_1 b)$, qui demandent une infinité de triples periodiques et un raisonnement analogue à celui de § 19 démontre, qu'ils remplissent une C_e avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$.

Un second faisceau F est constitué par $d_2 + d_3$. La seconde C_3 invariable passe par $i_1 i_2$, est donc harmonique. Cette C_h avec $a'_1 c'_1 + C_2$ constitue un F_3.

Pour les indices de ces faisceaux se trouvent 4, 3. Les C_3 de ces faisceaux portent les indices 3, 2, 4 respectivement. Toutes les C_3 de F_1, F_2, F_3 sont donc équianharmoniques, arbitraires, harmoniques respectivement. L'indice de l'homographie sur $a' c' + C_2$ est égal à 12.

Paramètres sur C_e $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$.

$$a' \equiv \varepsilon a - 2\gamma\,,\ a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (1 - 2\varepsilon)\gamma\,,\ c \equiv a - 3\varepsilon^2\gamma\,,\ c' \equiv \varepsilon a - 5\gamma\,,\ c'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (1 - 5\varepsilon)\gamma\,,$$
$$b \equiv a - 6\varepsilon^2\gamma\,,\ b' \equiv \varepsilon a - 8\gamma\,.$$

Donc

$$a(1 - \varepsilon) \equiv -8\gamma \quad \text{et} \quad \varepsilon a - 2\gamma - \varepsilon^2 a - 5\gamma \equiv -3\gamma \quad \text{ou} \quad a(\varepsilon - \varepsilon^2) \equiv 4\gamma\,.$$

De là $4(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma \equiv 0$ et $\gamma \equiv -\dfrac{(2n - m)k_1 + (n - 2m)k_2}{12}$, $a \equiv 2\dfrac{(n - m)k_1 - mk_2}{3} + \sigma\dfrac{k_1 - k_2}{3}$.

Caractéristique: $a \equiv -\dfrac{4\gamma(\varepsilon - \varepsilon^2)}{3} + \sigma\dfrac{k_1 - k_2}{3}$, $a' \equiv -\dfrac{2\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon)}{3} + \sigma\dfrac{k_1 - k_2}{3}$,

$$a'_1 \equiv \frac{\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon)}{3} + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,,\ c \equiv \frac{\gamma(4 - \varepsilon^2)}{3} + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,,\ c' \equiv \frac{\gamma(4\varepsilon - 7)}{3} + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,,\ c'_1 \equiv \frac{\gamma(2 - 11\varepsilon)}{3} +$$
$$+ \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,,\ b \equiv \frac{\gamma(1 - 13\varepsilon^2)}{3} + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,,\ d_1 \equiv \frac{\gamma}{1 - \varepsilon} - \sigma\frac{k_1 - k_2}{3}\,.$$

La courbe C_e touche $a' b'$ en a', bc en c, $a' c'$ en c', ab eu b, $a' a'_1$ en a'_1. La droite $a' b$ passe par le tangentiel de d_1. Afin que a entre dans un triple, ac, $a' c'_1$ doivent se couper sur C_e et de même $b a'_1$, $a c'$. Le point tangentiel de c'_1 et c se trouve dans b. D'où l'arrangement suivant:

D'un point d'inflexion a *de* C_e *tirez deux tangentes, prenez les points de contact comme* a', b. *Menez de* b *deux autres tangentes, dont les points de contact sont alignés avec le troisième point de premier contact, et prenez ceux-ci comme* c c'$_1$. *Alors menez par* a' *deux tangentes, dont la corde de contact passe par le troisième point de premier contact et prenez leurs contacts comme* c' a'$_1$. *Cela fait* 9. 3. 4 Q^2 *pour* C_e *donnée.*

De là il s'ensuit, que $a' b$, $c c'_1$, $c' a'_1$ sont convergentes.

En mettant $\gamma \equiv \dfrac{m' k_1 + n' k_2}{12}$, il est nécessaire que $m' + n' \equiv 0$ mod 3 et des 12.4 restantes les combinaisons suivantes sont à détacher: 0, 0; 1, 8; 8, 4; 0, 6; 6, 0; 6, 6; 2, 4; 4, 2; 2, 10; 10, 2. Chacune des autres 3. 12 correspondances admet 3 Q^2, donc en somme 108.

Paramètres sur C_h. $a' \equiv i a - 2\gamma$, $a'_1 \equiv -a + (1 - 2i)\gamma$, $c \equiv -ia + (i + 3)\gamma$, $c' \equiv a + 3(i - 1)\gamma$, $c'_1 \equiv ia - (3i + 2)\gamma$, $b \equiv -a + 2(2 - i)\gamma$, $b' \equiv -ia + 4i\gamma$.

Partant $a(1+i) \equiv 4i\gamma$ et $a(2+i) \equiv (2-3i)\gamma$, d'où $(2-7i)\gamma = a$ et $9(1-i)\gamma \equiv 0$.

En posant $\gamma \equiv \frac{mk_1+nk_2}{18}$, il devient $9(1-i)\gamma \equiv (m+n)\frac{k_1-k_2}{2}$, donc $m+n \equiv 0$ mod 2.

Pour compléter des quadruples, C_h doit passer par $(a'c', ab)$ et $(a'b', bc)$. Les droites $a'_1c'_2$ et cc' se coupent sur C_h, ce point d'intersection est le tangentiel du point d'intersection de $a'b$ avec C_h. Les deux points appartiennent à un triple tangentiel, dont le 3 ième point est le centre de convergence].

[§ 21.— La transformation (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 14.

Droite	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	Droite
a	1	1	1	1	2	2	3	2	2	2	2	1	1	
a'	1	2	2	2	2	3	3	2	1	1	1	1		
c		1	2	2	2	2	3	3	2	1	1	1	1	
c'	1	1	2	3	3	3	3	2	2	1				
c'_1		1	1	2	3	3	3	3	2	2	1			
c'_2			1	1	2	3	3	3	3	2	2	1		
b				1	1	2	3	3	3	3	2	2	1	

La 7ième transformation écarte toute alinéation de 3 ou 4 points. La caractéristique détermine donc un réseau propre de C_3. L'existence d'un point d_1 au moins est évidente. Il détermine un faisceau F. Son indice n'est pas 1, par ce qu'une correspondance d'indice 14 et à point double n'existe pas, ni 2 ni 14.

Reste donc l'indice 7. Il y a 7 C_3^4, qui se permutent cycliquement, les 5 autres doivent s'absorber par les courbes invariables. Or la caractéristique n'admet point une droite anallagmatique ou droite et conique involutives.

La réduction nécessaire peut donc seulement se produire par un contact commun en d_1 *et les* C_3 *invariables ont l'une un point double en* d_2 *et l'autre un point double en* d_3. Toutes les deux sont C_3^3. Le même ordre d'idées conduit de d_2 à d_3 et de d_3 à d_1.

Le réseau contient donc trois C_3^3 *anallagmatiques passant doublement par* d_1, d_2, d_3 *et simplement par* d_2, d_3, d_1 *respectivement. Combinées à deux elles forment trois* F *à l'indice 7. L'indice sur les* C_3^3 *est 14.*

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

Les *transpositions* sont analogues à celles du § 20.]

[§ 22. — La transformation (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b. Indice 20.]

Droite	C_2	C_3	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{16}	C_{15}	C_{13}	C_{11}	C_9	C_7	C_5	C_3	C_2	Droite
a	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	5	5	4	4	3	3	2	1	1	
a'	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	5	4	3	2	2	1	1			
a'_1		1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	5	4	3	2	2	1	1	1	
c		—	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	5	4	3	2	2	1		
c'	1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	5	4	3	2	1				
c'_1		1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	5	4	3	2	1			
c'_2			1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	5	4	3	2	1		
b				1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	5	4	3	2	1	

Il n'y a aucune alinéation entre les 8 points, de la caractéristique. Le faisceau F ainsi déterminé a un point d de Q^2 pour 9ième sommet. L'indice de F n'est pas 1 ni 2 ni 4 ni 20, évidemment. Si l'indice était 5, toutes les cubiques seraient harmoniques. Une C_3^4 fixe est impossible, parceque il n'y a pas de point d_1 d'où aa', bb', cc' sont projétés par une involution. Une C_3^3 fixe est excluse par le caractère harmonique des C_3 et une cubique décomposée n'est pas admise par la caractéristique. Donc les 12 C_3^4 ne peuvent s'absorber d'aucune manière.

Reste l'indice 10. Il y a une chaîne de 10 C_3^4 et comme une C_3^4 fixe est excluse, une cubique invariable est C_3^3. L'autre ne pouvant pas être C_3^3 ni C_3^4 ni décomposée est C_h avec $u' - iu \equiv \gamma$ et passant par d_2.

Paramètres sur C_h. $a' \equiv ia - 2\gamma$, $a'_1 \equiv -a + (1-2i)\gamma$, $c \equiv -ia + (i+3)\gamma$,
$c' \equiv a + 3(i-1)\gamma$, $c'_1 \equiv ia - (2+3i)\gamma$, $c'_2 \equiv -a - (2i-4)\gamma$, $b \equiv -ia + (3+4i)\gamma$,
$b' \equiv a + 3(i-2)\gamma$, donc $3(i-2)\gamma \equiv 0$ et $a(i+2) \equiv 8\gamma$.

$$\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3(i-2)} \equiv -\frac{(2m+n)k_1 + (2n-m)k_2}{15}$$

$$a \equiv 8\frac{mk_1 + nk_2}{15} + \frac{C}{5},\ a' \equiv \frac{(4m-5n)k_1 + (4n+5m)k_2}{15} + i\frac{C}{5},\ a'_1 \equiv \frac{(m+n)k_1 - (m-n)k_2}{5} - \frac{C}{5}$$

$$c \equiv \frac{(2n-5m)k_1 - (2m+5n)k_2}{15} - i\frac{C}{5},\ c' \equiv \frac{(2m-3n)k_1 + (2n+3m)k^3}{15} + \frac{C}{5},$$

$$c'_1 \equiv \frac{(m+n)k_1 - (m-n)k_2}{15} + i\frac{C}{5},\ c'_2 \equiv -\frac{mk_1 + nk_2}{5} - \frac{C}{5},\ b \equiv -2\frac{(m+2n)k_1 + (n-2m)k_2}{15} - i\frac{C}{5}$$

C_h est tangente à $a'c'$, ab en c', b et passe par $(bc, a'b')$. Sur C_h se coupent $c'c'_2$, c'_1b, $a'c$.

Le lieu des groupes périodiques à 10 points est C_6 qui passe deux fois par la caractéristique. Elle admet deux point fixes, mais ni quintuple ni paire involutive. Elle touche la C_h en d_2 et passe en d_3 suivant la seconde direction fixe.

Transpositions. 1. α' en β (bac'_2) donne $B'B$, $A'C'_1$, BC accouplés et B' en C'_2 en C' en C'_1, A' en A'_1 en C', la Q^2 proposée.

2. α' en β (aba') donne $B'B$, $A'A$, $A'_1C'_2$ accouplés et A' en C' en C'_1 en C'_2, A'_1 en C' en B, la même Q^2.

3. α' en β (abd_i) donne $B'B$, $A'C'_2$, DC accouplés et B' en B, A' en A'_1 en C, D en C' en C'_1 en C'_2, voir § 11. VI. 1. ou 2. var. selon que $i=1$ ou 2, 3.]

[§ 23.—La transformation (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b. Indice 24.

Droite	C_2	C_3	C_4	C_5	C_7	C_9	C_{11}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{16}	C_{15}	C_{14}	C_{13}	C_{11}	C_9	C_7	C_5	C_4	C_3	C_2	Droite
a	1	1	1	1	2	3	3	4	4	5	5	6	5	5	5	5	4	3	3	2	2	1	1	
a'	1	2	2	2	3	4	5	5	5	5	6	6	5	4	4	4	3	2	1	1	1	1		
c		1	2	2	2	3	4	5	5	5	5	6	6	5	4	4	4	3	2	1	1	1	1	
c'	1	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1					
c'_1		1	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1				
c'_2			1	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1			
c'_3				1	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1		
b					1	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	5	4	3	2	2	1	

Les 8 points n'admettent aucune alinéation. Ils déterminent un faisceau F anallagmatique et le 9ième sommet est un point double d_3 de Q^2. L'indice de F n'est pas 1 ni 2 ni 3, comme on voit par la correspondance dans C_3, ni 24 à raison du nombre des C_3^4, ni 12, nulle C_3^4 pouvant alors rester invariable. Dans ce dernier cas la courbe fixe ne peut pas devenir harmonique, ni équianharmonique avec $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$, il serait bésoin d'une C_e au moins avec $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$.

Les paramètres en démontrent l'impossibilité: $a'\equiv-\varepsilon a-2\gamma$, $c\equiv\varepsilon^2 a+(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma$, $c'\equiv-a+\varepsilon\gamma$, $c'_1\equiv\varepsilon a+(1-\varepsilon^2)\gamma$, $c'_2\equiv-\varepsilon^2 a+(2-\varepsilon)\gamma$, $c'_3\equiv a-3\varepsilon\gamma$, $b\equiv-\varepsilon a+(2\varepsilon^2-\varepsilon)\gamma$, $b'\equiv\varepsilon^2 a+(\varepsilon^2-4)\gamma$, ce qui donne $a\equiv-\varepsilon\gamma$, et ensuite $c\equiv c'$, contrairement à la caractéristique.

L'indice 6 de F fournirait l'indice 4 sur toutes les C_3, qui deviendraient harmoniques. Les deux C_3 fixes n'étant point harmoniques (à raison de $c'c'_1c'_2c'_3b$) seraient C_3^3 et équivalentes à 4 C_3^4, les 8 autres ne s'absorberaient pas par l'indice 6.

Reste donc l'indice 4. Alors toutes les C_3 *sont équianharmoniques avec* $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ *les deux* C_3 *fixes ont leurs rebroussements en* d_2, d_3 *et portent des homographies d'indice 24.*

Le lieu des groupes à 12 points est une C_9 qui passe trois fois par tous les points

de la caractéristique. Elle porte une correspondance de l'indice 12 à deux points invariables, un quadruple (celui des 4 rebroussements du faisceau) et un triple périodique.

Le lieu des octuples est une C_6 qui passe deux fois par tous les points de la caractéristique. Cette C_6 passe par d_2, d_3 et par le quadruple périodique.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

Transpositions. 1. α' en β $(a'ca)$ donne $A'A$, CB, $C'A'$ accouplés et C en A, C' en C'_1 en C'_2 en C'_3 en B, la caractéristique proposée.

2. α' en β (ac'_3b) donne BC, $B'B$, $A'C'_2$, accouplés et B' en C'_3 en C' en C'_1 en C'_2, C en A', la caractéristique proposée.

3. α' en β (abd_i) donne $A'C'_3$, $B'B$, D_iC accouplés et B en C' en C'_1 en C'_2 en C'_3, B en B, A' en C, § 11. VIII. 1. ou 2. variété, selon que $i=1$ ou $2, 3$.]

III. Section.

LES CARACTÉRISTIQUES DOUÉES DE DEUX OU TROIS COINCIDENCES.

§ 24. — Les transformations (cc'), (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en . . . en $a'_m = b$.

Droite en

$C_2 \quad c'\ b'\ a'$

$C_2 \quad c'\ a'\ a'_1$

$C_3 \quad c'^2\ b'\ a'\ a'_1\ a'_2$

$C_3 \quad c'^2\ a'\ a'_1\ a'_2\ a'_3$

$C_4 \quad c'^3\ b'\ a'\ a'_1\ a'_2\ a'_3\ a'_4$

. . . . . .

m impair		m pair	
$C_{\frac{m+1}{2}}$	$c'^{\frac{m-1}{2}}\ a'\ a'_1 \ldots a'_{m-2}$	$C_{\frac{m+2}{2}}$	$c'^{\frac{m}{2}}\ b'\ a'\ a'_1 \ldots a'_{m-2}$
$C_{\frac{m+3}{2}}$	$c'^{\frac{m+1}{2}}\ b'\ a'\ a'_1 \ldots a'_{m-1}$	$C_{\frac{m+2}{2}}$	$c'^{\frac{m}{2}}\ a'\ a'_1 \ldots a'_{m-1}$
$C_{\frac{m+3}{2}}$	$c'^{\frac{m+1}{2}}\ a'\ a'_1\ a'_2 \ldots a'_{m-1}\ b$	$C_{\frac{m+4}{2}}$	$c'^{\frac{m+2}{2}}\ b'\ a'\ a'_1 \ldots a'_{m-1}\ b$
$C_{\frac{m+3}{2}}$	$c'^{\frac{m+1}{2}}\ b'\ a'_1 \ldots a'_{m-1}\ b$	$C_{\frac{m+2}{2}}$	$c'^{\frac{m}{2}}\ a'_1\ a'_2 \ldots a'_{m-1}\ b$
$C_{\frac{m+1}{2}}$	$c'^{\frac{m-1}{2}}\ a'_2\ a'_3 \ldots a'_{m-1}\ b$	$C_{\frac{m+2}{2}}$	$c'^{\frac{m}{2}}\ b'\ a'_2 \ldots a'_{m-1}\ b$
$C_{\frac{m+1}{2}}$	$c'^{\frac{m-1}{2}}\ b'\ a'_3 \ldots a'_{m-1}\ b$	$C_{\frac{m}{2}}$	$c'^{\frac{m-2}{2}}\ a'_3 \ldots a'_{m-1}\ b$
$C_{\frac{m+1}{2}}$	$c'^{\frac{m-1}{2}}\ a'_4 \ldots a'_{m-1}\ b$	$C_{\frac{m}{2}}$	$c'^{\frac{m-2}{2}}\ b'\ a'_1 \ldots a'_{m-1}\ b$

. . . . . .

$C_3 \quad c'^2\ a'_{m-3}\ a'_{m-2}\ a'_{m-1}\ b$

$C_3 \quad c'^2\ b'\ a'_{m-2}\ a'_{m-1}\ b$

$C_2 \quad c'\ b\ a'_{m-1}$

$C_2 \quad c'\ b\ a$

Droite

La périodicité de la caractéristique ne peut entrer qu'après $2m+2$ applications et l'existence d'une certaine courbe anallagmatique, que je vais démontrer, la vérifie complètement. Les droites $c(a' \ldots b)$ forment un cycle d'une homographie, où ca est droite double. Tous les rayons par c portent des involutions entre leurs points et les $(m+1)$ transformés, dont les points doubles donnent lieu à des groupes périodiques de $(m+1)$ points.

Pour m *impair* *) *le lieu des groupes* $(m+1)$ *ponctuels est une courbe de l'ordre* $\frac{m+3}{2}$, *qui touche en* a' . . . b *les droites* c'(a' . . . b) *et passe* $\frac{m-1}{2}$ *fois par* c. *Elle passe simplement par* (a b').

Pour m *pair ce lieu est de l'ordre* $\frac{m+4}{2}$ *à point* $\frac{m}{2}$ *tuple en* c. *La courbe touche les droites* c(b . . . a') *en* b, . . . a' *et de même* ca *en* a **).

2. Les cas spéciaux $m=2$, $m=3$ méritent une considération particulière.

$m=2$. La courbe-lieu est de l'ordre 3 et parceque à côté de ca trois autres tangentes passent de c à C_3, qui forment un triple cyclique, dont le covariant hessien contient ca, la courbe est équianharmonique avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$. Du reste cette transformation est équivalente à celle du § 2, dont elle offre la forme la plus simple.

La caractéristique est déterminée par les paramètres $a' \equiv \frac{\varepsilon^2-4\varepsilon}{3}\gamma$, $a'_1 \equiv \frac{4(1-\varepsilon^2)}{3}\gamma$ $b \equiv \frac{4\varepsilon^2-5}{3}\gamma$, $a \equiv \frac{5(1-\varepsilon^2)}{3}\gamma$, où $6\gamma \equiv 0$.

$m=3$. La courbe-lieu est de l'ordre 3 et les 4 tangentes de c formant un quadruple périodique, la C_3 est harmonique. Elle doit contenir une correspondance à deux points doubles alignés avec c.

En effet, $u' - iu \equiv \gamma$ étant la correspondance, $\frac{\gamma(i+1)}{2}$, $\frac{\gamma(i+1)}{2} + \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ sont les deux points doubles. Ils sont alignés avec $-\gamma(1+i) + \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ et les 4 tangentes sortant de celui-ci touchent en

$$\frac{\gamma}{2}(i+1) + \frac{1}{4}(k_1+k_2),\ \frac{\gamma}{2}(i+1) + \frac{1}{4}(k_1-k_2),\ \frac{\gamma}{2}(i+1) - \frac{1}{4}(k_1+k_2),\ \frac{\gamma}{2}(i+1) - \frac{1}{4}(k_1-k_2)$$

qui forment en effet dans cet ordre un groupe périodique de la correspondance.

La caractéristique est déterminée par les paramètres $a \equiv -\frac{5(1+i)}{2}\gamma$, $a' \equiv -\frac{5i+1}{2}\gamma$ $a'_1 \equiv \frac{7+i}{2}\gamma$, $a'_2 \equiv \frac{7i+1}{2}\gamma$, $b \equiv \frac{i-5}{2}\gamma$, où $3(i+1)\gamma \equiv 0$.

3. La caractéristique en discours est une de celles, où on peut récourir directe-

*) Dans la 4ième partie la vraie nature de cette distinction entre m pair et impair sera mise en jour.

**) Relativement aux transformations du tableau j'ai ordonné les lettres de manière, que deux caractéristiques symétriques à la caractéristique de milieu possèdent un ordre des lettres, qui correspond à la conjonction des points fondamentaux dans la transformation respective.

Toutes les transformations sont de Jonquières et je considère deux points fondamentaux comme accouplés, si l'un est incident avec la droite fondamentale appartenant à l'autre. Seulement dans la transformation quadratique un point fondamental est accouplé avec celui, par lequel sa droite fondamentale ne passe pas.

ment à la théorie des réseaux de transformations quadratiques. Car ici la variabilité d'un seul point, déterminant la figure de la caractéristique, suffit pour amener la périodicité de Q^2. Je me pose donc le problème suivant:

Problème: Soient les 4 points (cc'), (ab'), a', b. *On considère* abc, a'b'c' *comme triangles principaux d'une* Q^2, *à la détermination de laquelle il faut et il suffit encore de connaître le point* a'_1. *En mouvant* a'_1 *sur le plan, on obtient un réseau de* Q^2 *et dans chacune possède* a' *un certain* $m^{\text{ième}}$ *transformé* a'_m. *Il est demandé de rechercher l'affinité entre* a'_1 *et* a'_m *et de construire les points* a'_1, *qui jettent* a'_m *sur* b.

a) $a'_1 - a'_2$. Les deux faisceaux directifs b, b' engendrent dans chaque transformation du réseau une conique Δ_b, qui contient b, b', le point d'intersection $(bc, b'a')$ et touche en b' la droite $b'c'$. Car les rayons $b(c, a, a)$ correspondent aux rayons $b'(a', c', a'_1)$. Toutes ces Δ_b forment un faisceau. Les deux paires de droites ba, $b'a'$ et bc, $b'c'$ que je désignerai par Δ'_b, Δ''_b apparaissent, si $a'b$ correspond à $a'b'$ ou $c'b'$ respectivement.

Si a'_1 varie sur une droite par b', Δ_b reste constante. Réciproquement si sortant des a'_2 on fait l'intersection de Δ_b avec $a'_2 b'$ en h_2, la droite bh_2 contiendra nécessairement un point a'_1, dont le transformé a'_2 est situé dans la droite $R = a'_2 b$. Ce point décrit, pendant que Δ_b varie, le produit des deux faisceaux homographiques $h_1 b'$ et $h_2 b$, une conique B, en nommant h_1 le point de rencontre de $a'b$ et Δ_b. Pour Δ'_b le point h_2 tombe en b et $h_2 b$ sur ba, h_1 sur a', donc ba et $b'a'$ se correspondent. Pour Δ''_b tombe h_2 sur bc et $h_2 b$ coincide avec bc, h_1 avec $(ac, a'b)$ et $h_1 b'$ avec ac, donc bc et $b'c$ se correspondent. La conique B touche $b'a'$ en b' et contient c.

Les points h_1 h_2 se réunissent en $(a'b, R)$ et B passe donc par ce point. Quand R coincide avec $b'b$, Δ_b est la conique, qui touche $a'b$ en b.

Si ensuite $c'a'$ après deux transformations doit venir en $c'b$, on peut disposer de deux rayons par c', dont chacun forme avec $c'a'$, $c'b$ un triple, pour qui $c'b'$ entre dans le Hessien. Donc les deux droites cherchées constituent le covariant Hessien du triple $c'(a'ab)$. On trouve par l'intersection de ces droites avec une des coniques qui touchent en deux des points a $a'b$ les côtés adjacents et passent par c', les deux points, qui complètent avec c' un triple conjugué par rapport à $aa'b$. Partant:

Les points a'_1, *qui font coincider* a'_2 *avec* b, *sont les deux points qui rapprochés avec* c' *forment un triple conjugué par rapport à* a a' b.

Une homographie existe, qui possède a', c comme doubles et baa' comme triple périodique *).

Enfin le réseau des courbes reste à définir, qui dans l'affinité $a'_1 - a'_2$ correspondent aux droites de a'_2. *Ce réseau peut être constitué au moyen des cubiques* b'c'+ab+ca; c'a'+ab+bc; a'b'+bc+ca. *Il contient donc les cubiques* Ψ_3 par c^2ba *et avec un contact en* a *avec* ab. *L'affinité* $a'_1 - a'_2$ *est* 2, 1.

b) $a'_1 - a'_3$. Je fais varier a'_3 sur une droite R par b'. Si Δ_b coupe R en h_3, alors bh_3 contiendra nécessairement des points a'_2, pour lesquels les a'_3 sont contenus dans R. La C_3 qui correspond à bh_3 selon l'affinité *a)* contient les a'_1 respectifs, qui toutefois se trouvent aussi sur $h_1 b'$, où h_1 est $(a'b, \Delta_b)$. La variation de Δ_b produit ainsi deux faisceaux homographiques $h_1 b'$ et C_3, qui engendrent une courbe du $4^{\text{ième}}$ degré B_4. Pour Δ_b devient $h_3 b = ba$, auquel correspond une cubique $B_2 + ac$; en même temps devient

*) Par comparaison avec n. 2 on en conclût un théorème sur les cubiques équianharmoniques.

$h_1 b' = b' a'$. Pour Δ''_b devient $h_2 b = bc$ et la Ψ_3 est bc plus deux rayons par c, en même temps devient $h_1 b' = ac$.

La B_4, correspondant à R, a donc un point double et deux tangentes fixes en c, un point simple en b et en le transformé de b suivant $[a'_1 - a'_2]$ et un point double en a, dont ab est une tangente simple, aa' une tangente d'inflexion. La courbe A, correspondant à une droite R par a' fait partie d'un faisceau, constitué par $a'c' + ac + B_2$ et $a'b' + 2ac + ab$, en désignant par B_2 la courbe correspondante de ab suivant $[a'_1 - a'_2]$. Ce faisceau se décompose en ac et un faisceau de cubiques, qui touchent ac en c, aa' en a, hyperosculent en outre B_3 en a et passent par b, a', $(a'c', ab)$.

Chaque rayon par c' donne vers a'_1 un triple d'une involution cyclique de droites. Un tel triple coupe B_4 ou A_3 en 6 points libres, partant:

Les 6 points de rencontre de B_4 *avec le triple de rayons, qui conduit* a'c' *après trois transformations en* c'b', *sont les points* a'_1, *qui jettent* a'_3 *sur* b.

Dans la suite j'exprimerai la manière de procéder par des signes, dont l'explication est prêtée par les deux cas traités au long.

$$[a'_1 - a'_2]\ b' \left\{ \begin{array}{l} b'a' + bc + ac \\ b'c' + ab + ac \end{array} \right\} ac + B_2$$

$$a' \left\{ \begin{array}{l} a'c' + bc + ab \\ a'b' + bc + ac \end{array} \right\} bc + A_2 \qquad \Psi_3$$

$$c' \left\{ \begin{array}{l} c'a' + ab + bc \\ c'b' + ab + ac \end{array} \right\} ab + 2 \text{ droites par } c\ ^{*})$$

$$[a'_1 - a'_3]\ b' \left\{ \begin{array}{l} b'a' + ab + 2G_c \\ b'c' + ac + B_2(ab) \end{array} \right\} \Psi_3(ac) + B_4$$

$$a' \left\{ \begin{array}{l} a'c' + ac + B_2(ab) \\ a'b' + ab + 2ac \end{array} \right\} \Psi_3(bc) + ac + A_3 \qquad \Psi_5 + ac + ab$$

$$c' \left\{ \begin{array}{l} c'a' + ab + 2G_c \\ c'b' + b'c' + ab + ac \end{array} \right\} \Psi_3(ab) + ab + 3G_c$$

$$[a'_1 - a'_4]\ b' \left\{ \begin{array}{l} b'a' + ac + B_2 + ab + 3G_c \\ b'c' + \Psi_3(ac) + B_2 + 2ac \end{array} \right\} 5ac + 2ab + B_2(ab) + B_6$$

$$a' \left\{ \begin{array}{l} a'c' + ab + 2ac + B_2 + 2ac \\ a'b' + 3ac + ab + B_2 + ac \end{array} \right\} 3ac + 2ab + B_2 + 3G_c + A_5 \qquad \Psi_8 + 3ac + B_2 + 2ab$$

$$c' \left\{ \begin{array}{l} c'a' + ac + B_2 + ab + 3G_c \\ c'b' + 4ac + ab + B_2 \end{array} \right\} 5ac + 2ab + 2B_2 + 4G_c$$

*) Les droites par c seront caracterisées dans la suite par G_c.

*

Pour définir plus précisément je remarque: *Toutes les* B_6 *ont un point quadruple en* c *et un point double en* a, *dont les deux tangentes coincident avec* a′b′. *La courbe touche là* a′b′ *en outre en trois points infiniment voisins. Elle passe de plus par* b *et par ses* $2+6$ *transformés suivant* $[a'_1 - a'_2]$ et $[a'_1 - a'_3]$. *Toutes les* A_5 *ont un point triple en* c, *un point double en* a *dont les tangentes sont* ab, aa′. *Le contact de ces tangentes est respectivement du* 3ième *et* 4ième *ordre. Toutes les* Ψ_8 *ont un point* 6uple *en* c *et il s'ensuit:*

Il y a 8 points a'_1 qui jettent a'_4 sur b et qui sont fournis comme points d'intersection des B et A.

$$[a'_1 - a'_5]\ b' \begin{cases} b'a' + 2ac + B_2(ab) + 4G_c \\ b'c' + 2ac + B_6(ab) \end{cases} \Big\}\ \Psi_8(ac) + B_9$$

$$a' \begin{cases} a'c' + 2ac + B_6(ab) \\ a'b' + 4ac + B_4(ac) \end{cases} \Big\}\ \Psi_8(bc) + 2ac + A_7 \qquad \Psi_{11} + B_2 + ab + 3ac$$

$$c' \begin{cases} c'a' + 2ac + B_2(ab) + 4G_c \\ c'b' + 6ac + B_2(ab) \end{cases} \Big\}\ \Psi_8(ab) + 2ac + B_2(ab) + 5G_c$$

Les Ψ *sont du* 11ième *ordre et passent* 8 *fois par* c; *elles sont donc rencontrées par les groupes de* 5 G_c *en* 15 *points. L'affinité est* (15, 1) *et le nombre des points cherchés* a'_1 *est* 15.

$$[a'_1 - a'_6]\ b' \begin{cases} b'a' + B_2 + 5G_c \\ b'c' + 2ac + B_9(ab) \end{cases} \Big\}\ \Psi_{11}(ac) + B_{12}$$

$$a' \begin{cases} a'c' + 2ac + B_9(ab) \\ a'b' + 5ac + B_6(ab) \end{cases} \Big\}\ \Psi_{11}(bc) + A_{10} \qquad \Psi_{15} + \dots$$

$$c' \begin{cases} c'a' + B_6(ab) + 5G_c \\ c'b' + 5ac + B_6(ab) \end{cases} \Big\}\ \Psi_{11}(ab) + B_6(ab) + 6G_c$$

Les Ψ *sont du* 15ième *ordre et passent* 12 *fois par* c, *chaque groupe de* 6 G_c *les rencontre en* 18 *points. L'affinité est donc* (18, 1).

En continuant par construire les Ψ et chercher le nombre des a'_1 il faut d'abord connaître les $B_{(n)}$. Leur faisceau est constitué par deux courbes $b'a' + \Psi^1_{(n-1)}$, $b'c' + \Psi^2_{(n-1)}$, si $\Psi^1_{(n-1)}$, $\Psi^2_{(n-1)}$ sont les deux courbes correspondant à bc, ba suivant $[a'_1 - a'_{n-1}]$.

L'ordre de B_n est donc $x_n + 1$, si x_n l'ordre de $\Psi_{(n-1)}$. *À chaque rayon de* c′ *correspondent par* $[a'_1 - a'_n]$ n *droites par* c *ensemble à une certaine courbe* $B_{(n-1)}$, *d'où l'équation*

$$x_n = n + x_{n-2} + 1,$$

qui donne par un calcul connu le théorème:

Dans l'affinité $[a'_1 - a'_{2s+1}]$ *correspondent aux droites du système* a'_{2s-1} *des* Ψ *de l'ordre* $s^2 + 3s + 1$, *et dans l'affinité* $[a'_1 - a'_{2s}]$ *des* Ψ *de l'ordre* $s^2 + 2s$.

Toutes les $B_{(n)}$ ont en c une multiplicité y'_n qui se compose de $n - 1$ et de y'_{n-2}, donc

$$y'_n = y'_{n-2} + m - 1.$$

L'ordre x'_n de B_n se détermine par $x'_n = x_{n-1} + 1$, d'où

$$x'_n = x'_{n-2} + m$$

ce qui donne $$x'_n - y'_n = x'_{n-2} - y'_{n-2} + 1.$$

Or on a $$x'_2 - y'_2 = 1 \;.\; x'_3 - y'_3 = 2,$$

donc $$x'_{2s} - y'_{2s} = s \;,\; x'_{2s+1} - y'_{2s+1} = s + 1.$$

Dans l'affinité $[a'_1 - a'_{2s+1}]$ *y a-t-il* $2s^2 + 3s + 1$ *points* a'_1 *qui jettent* a'_{2s+1} *sur* b, *dans l'affinité* $[a'_1 - a'_{2s}]$ $2s^2$ *points* a'_1, *et enfin:*

Les courbes Ψ_{s^2+3s+1} *ont en* c *un point* $s^2 + 2$ *stuple, les* Ψ_{s^2+2s} *un point* $s^2 +$ *stuple.*

4. *Transpositions.* 1. α' en β (cad_i) donne $C'C'$, $A'D_i$, D_iB accouplés, et A' en $A'_1 \ldots$ en B, la même caractéristique.

2. α' en β (caa') donne $C'C'$, $A'A$, A'_1A' accouplés et A'_1 en $A'_2 \ldots$ en B en A, la même caractéristique.

3. α' en β $(aa'a'_1)$ donne AA', $A'C'$, BA'_2 accouplés et A en A'_1 en C', B en $A'_{m-1} \ldots$ en A'_2. Voir § 16, II.

4. Pour a' en b donne α' en β (cba') les paires $C'C'$, $B'A'$, BA accouplés, A' en B, la même caractéristique.

5. α' en β $(ca'd_i)$ donne $C'C'$, A'_1A, $B'D_i$ accouplés A'_1 en... B en D_i donc la même caractéristique.

§ 25. — Les caractéristiques (ab), (bc), a' en $a'_1 \ldots$ en $a_m = c$.

Droite en											
C_2	a'									b'	c'
C_2	a'	a'_1								b'	
C_3	a'^2	a'_1	a'_2							b'	c'
C_4	a'^2	a'^2_1	a'_2	a'_3						b'^2	c'
C_5	a'^3	a'^2_1	a'^2_2	a'_3	a'_4					b'^2	c'
C_7	a'^4	a'^3_1	a'^2_2	a'^2_3	a'_4	a'_5				b'^3	c'^2
C_9	a'^5	a'^4_1	a'^3_2	a'^2_3	a'^2_4	a'_5	a'_6			b'^4	c'^2
C_{12}	a'^7	a'^5_1	a'^4_2	a'^3_3	a'^2_4	a'^2_5	a'_6	a'_7		b'^5	c'^3
C_{16}	a'^9	a'^7_1	a'^5_2	a'^4_3	a'^3_4	a'^2_5	a'^2_6	a'_7	.	b'^7	c'^4
C_{21}	a'^{12}	a'^9_1	a'^7_2	a'^5_3	a'^4_4	a'^3_5	a'^2_6	a'^2_7	.	b'^9	c'^5
C_{28}	a'^{16}	a'^{12}_1	a'^9_2	a'^7_3	a'^5_4	a'^4_5	a'^3_6	a'^2_7	.	b'^{12}	c'^7
C_{37}	a'^{21}	a'^{16}_1	a'^{12}_2	a'^9_3	a'^7_4	a'^5_5	a'^4_6	a'^3_7	.	b'^{16}	c'^9

. . . . . .

Ces suites de nombres sont les mêmes pour les ordres et pour toutes les multiplicités. De plus toutes les séries des différences successives soni égales entre elles et à la dite série. Par l'intégration de $u_n = u_{n-1} + u_{n-5}$ on obtient le membre général. Le tableau ne retourne à l'homographie que pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Les périodicités ont les indices 5, 8, 12, 18, 30. La construction de certaines courbes anallagmatiques à des indices peu élévés démontrera, que la périodicité existe en verité.

2. *Transpositions.* 1. α' en β $(cc'd_1)$ donne $B'A'_{m-1}$, $C'C$, D_1A accouplés et C' en C, D_1 en A' en A'_1 en . . . A'_{m-1}. Les caractéristiques se rangent aux § 16 I, 16 II, et 18.

2. α' en β $(a'aa'_1)$ donne $A'A$, $C'A'$, A'_2B accouplés et A'_2 en . . . A'_{m-1} en C en A'_1 en A, c'est la même caractéristique.

3. α' en β (abd_1) donne BA, D_1A', CD_1 accouplés et B en A, C en A'_{m-1} . . . en A'_1 en A'. § 18 I. II. IV. et § 16 I, II $(m = 1)$.

Une nouvelle transposition change les caractéristiques ainsi obtenues en celles du § 9.

4. α' en γ $(d_1^2a'abc)$ donne $A'_1A'_{m-1}$, CD_1, D_1A' accouplés et A'_1 en A'_2 . . . en A'_{m-1}, C en B en A en A', savoir directement les caractéristiques de § 18 I, III, V, si $m = 3, 4, 5$.

[3. *Recherche de la transformation* (ab'), (bc'), a' *en* c; *Indice* 5. Les transformations successives sont

Droite en C_2 $a'b'c'$ en C_2 $a'b'c$ en C_2 $a'c'c$ en C_2 $a'b'c'$ en droite

donc toutes de la même espèce. Les points principaux accouplés sont

$$a\,b\,c \quad ; \quad c'\,c\,a' \quad ; \quad c\,a'\,b' \quad ; \quad a'\,b'\,c' \;^{*)}$$

$$a'\,b'\,c' \quad ; \quad a'\,b'\,c \quad ; \quad a'\,c'\,c \quad ; \quad b'\,c'\,c$$

Q^2 ne possède que deux points doubles d_1 d_2; la conique directive de b, b' se partage en ab et une droite par $(a'a, c'c)$ et $(a'c', ac)$ qui contient d_1, d_2. Le théorème du § 9 s'énonce ainsi:

Les points d_1 d_2 *sont ceux, pour qui existe une homographie* a' *en* a *en* b' *en* b *en* d_1 *en* a' *périodique à l'indice* 5.

Une courbe C_3 qui passant par la caractéristique contient un quintuple périodique, est nécessairement anallagmatique. Car en supposant, que celui-ci déterminerait un faisceau de C_3, doué de l'indice 5, on devrait admettre deux courbes C_3^4 invariables du faisceau et parceque dans le plan n'existe pas une infinité de pareilles courbes, tous les quintuples se distribueraient sur ces deux courbes.

La C_3 anallagmatique porte une correspondance de l'indice 5, savoir de l'espèce $u' - u = \gamma$. Le premier transformé de a' est c, le deuxième le point d'intersection avec $a'b'$, mais suivant § 4. I. partie ce second transformé est a, dans notre cas C_3 touche donc $a'b'$ en b' et cb en b. Le premier transformé de (ab') vers le premier système étant l'intersection avec ac et d'autre part le point c, C_3 sera par suite tan-

*) Tous les 4 triangles du quadrilatère a'b'c'c apparaissent dans le tableau, ce qui donne lieu à des considérations sur certains groupes

gente à ac en c; de même à $a'c'$ en a'. Suivant § 3. I. partie toute C_3 jouissant de ces contacts, passe par $(ab, a'c)$. Donc:

Dans la Q^2 *proposée existe un faisceau de* $C_3^{\cdot}$, *qui ont toutes* $a'c'ca$ *dans cet ordre comme quadruple tangentiel et* $(ac', a'c)$ *comme point d'inflexion. Chacune de ces* C_3 *est anallagmatique et contient* ∞^1 *quintuples. Les 5 points communs en forment un. Deux* C_3^4 *du faisceau passent doublement par* d_1, d_2 *respectivement.*

Et ensuite: *Un quadruple tangentiel, pris sur une* C_3^4 *forme avec le point double de* C_3^4 *un groupe périodique d'une homographie de l'indice 5.*

Paramètres sur C_3. $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{5}$, $a' \equiv \frac{\gamma}{3} \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{15} + \frac{C}{3}$, $a \equiv \frac{7mk_1 + 7nk_2}{15} + \frac{C}{3}$, $c' \equiv \frac{13mk_1 + 13nk_2}{15} + \frac{C}{3}$, $c \equiv \frac{4mk_1 + 4nk_2}{15} + \frac{C}{3}$.

Par les 54 quadruples tangentiels de la C_3 se construisent 108 Q^2 qui reproduisent la C_3 donnée. Elles ont deux à deux la même caractéristique de manière, que l'une est la répétition de l'autre *).

4. *Recherche de la transformation* (ab'), (bc'), a' *en* a'_1 *en* c *à l'indice 8.*

Les transformations successives sont:

Droite en					
C_2	a'		b'	c'	
C_2	a'	a'_1	b'		
C_3	a'^2	a'_1	b'	c'	c
C_3	a'	a'^2_1	b'	c'	c
C_3	a'	a'_1	b'	c'	c^2
C_2		a'_1		c'	c
C_2			b'	c	c
Droite					

Sont accouplés: $c^2a'^2$, $c'c$, $b'c'$, $a'b'$, $a'_1a'_1$.

Le théorème du § 9 fournit: *Les 5 points de la caractéristique admettent une homographie* a' *en* a *en* c' *en* c *en* a' *(de l'indice 4) et qui possède* a'_1 *comme point double* **).

Les coniques par $a'ac'c$ se transforment vers les deux systèmes en droites par a'_1. En premier lieu je dis, que d_1d_2 ne sont pas situés sur une seule de ces coniques. Car celle-ci serait la conique directive pour $a'a$ et $c'c$, ce qui est inadmissible, parceque ces coniques doivent couper $a'c$ respectivement en $(a'c, aa'_1)$, et $(a'c, ba'_1)$, si non a'_1 tombe en $(a'c', ac)$, ce qui ferait la Q^2 singulière.

Soient donc Δ_1, Δ_2 les coniques $a'ac'cd_1$ et $a'ac'cd_2$. Δ_i se transforme de part et d'autre en a'_1d_i et coupe a'_1d_i en un point double, qui est évidemment d_i. Partant:

*) Il suffit de faire mention de ce que cette Q^2 est réductible à une homographie. Voir ci-haut n. 2 et § 16. I.

**) Remarquons déjà une conséquence, qui s'en déduit: *En permutant les points* a'b'c'c *de toutes les manières possibles, on obtient 24 caractéristiques différentes*, qui suivant notre théorème ne possèdent que *6 points* a'_1, *de sorte que y à y elles ont le même point* a'_1.

Les coniques $a' a c' c d_1$, $a' a c' c d_2$ *touchent en* d_1, d_2 *les droites* $a'_1 d_1$, $a'_1 d_2$ *et* $a'_1 d_1 + \Delta_1$, $a'_1 d_2 + \Delta_2$ *sont deux courbes anallagmatiques.*

L'homographie périodique entre les deux parties a l'indice 8. En effet l'indice 2 est inadmissible à raison de $a' a'_1 c$, l'indice 4 parceque le deuxième transformé de c, le point d'intersection de Δ avec $a' a'_1$ tomberait sur a' et que ce contact par la Q^2 même se changerait en le passage de Δ par $(a' a, c' c)$, conclusion à rejeter.

Les points et leurs deuxièmes transformés sont dans les deux droites comme dans les deux coniques liés par une homographie de l'indice 4. Celle de $a'_1 d_1$ a deux points doubles, dont l'un est d_1 et l'autre a ses deux transformés coincidents sur Δ_1. Celui-ci entre donc en une paire involutive, je le désigne par i_1, son transformé sur Δ_1 par i_2. Il convient de remarquer, que plus d'une seule paire involutive n'existe pas ici, attendu que droite ou conique invariable sont en contradiction avec la caractéristique et qu'une cubique remplie de paires involutives ferait identique la seconde Q^2. De là on conclût *que* $a'_1 d_2$ *passe par* i_2 *et* Δ_2 *par* i_1. Mais $a'_1 d_1$ et Δ_2 se rencontrent déjà en i_1, l'autre point d'intersection devrait se changer de part et d'autre en $(a'_1 d_2, \Delta_1)$ et constituerait ainsi une nouvelle paire involutive. Par conséquent:

Les droites $a'_1 d_1$, $a'_1 d_2$ *sont deux tangentes communes des deux coniques* Δ_1, Δ_2, $a'_1 d_1$ *les touche resp. en* d_1, i_1, *et* $a'_1 d_2$ *les touche en* i_2, d_2 *).

Or je me propose de construire indépendamment des raisonnements précédents une cubique anallagmatique.

Le lieu des tangentes menées de a'_1 *aux* Δ *est évidemment une pareille cubique.* Elle passe par $a' a c' c$, y ayant les tangentes $a' a'_1$, $a a'_1$, $c' a'_1$, $c a'_1$, et par a'_1. En se rappelant l'homographie périodique de l'indice 4, que nous venons d'établir, on voit que $a'_1 a'$, $a'_1 c'$ sont séparées harmoniquement par $a'_1 a$, $a'_1 c$, donc *la dite cubique est harmonique*, C_h.

Elle passe par $(a' a, c' c)$, $(a' c', a c)$, $(a' c, a c')$. Ces points servent à constituer deux quadruples périodiques sur C_h de la manière suivante: $a' a'_1 c\ (a' a, c' c)$; $a\ (a' c, a c')\ c'\ (a' c', a c)$. La correspondance sur C_h deux fois appliquée donne par conséquent une involution où 4 paires sont alignées avec $(a' c, a c')$ *et doit être* $u' - i u \equiv \gamma$ *ayant* $(a' c, a c')$ *comme centre de convergence.* Elle contient d_1, d_2 et $i_1 i_2$. Ceci donne encore le résultat, *que* $d_1 d_2$, $i_1 i_2$ *passent par* $(a' c, a c')$. Le point $(a' c', a c)$ est point d'inflexion pour C_h.

Les faisceaux F. La base d'un premier F_1 est constituée par $i_1 i_2$ et le contact en d_1 avec C_h. Car $i_1 i_2$ et la tangente en d_1 rencontrent C_h en deux points alignés avec a', savoir dans la 6ième intersection de C_h avec $(a' a c' c a'_1)^2$.

Une correspondance de l'indice 8 à point double étant impossible sur C_3, l'indice de F_1 n'est pas 1; une infinité de paires involutives étant inadmissible, l'indice n'est pas 2. L'indice 4 est à rejeter, parceque la correspondance sur C_3 devenant $u' + u \equiv \gamma$, le point de rencontre de $i_1 i_2$ et de la tangente en d_1 serait pour toutes les C_3 le centre de convergence, sans être un point base. Donc:

Entre les C_3 *du faisceau constitué par* C_h *et par* $\Delta_1 + a'_1 d_1$ *existe une périodicité à l'indice 8. De même dans le faisceau constitué par* C_h *et* $\Delta_2 + a'_1 d_2$. Un F_3 est composé par $a'_1 d_1 + \Delta_1$ et $a'_1 d_2 + \Delta_2$. Toutes ses cubiques se touchent en $i_1 i_2$ en ayant là $a'_1 d_1$, $a'_1 d_2$ pour tangentes. Les C_3 coupent C_h en des paires de points, qui sont alignées avec $(a' c, a b)$. Donc:

*) a'_1 est donc situé sur un côté du triangle polaire de $a' a c' c$ et cela s'accorde avec l'homographie de l'indice 4 citée plus-haut. Une autre conséquence est celle, que $d_1 i_2$ et $d_2 i_1$ passent par $(a' c', a c)$.

Les courbes de F_2 *se transforment involutivement entre elles, portent donc toutes* $u' - iu \equiv \gamma$, *dont le centre de convergence est le point de recontre avec* $a'a'_1$. *Toutes les* C_3 *sont harmoniques. Il n'y a aucune courbe rationnelle outre les deux décomposées.*

Comme corollaire se trouve, que les directions invariables en d_1 et d_2 sont celles des droites dirigées de d_1 ou d_2 vers a'_1 et $(a'c, ab)$.

Je considère le faisceau passant par la caractéristique et par d_1^2. Les deux C_3 anallagmatiques sont $a'_1 d_1 + \Delta_1$ et une C_3^3 avec rebroussement en d_1. La tangente de rebroussement en d_1 est la tangente de C_h. L'homographie sur C_3^3 a l'indice 8, les C_3^4 du faisceau se permutent au même indice. Par la considération du faisceau $d_2^2\, a'ac'ca'$ se trouve une C_3^3 anallagmatique, dont la tangente en d_2 passe par $(a'c, ab)$.

Les tangentes de ces deux C_3^3 resp. en d_2, d_1 sont les droites $a'_1 d_2$, $a_1 d_1$. En ajoutant à la caractéristique d_1 et un contact triponctuel en d_2 avec C_h ou d_2 et un contact triponctuel en d_1 on obtient deux faisceaux, où C_3^3 (d_2^2) on C_3^3 (d_1^2) est la seconde C_3 anallagmatique. Elle compte pour 4 courbes rationnelles.

D'autres faisceaux contenant la C_h n'existent pas; mais les 2 C_3^3 forment ensemble un faisceau à l'indice 2, dont les cubiques sont harmoniques.

La Q^2 possède donc en tout les suivantes cubiques anallagmatiques: 1. C_h par $(i_1 i_2 d_1 d_2 d'_1 d'_2)$. Indice 4. 2. C_3^3 par $(d_1^2 d_2 d'_1)$. Indice 8. 3. C_3^3 par $(d_2^2 d_1 d'_2)$. Indice 8. $(i_1 a'_1 d_1 + \Delta_1$. Indice 8. 5. $a'_1 d_2 + \Delta_2$: Indice 8.

Elles s'arrangent aux faisceaux suivants:

C_3 anall.	Nature des C_3	Base	Indice de F	Indice des C_3
4. + 5.	harmonique	$i_1 + i'_1$, $i_2 + i'_2$	2	4
2. + 3.	harmonique	$d_1 + \bar{\bar{d}}'_1$, $d_2 + \bar{\bar{d}}'_2$	2	4
1. + 2.	arbitraire	$d_1 + \bar{d}_1 + \bar{d}'_1$, d_2	8	—
1. + 3.	arbitraire	$d_2 + \bar{d}_2 + \bar{d}''_2$, d_1	8	—
1. + 4.	arbitraire	i_1 , i_2 , $d_1 + \bar{d}_1$	8	—
1. + 5.	arbitraire	i_1 , i_2 , $d_2 + \bar{d}_2$	8	—
2. + 4.	rationnelle	d_1^2	4	2
2. + 5.	arbitraire	$d_2 + \bar{\bar{d}}_2 + \bar{\bar{d}}'_2 + \bar{\bar{d}}''$	4	2
3. + 4.	arbitraire	$d_1 + \bar{\bar{d}}_1 + \bar{\bar{d}}''_1 + \bar{\bar{d}}''_1$	4	2
3. + 5.	rationnelle	d_2^2	4	2

Remarque. $\bar{d}_i$, $\bar{d}_i$ . . . sont le premier, second etc. point infiniment voisin à d_i dans la direction de C_h, $\bar{\bar{d}}'_i$, $\bar{\bar{d}}''_i$ . . . ceux dans la seconde direction invariable de d_i.

Paramètres sur C_h. $(ab') \equiv -ia - 2i\gamma$, $(bc') \equiv -a - 2\gamma(1+i)$, $c \equiv ia - 2\gamma$, $a'_1 \equiv ia + \gamma$, d'où $-a + \gamma(1+i) \equiv ia - 2\gamma$ et $a \equiv -\gamma(i+4)$.

De là je tire

$$6(i+1)\gamma \equiv 0\,, \qquad \text{donc en posant} \qquad \gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{12}\,, \qquad m + n \equiv 0 \bmod 2$$

$$a' \equiv -\frac{(4m+n)k_1 + (4n-m)k_2}{12}\,, \quad (ab') \equiv \frac{(2n-m)k_1 - (2m+n)k_2}{12}\,, \quad (bc') \equiv \frac{(2m-n)k_1 + (2n+m)k_2}{12}\,,$$

$$c \equiv -\frac{(m+4n)k_1 + (n-4m)k_2}{12}\,, \qquad a'_1 \equiv -\frac{(2n-m)k_1 - (2m+n)k_2}{6}\,.$$

$(ac\,,\ a'c')$ est un point d'inflexion sur C_h, a'_1 en dérive comme point de premier contact, c, a', a, b ont a'_1 pour tangentiel, mais permettent quatre manières d'arrangement. Il y a donc 9. 3. 4 Q^2 pour C_h donnée *).

5. *Observation sur* m = 3. On peut trouver une $\mathfrak{T}$ qui réduit le cas $m = 3$ du § 26 en un certain sens, toutefois le degré de Q^2 augmente alors et le résultat se range plutôt dans la IIIième partie. Néanmoins je communiquerai à présent cette réduction.

α' en β $(a'_1\ c\ c')$ donne $C'^2\ C^2$, CA', A'_2C', $A'_1\ A'_2$, AA accouplés et A' en A'_1.

En exprimant par $a^2\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, $b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ les systèmes fondamentaux d'une Q^3, on a la caractéristique:

$$(ab_1)\ ,\ (ba_2)\ ,\ (a_4b_4)\ ,\ (a_3b_2)\ ,\ a_1 \text{ en } b_3\,,$$

et le tableau **):

Droite en						
C_3	b^2	b_1	b_2	b_3	b_4	
C_3	b	b^2_1		b_3	b_4	a_1
C_2	b			b_3		a_1
C_4	b	b_1	b_2	b^2_3	b^2_4	a^2_1
C_4	b	b^2_1	b_2	b^2_3	b_4	a^2_1
C_3	b		b_2	b_3	b_4	a^2_1
C_4	b	b^2_3	a_1	b^2_4	b_1	b^2_2
C_4	b^2_1	b	b_3	b^2_2	b^2_1	b_4
C_2	b_2			b_4		a_1
C_3	b	b^2_2		b_4	b_3	b_1
C_3	b_1^2	a_1	b	b_2	b_1	
Droite						

*) La Q^2 est réductible à une forme du § 16. II. et par suite aussi à une du § 24.

**) Dans les caractéristiques accouplées les points accouplés sont ordonnés dans la même colonne.

§ 26. — La transformation (ab), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en c. Indice 12.

	Droite	C_2	C_2	C_3	C_4	C_4	C_5	C_4	C_4	C_3	C_2	C_2	Droite
a'		1	1	2	2	2	2	1	1				
a'_1			1	1	2	2	2	2	1	1			
a'_2				1	1	2	2	2	2	1	1		
c					1	1	2	2	2	2	1	1	
ab'		1	1	1	2	1	2	1	1	1			
bc'		1		1	1	1	2	1	2	1	1	1	

1. Je commence par préciser les deux premières transformations successives:
Q^2_2 : ba' , ca , $a'_2 a'_1$ accouplés, a' en a' ; a'_1 en c , a en b , Indice 6.
Q^3_3 : $c^2 a'^2$, $a'_1 b'$, $a'_2 a'_1$, $b'c'$, $c'a'_2$ accouplés, a' en c , Indice 4.

2. Il est bésoin, d'établir les homographies directives:
$b'a'_2$ et ba'_1 , $b'a$ et bc , $b'c$ et ba'_2 , $b'a'_1$ et ba'_2 se coupent sur une droite σ,
aa'_1 et $a'a'_2$, aa'_2 et $a'c$ dans une conique par c' , qui touche ac , $a'a'_1$ en a , a',
ca'_1 et $c'a'_2$, ca' et $c'a'_1$ dans une conique par b', qui touche $c'a'$, ca'_2 en c', c.

Il y a deux points doubles d_1 , d_2 *sur une droite* σ *par* $(a'a , c'c)$. Le faisceau des trois coniques directives étant contenu dans le réseau: $ab + a'b'$, $bc + b'c'$, $ca + c'a'$, i s'ensuit: $d_1 d_2$ sont conjugués par rapport à la conique par ac , $a'c'$ qui touche aa', cc en a, b.

[3. Q^2_2 ayant la caractéristique du § 12, je puis emprunter de là les conditions suivantes: *Sont convergentes les droites*

$$ba' \ , \ ca \ , \ a'_1 a'_2 \quad \text{en} \quad \mathfrak{d}'$$

$$ba \ , \ ca'_1 \ , \ a' a'_2 \quad \text{en} \quad \mathfrak{d}''$$

$$ba'_1 \ , \ ca' \ , \ a a'_2 \quad \text{en} \quad d_2 ,$$

et les droites

$$(aa'_1 , ca'_2) \qquad (aa'_1 , ba'_2) \qquad (a'a , bc)$$

$$(a'_1 a' , ca'_2) \qquad (a'a , a'_2 b) \qquad (aa'_1 , bc)$$

$$(a'a , ca'_2) \qquad (aa'_1 , a'_2 b) \qquad (a'a'_1 , bc)$$

passent par les points $(ab , a'_1 c , a'a'_2)$, $(ba'_1 , ca' , a'_2 a)$, $(ba' , ca , a'_1 a'_2)$.

Les trois droites $a'c$, $a'_1 c'$, $a'_2 a$ se transformant successivement entre elles, le point, où elles concourent, doit être double, je le désignai par d_2.

4. Q^3_3 fournit un autre mode d'exprimer les relations entre la caractéristique:
Le théorème de la III. partie s'énonce ainsi:

Il y a une homographie P, *qui conduit* b′ *en* c′ *en* a'_2 *en* a'_1 *en* b′ *et* c *en* a′. Se référant au n. 2 on remarque, *que* a′c *en est une droite double.*

5. La Q^2 du § 18. I. se transforme par T^2 $(cc'a)$ en la présente Q^2. L'existence de $(cd_3a'_1)^1$, $(c'd_3a'_2)^1$, $(cc'd_3aa'b)^2$ se change en cela, que CA'_1, $C'A'_2$, $A'B$ passent par D_3, ce qui convient au n. 3. Des autres relations définies dans l'endroit cité se déduit: aa'_2, ba'_1, ca' *sont touchées par les coniques* $a'a'_1bcd_1$, $a'a'_2acd_1$, $aba'_1a'_2d_1$ *aux points* r', r'', r *du triple périodique.* Voir pour une autre déduction n. 9.

6. Quelques autres homographies se déduisent du théorème du § 9:

S: c en c' en b' en a' en c et a'_2 en a'_1 $(cb', c'a')$ et a', a'_2 sont doubles.

c en c' en b' en a' en a'_2 et a'_1 en a'_1 ; a'_1 en c en c' en b' en a', a'_2 en a'_2,

et en l'applicant à Q^2_2 : b en a' en c en a, a'_2 en a'_1 en a'_2 ;

b en a' en b, c en a en a'_2 en a'_1 ; a'_2 en a'_1 en b en a', c en a en c.

7. D'ailleurs se trouvent par la combinaison de ces homographies avec celles du n. 4 ou entre elles d'autres homographies propres à cette caractéristique. Pour que la nouvelle homographie réunisse de nouveau cinq paires de points de la caractéristique, il faut, que les cinq points de départ de l'une homographie soient points d'arrivée pour la seconde. Suivant une autre méthode on pourrait soit Q^2 soit Q_2^2 adjoindre aux homographies, que nous venons de définir, soit par composition soit par transformation. P. e. PQ *donne une transformation quadratique ayant* a′c′ *comme points principaux accouplés en croix, en outre* a'_2a *accouplés et* a'_1 *en* a_2 *en* c, d_2 *en* d_2. *Elle est périodique à l'indice 6 etc.* SQ donne $a'_1c'_1c'a'_1$, ac accouplés et a'_2 en a'_2, a en a'_1, $S^{-1}Q$ donne $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$ accouplés et a'_1 en c en a'_1, d_2 en (aa'_1, bc) en d_2. SQ et sa symétrique demandent que sur aa'_2, ba'_1 les trois points a, a'_2, $(a'c', aa'_2)$ resp. b, a'_1, (ac, ba'_1) forment un triple, pour qui d_2 appartient au Hessien. Ou: *Les droites* a (a, b, c, a'_2) *de même que* c(a', a, b, a'_1) *forment un quadruple équianharmonique.* De là:

Il existe une homologie périodique à l'indice 3 avec a′ *en* a′, c *en* c *et* a *en* b *en* ∂' *en* a, *qui donc possède* a′c *comme axe et le centre dans* ab.

$a(bca'_2a'_1)$ et $b(aa'a'_2a'_1)$ sont de même deux quadruples équianharmoniques. Il y a donc une homologie a en a, b en b, a'_1 en a'_2 en $(ac, a'c')$ en a'_1, ayant ab comme axe et son centre dans $a'_1a'_2$.

Les deux transformations PQ et sa symétrique donnent par composition une transformation quadratique avec $a'a'_1$, $a'_1a'_2$, a'_2c accouplés et d_2 en d_2, b en a.

8. À l'aide de l'homographie S on peut déjà construire la Q^2 de la manière suivante: *Étant donnés* a′abc *et par suite* ∂' *on construit les droites doubles de* S *passant par* ∂. *Chacune d'elles porte une homographie à l'indice 4, les deux séries existant sur une sont projetées de* a′, c *par des faisceaux homologiques, qui engendrent une conique tangente à* a′a, c′c *en* a, c *et passant par* ∂. *Cette conique rencontre* ab *en deux points et tous les deux s'appliquent comme* ∂'. *Menant de* ∂' *deux droites par* a′, c *on construit* a'_1, a'_2.

On a quatre possibilités. Les quatre a'_2 s'obtiennent par l'intersection des deux droites doubles de S par ∂' avec les deux droites, qui vont de a' aux deux points ∂' possibles].

9. *Recherche des* C_3 *et* F *anallagmatiques.* Les C_3, qui ont en d_2 un contact vers une

des deux directions invariables, forment un faisceau et $a'c + aa'_2 + ba'_1$ en faisant partie, les courbes s'osculent en d_2. Aucune autre C_3 décomposée ne s'y trouve pas. Aucun de ces faisceaux n'a pas l'indice 1, comme il n'y a pas de correspondance sur C_3 à l'indice 12 et à point double, ils donnent donc lieu à deux nouvelles courbes anallagmatiques, passant toutes les deux par d_1. Ici deux sommets devant coincider, les courbes s'y touchent ou l'une d'elles y possède un point double. La première supposition est à exclure; car la courbe par $d_1^2 d_2$ serait anallagmatique et le faisceau constitué par les deux nouvelles cubiques aurait l'indice 1. *Une de ces deux est donc* C_3^3 *par* $d_1^2 d_2$ (voir § 1. n. 3), l'autre a $p = 1$, et $a'a'_1a'_2c$ entrant évidemment en un cycle et la correspondance contenant déjà d_1, d_2, *elle est* C_h, *qui touche* c b *en* c *et* a' b' *en* a'.

Un contact en d_1 vers la seconde direction invariable (l'autre est celle de C_h) détermine un faisceau qui contient C_3^3 et dont toutes les courbes s'osculent. La seconde C_3 fixe est évidemment C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$.

L'indice sur C_3^3 de même que sur $a'c + aa'_2 + ba'_1$ n'est pas 4 ni 6. Car le degré de Q_4 étant 4 et celui de Q_6 6, on aurait soit des quadruples soit des sextuples une infinité remplissant une courbe du 6ième degré; ce qui est incompâtible avec le degré des Q. L'indice sur les dites courbes anallagmatiques est 12.

La Q^2 contient donc 2 points doubles, une couple involutive, un triple périodique, ∞^1 quadruples et ∞^1 sextuples.

Les 4 courbes anallagmatiques se groupent à 6 faisceaux F, comme il suit:

Courbes anallagmatiques	Nature des cubiques	Base	Indice de F	Indice des C_3
C_3^3 , $a'c + aa'_2 + ba'_1$	équianharmoniques	$d_2 + \bar{d}_2 + \bar{d}'_2$	2	6
C_e , C_3^3	équianharmoniques	$d_1 + \bar{\bar{d}}_1 + \bar{\bar{d}}'_1$	4	3
C_e , $a'c + aa'_2 + ba'_1$	équianharmoniques	$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ *)	4	3
C_h , C_e	arbitraire	$d_1 + i_1 + i_2$	12	—
C_h , C_3^3	harmoniques	$d_2 + d_1 + \bar{d}_1$	3	4
C_h , $a'c + aa'_2 + ba'_1$	arbitraire	$d_2 + \bar{\bar{d}}_2 + \bar{\bar{d}}'_2$	6	2

Les indices des F se déterminent le plus directement par l'intersection des courbes de F avec une C_3 et à l'aide de § 4. IV. on fera la conclusion à leur nature particulière. J'ajoute encore:

Toutes les cubiques du réseau constitué par C_3^3, C_e, $a'c + aa'_2 + ba'_1$ *sont équianharmoniques. La courbe Hessienne est* C_h *deux fois comptée.* Les cubiques rationnelles: Dans le 1. faisceau F_1 le point triple compte pour 6, le rebroussement pour 2 points doubles, les autres C_3^4 sont représentées par 2 C_3^3, dont les rebroussements sont i_1, i_2. Dans F_2 y a-t-il 6 C_3^4, formant un sextuple. Dans F_4 y a-t-il 12 C_3^4. Dans F_5 compte C_3^3 pour 3 C_3^4. Les autres C_3^4 doivent se grouper à des triples. Or il n'existe qu'un seul triple périodique, donc chacune des trois courbes rationnelles encore existantes compte pour

*) $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ est le triple périodique contenu sur les trois droites $a'c + aa'_2 + ba'_1$.

trois C_3^4. Cela montre, que aa'_2, ba'_1, ca' sont touchées resp. par $(a'a'_1bcd_1)^2$, $(a'a'_2acd_1)^2$, $(aba'_1a'_2d_1)^2$ dans les points r', r'', r et forment ensemble à ces coniques trois cubiques de F_5. Voir n. 5.

Deux cycles remarquables de cubiques rationnelles proviennent encore de

$$(a'a'_1a'_2cd_1)^2+b'c' \text{ et de } (a'^2_2c'b'a'a'_1cd_1)^3.$$

10. *Sur la* C_h *anallagmatique.* C_h est tangente à $a'a$, $c'c$ en a', c et $a'a'_1a'_2c$ forment un quadruple; a, b sont réunis dans un autre, et parceque a, b se transforment en ca, $c'a'$ vers Σ ou Σ' resp., la C_h passe par $(ca, c'a')$ ou $\mathfrak{d}'$. La droite $a'a$ se transforme en $a'a'_1$, partant C_h touche a'_1a' et a'_2c en a'_1, a'_2. Le point de rencontre avec a'_1a se transforme vers Σ en celui avec $c'a'$, donc en le point d'intersection avec ca, savoir le point a. Partant: C_h touche aa'_1, ba'_2 resp. en a, b.

C_h *possède* $a'aa'_1$, $cc'a'_2$ *comme triples tangentiels.*

Le point de rencontre de C_h avec ab est le transformé du voisin de a le long de aa'_1 et du voisin de b le long de ba'_2; or aa'_1 se transformant vers Σ' en $a'a'_2$, ba'_2 vers Σ en ca'_1 il s'ensuit, que le centre de convergence $(ab, ca'_1, a'a'_2)$ est sur C_h. De là: *Les centres d'homologie* d_2, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ *des triples* $aa'a'_1$, $cc'a'_2$ *forment dans cet ordre un triple tangentiel et les 3 triples se groupent à une configuration* (A).

Ce résultat aurait pû se tirer aussi de § 12. Mais il est utile à remarquer, que la courbe J, qui apparaît là, n'est point harmonique en général. Donc:

En général la transformation du § 12 *ne peut se regarder comme répétition d'une* Q^2 *de l'espèce présente.*

Les relations, qui caractérisent le plus exactement la particularisation de la Q^2_2, sont contenues dans l'homographie P. Car si P existe, existe aussi Q_3, et par suite $Q_3Q_2^{(-1)}$ c'est-a-dire Q^2. On peut donc énoncer, que c'est la cubique harmonique seulement pour laquelle les deux triples tangentiels s'arrangent de la manière décrite en une homographie de l'indice 4. $\mathfrak{d}''$ est aussi le point tangentiel de d_1. Il a telle position que les droites $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ et ab, a'_1c et a'_2a forment deux paires d'une involution quadratique, pour qui $\mathfrak{d}'d_1$, $\mathfrak{d}'d_2$ sont les droites doubles. Par là on a obtenu une première droite pour déterminer d_1.

Q^2 étant construite, la C_h se trace facilement à l'aide des méthodes connues, attendu qu'on connait a, b, a', c, les tangentes de $a'c'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ et la tangente $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ en d. Comme on sait bien, l'existence imaginaire de $\mathfrak{d}''$ n'entrave point la construction.

11. *Sur la* C_e *anallagmatique.* Pour achever le groupe périodique contenant a et b, il faut, que C_e passe par (aa'_1, ba'_2). Ce résultat transformé par Q^2 donne: C_e *passe par* $(ca', a'b)$ *et* $(a'a'_2, ac)$ *et touche en* a, b *deux droites, qui y sont tangentes aux coniques* Γ_1 $(a'aba'_1)$ *et* Γ_2 $(a'abca'_2)$. *Ces tangentes réunissent* a, b *aux points d'intersection resp. de* $b'a_2$, aa'_1 *avec la droite* $(a'b, ac)$ $(a'a, c'c)$. C_e *passe encore par* $(ab, a'_1a'_2)$.

Le point de rencontre avec a', c est un point r du triple périodique, mais a', c étant deux points opposés d'un sextuple, r est aussi le centre de convergence. Cela demande, qu'une des tangentes sortant de r ait son contact dans r. *Le point* r *est donc d'inflexion pour* C_e.

r étant construit linéairement, on obtient une autre droite pour la construction de d_1. On mène les deux droites, qui complètent rc, ra'_2, ra'_1 à un quadruple équianharmonique, l'une d'elles passe par d_1. La séparation s'effectue au moyen de la C_e.

La droite $(ab, a'_1a'_2)$ passe par r. Cela démontre, que r est un point double pour P.

Les droites $a\ (a'b,\ a'_1c)$ et $b\ (ac,\ a'_2a')$ passent de même par r. En transformant par Q^2 même, on obtient:

Les droites de $a'c$, $a\ (aa'_1,\ ba'_2)$ *coupent* a'_1b, a'_2 *a resp. dans* r', r''.

La droite $r'r''$ passe par d_1 et i_1i_2 par r. La droite i_1i_2 est donc identique à $r\delta''$. Encore on voit que $r'r''\ d_1$ est la polaire harmonique de r par rapport à C_e, d'où l'on tire une autre construction pour d_1.

La tangente de C_e en b se transforme vers Σ' en une droite par b', qui contient aussi le point d'intersection de C_e avec ba', savoir $(a'b,\ a'_1c)$; mais cette droite passe par r, donc la tangente en b passe par r''. De même passe la tangente en a par r'. Les premier et second tangentiel de a sont $r'r$, ceux de b sont $r''r$. De là il s'ensuit, que $(ab, a'_1a'_2)$ a le point d_1 comme tangentiel. Un autre point, dont la tangente passe par d_1, est $(aa'_1,\ ba'_2)$. Il est aligné avec $(ab, a'_1a'_2)$ et γ, donc etc. Les point de contact des autres tangentes sortant de d_1 sont donc aussi alignés avec r.

Le tangentiel de a'_1 est aligné avec les tangentiels de a et de $(aa'_1,\ ba'_2)$, savoir r' et d_1, il est donc r''. De même le point tangentiel de a'_2 est r'. Or a' et $(aa'_1,\ ba'_2)$ sont alignés avec r', le tangentiel de a' est donc aligné avec d_1 et r, il tombe sur r. Cela montre, que les 4 tangentes sortant de d_1 touchent en $a', c, (aa'_1,\ ba'_2), (ab,\ a'_1a'_2)$.

En transformant la droite cd_1 vers Σ', on voit que bd_1 et $a'b'$ se coupent sur C_e. Cela donne la construction la plus simple et élégante du point d_1.

Tirez les droites ra'_1, ra'_2 *et faites leurs intersections avec* cc', aa', *joignez ensuite ces deux points à* a, c' *et vous aurez deux droites qui se coupent en* d_1.

J'observe encore: Les droites a'_1d_1, a'_2d_1 coupent a'_2a', a'_1c sur C_e. La C_e rencontre $a'a$, $c'c$ en $(a'a,\ a'_2c)$, $(a'_1a', c'c)$ et coupe donc les côtés de $a'a\,a'_1$ et $c'c\,a'_2$ dans les mêmes trois points, savoir ceux, qui appartiennent à l'axe d'homologie de d_2.

Je termine par annoter une propriété remarquable de la courbe équianharmonique: Soit r un point d'inflexion, soient $\beta_1\beta_2\beta_3$ les points de premier et $\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ les points de deuxième contact qui y appartiennent. Deux côtés du quadruple δ_i qui provient de β_2 et deux de ε_i provenant de β_3 se coupent en 4 points à l'extérieur de C_e et les diagonales de ce quadrangle sont les côtés de γ_i qui passent par r.

Les 18 côtés de $\gamma_i\delta_i\varepsilon_i$ *forment une configuration de 24 points et de la signature* $(3, 4)_6$.

12. *Paramètres sur* C_h. $a' \equiv ia - 2\gamma$, $a'_1 \equiv -a + (1-2i)\gamma$, $a'_2 \equiv -ia + (3+i)\gamma$, $c \equiv a + 3i\gamma$, $c' \equiv ia - 5\gamma$, $b' \equiv -a - 5i\gamma - 2\gamma$, d'où

$$2a \equiv -2\gamma - 5i\gamma \quad , \quad a(1+2i) \equiv 4\gamma.$$

Cela fait $9\gamma \equiv 0$. Les mêmes propriétés géométriques que ci-haut, se trouvent en envisageant les paramètres. On voit encore, que les correspondances sont les mêmes que celles des § 10 et on peut distribuer les (A) tangentielles sur les caractéristiques possibles.

On prend un point d'une (A) tangentielle comme δ'', le point précédent du triple est d_2 et d_1 est son conjugué harmoniquement. Désormais la correspondance est déterminée. δ' le tangentiel de δ'' et les deux points correspondants sont a, b, les points tangentiels de a, b sont a', a''_2.

Sur C_h *donnée existent 72 caractéristiques de cette espèce.*

J'écrirai les caractéristiques, qui ont resp. $\delta''\delta' d_2$ comme centres de convergence:

$a'a$, $b'b$, $c'c$ accouplés , a' en a'_1 en a'_2 en c , doubles: d_2 et le conjugué d_1 ,

aa'_1 , $a'_1 a'_2$, $a'_2 b$ accouplés , a en a' en c en b , doubles: δ'' et le conjugué,

$a'_1 a'$, $a'c$, ca'_2 accouplés , a'_1 en a en b en a'_2 , doubles: δ' et le conjugué *).

En prenant deux triples tangentiels appartenant au même triangle d'inflexion, un autre point de leur (A) et son harmoniquement conjugué, on aura un faisceau de cubiques harmoniques, qui se touchent dans ce dernier point **).

13. *Paramètres sur* C_e. $c' \equiv -\varepsilon^2 a - 2\varepsilon^2\gamma$, $c \equiv \varepsilon a + 2\varepsilon(1-\varepsilon)\gamma$, $a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma$, $a'_1 \equiv \varepsilon^2 a + (\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_2 \equiv -a + (2-\varepsilon^2)\gamma$, $c \equiv \varepsilon a + 2(1-\varepsilon)\gamma$, d'où la condition $6\gamma\varepsilon \equiv 0$. En outre $2a \equiv -(3+2\varepsilon)\gamma \equiv -(1-2\varepsilon^2)\gamma$. En posant $\gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{6}$ les valeurs $m \equiv n \equiv 0 \bmod 2$ sont à exclure. Je passe sur les diverses combinaisons des paramètres, en n'énonçant que la construction de Q^2 pour C_e donnée:

On prend un point d'inflexion r, *un point de premier conctact comme* d_1, *deux points de* 2ième *contact qui en sont dérivés, comme* a', c. Le sens de la correspondance étant établi, on prend deux points de 2ième contact provenant de r' et alignés avec r'', comme $a\,a'_2$, en égard à ce que a'_3 est le 2ième transformé de a'. Ensuite $b\,a'_1$ seront deux points de 2ième contact, provenant de r'' et alignés avec r'.

Il y a donc 9. 3. 4 Q^2 de notre espèce pour C_e donnée.

Les 12 points de 2ième contact sont les 2 sextuples: $a'\,a'_1\,a'_2\,c$ $(a'a, a'_2 r)$, $(c'c, a'_1 r)$ et a $(a'_1\,a'_2, ab)$, b, $(c'a'_1\,a'_1 c)$, $(ca, a'_2\,a')$, $(a'_1\,a, a'_2\,b)$.

14. En désignant les points $(a'a, a'_2 d_1)$, $(c'c, a'_1 d_1)$, $(ac, a'_2 a')$, $(a'c', a'_1 c)$, $(a'_1 a'_2, ab)$, $(a'_1\,a, a'_2 b)$ par $\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \gamma', \zeta, \zeta'$ on peut écrire les 16 alinéations:

$a'b\gamma'$, $ac\gamma$, $a'_1 a'_2 \zeta$, $\alpha_1\alpha_2\zeta'$ passant par δ'

$$\left.\begin{array}{lll} a'a\alpha_1 \text{ et } a'_1 c\gamma' & ; & a'_2 b\zeta' \text{ et } \gamma\alpha_2\zeta \\ a'a'_1\alpha_2 \text{ et } a'_2 c\alpha_1 & ; & \gamma\gamma'\zeta' \text{ et } ab\zeta \\ a'a'_2\gamma \text{ et } bc\alpha_2 & ; & aa'_1\zeta' \text{ et } \alpha_1\gamma'\zeta \end{array}\right\} \text{se coupant sur } r'r''d_1 .$$

Chacune des 16 alinéations est étrange à 6 autres. Trois de ces droites convergent soit avec elle soit à deux sur la droite polaire $r'r''$, et pour certaines des 16 alinéations les autres trois convergent de même vers un point du plan. C'est ce qui conduit à de nouveaux points, savoir:

$a'_1 c\gamma'$, $a'a'_2 r$, $ab\zeta$	etr. à	$\alpha_1\alpha_2\zeta'$	concourent en	δ''
$a'_1 a\zeta'$, $a'_2 c\alpha_1$, $\gamma\alpha_2\zeta$	etr. à	$a'\gamma' b$	en	δ
$a'_1 a'\alpha_2$, $a'_2 b\zeta'$, $\alpha_1\gamma'\zeta$	etr. à	$ac\gamma$	en	δ'
$a'a\alpha_1$, $bc\alpha_2$, $\gamma\gamma'\zeta'$	etr. à	$a'_1 a'_2\zeta$	en	δ''

*) Trois homographies de l'indice 4 se concluent de là; deux sont S, P, la troisième est a'_1 en a'_2 en c en a, b en a soit V. Pour chacune des trois Q^2 deux homographies jouent le rôle de S et P.

**) Une base plus générale d'un tel faisceau, qu'on pourrait nommer «*panharmonique*», se trouve, en considérant quelque autre cubique du faisceau dans le texte. Celle-ci est anallagmatique pour Q_3^3.

En supprimant les 4 alinéations qu'on a écrites séparément à droite les autres constituent une configuration $(4, 3)_4$ savoir des points de 2ième contact et δ'', δ, δ', δ''.

Mais $\delta\delta'\delta''$ sont alignés selon le § 12 dans l'axe d'homologie de δ' et celle-ci passe par δ'', il existe donc la droite $\delta\delta'\delta''\delta'$. Par conséquent:

Les 16 alinéations forment avec $\delta''\delta\delta'\delta''$ et δ' une configuration $(4, 4)_{17}$: de 17 points et 17 droites, composée d'alinéations et convergences 4 à 4.

Les 4 alinéations distinguées des autres, dont on vient de parler, sont celles, qui passent par le sommet de la Hessienne situé sur la droite polaire $r'r'd_1$. Donc évidemment:

La C_e de notre Q^2 a δ' comme sommet du triangle Hessien.

Cela convient avec le résultat, que $a'\gamma'\delta'b$ et $c\gamma\delta a$ sont deux quadruples équianharmoniques. Ici on tombe sur cette autre relation, que $a'_1 a'_2 \delta'\zeta$ est équianharmonique et on conclut ces deux théorèmes:

Si sur une C_h existe une (A) tangentielle, les trois droites d'alinéation de chacun de ses points formant avec la tangente un quadruple équianharmonique. Ou:

Dans chaque alinéation d'une (A) tangentielle sur C_h forment les 3 points alignés et le point d'intersection avec la seconde droite satellite un quadruple équianharmonique.

Je reviens à la considération des 12 points de 2ième contact sur C_e. Les quadruples contangentiels sont:

$$a'c\xi\xi' \quad , \quad aa'_2\alpha_2\gamma' \quad , \quad ba'_1\alpha_1\gamma \ .$$

Sont alignés avec

$$\begin{array}{llllll} r: & a'c\ , & \zeta\zeta'\ ; & a\gamma'\ , & a'_2\alpha_2\ ; & b\gamma\ , \quad a'_1\alpha_1\ , \\ r': & a'\zeta'\ , & c\zeta\ ; & & & ba'_1\ , \quad \alpha_1\gamma \\ r'': & a'\zeta\ , & c\zeta'\ ; & aa'_2\ , & \alpha_2\gamma'\ ; & \\ d_1: & & & aa_2\ , & a'_2\gamma'\ ; & ba_1\ , \quad a'_1\gamma\ . \end{array} \tag{3}$$

Je fais usage du théorème de n. 13 et j'obtiens les convergences:

$$\begin{array}{llll} ba'_1\ , aa'_2\ , a'c\ (d_2)\ ; & a'\zeta\ , ba_1\ , a'_2\alpha_2\ (\psi')\ ; & b\gamma\ , aa_2\ , a'\zeta'\ (\chi') \\ \alpha_1\gamma\ , \alpha_2\gamma'\ , a'c\ (\xi)\ ; & c\zeta'\ , a'_1\gamma\ , a'_2\alpha_2\ (\psi'')\ ; & a'_2\gamma'\ , c\zeta\ , b\gamma\ (\chi'') \\ ba'_1\ , \alpha_1\gamma'\ , \zeta\zeta'\ (\xi')\ ; & a'\zeta\ , a'_1\gamma\ , a\gamma'\ (\psi''')\ ; & aa_2\ , c\zeta\ , a'_1\alpha_1\ (\chi''') \\ \alpha_1\gamma\ , aa'_2\ , \zeta\zeta'\ (\xi'')\ ; & c\zeta'\ , ba_1\ , a\gamma'\ (\psi)\ ; & a'\zeta'\ , a'_2\gamma'\ , a'_1\alpha_1\ (\chi)\ . \end{array} \tag{4}$$

Les deux triangles $ba'_1\gamma$, $ca'\zeta$ sont homologiques au centre γ', donc $(a'c, ba'_1)$ $(c\zeta', a'\gamma)$ $(a'\zeta', b\gamma)$, c'est-à-dire $d_2\psi''\chi'$ sont alignés. De cette manière on trouve les 16 suivantes alinéations:

$$\begin{array}{llll} d_2\psi'\chi'''\ (M)\ ; & \xi\psi'\chi''\ (N)\ ; & \xi'\psi'\chi''\ (P)\ ; & \xi''\psi'\chi'\ (Q) \\ d_2\psi''\chi'\ (M')\ ; & \xi\psi'\chi\ (N')\ ; & \xi'\psi''\chi\ (P')\ ; & \xi''\psi''\chi'''\ (Q') \\ d_2\psi'''\chi''\ (M'')\ ; & \xi\psi'''\chi'''\ (N'')\ ; & \xi'\psi'''\chi'\ (P'')\ ; & \xi''\psi'''\chi\ (Q'') \\ d_2\psi\chi\ (M''')\ ; & \xi\psi\chi'\ (N''')\ ; & \xi'\psi\chi'''\ (P''')\ ; & \xi''\psi\chi''\ (Q'''). \end{array} \tag{5}$$

*) C'est par une propriété communiquée au § 4, qu'on conclut cette dernière convergence.

Les points $d_2\xi\chi\psi$ *forment donc elles-même une configuration* $(3, 4)_4$ *comme les points de contact sur* C_2.

On voit, que pour chacune des 16 droites existent trois triangles, qui deux à deux possèdent la droite comme axe d'homologie, les trois centres sont alignés et ainsi à chacune des 16 droites une autre est conjuguée; p. e. pour (M) les triangles sont $ba'\alpha_1$, $ca'\zeta$, $aa'_2\alpha_2$ et les centres $\gamma\gamma'\zeta'$.

On obtient de cette façon 16 configurations $(4, 3)_4$ qui appartiennent d'une part à la configuration $(3, 4)_4$ originaire, d'autre part à la supplémentaire. Je termine par observer qu'entre les droites des deux $(3, 4)_4$ subsiste une correspondance, que voici:

(M)	$\gamma\gamma'\zeta'$	;	(N)	$a'_2b\zeta'$	;	(P)	$ac\gamma$	;	(Q)	$ac\gamma$
(M')	$\alpha_1\gamma'\zeta$	;	(N')	$a'_2a'_1\zeta$	;	(P')	$aa'\alpha_1$	;	(Q')	$c'a'\gamma'$
(M'')	$\alpha_1\alpha_2\zeta'$	;	(N'')	$aa'_1\zeta'$	;	(P'')	$a'_2c\alpha_1$	;	(Q'')	$c'\alpha_2c$
(M''')	$\gamma\alpha_2\zeta$	;	(N''')	$ab\zeta$	;	(P''')	$a'_2a'\gamma$	;	(Q''')	$a'_1\alpha_2a'$

À chacun des 12 points $d_2\xi\chi\psi$ s'adjoint un quadrilatère complet de la configuration sur C_2.

15. En outre des homographies déjà traitées se trouve maintenant une de l'indice 3 a' en a'_1 en a, c en a'_2 en c', ∂' en ∂'' en d_2 (P_3).

L'homographie, qui existe sur $a'c$ entre les points et leurs 3ièmes transformés est la même que celle entre les points et leurs transformés dans P_3.

[Je finis cette recherche par citer quelques exemples pour la composition de P_3 avec Q^2:

Q^2P_3 donne $a'a'_1$, ba', cc accouplés et a' en a, b en a'_1, a'_2 en a'_2. De là il s'ensuit, que ca, ca' et cb, ca'_1 déterminent une involution, dont ca'_2 est un point double.

$Q^2P_3^{-1}$ donne aa, ba'_1, ca'_2 accouplés et a'_1 en c, a'_2 en b, a' eu a'.
Q^2P_3 donne ba'_1, ca', a'_2a accouplés et a' en b, a'_1 en a'_2, a en c.
$Q^2P_3^{-1}$ donne ba, ca'_1, a'_2a' accouplés et a en a'_2, a'_1 en b, a' en c.]

§ 27. — La transformation (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en c. Indice 18.

Droite	C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_7	C_8	C_7	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_2	Droite
a'	1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1					
a'_1		1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1				
a'_2			1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1			
a'_3				1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1		
c					1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1	
b'	1	1	1	2	2	2	3	2	3	2	2	2	1	1	1		1	
c'	1		1	1	1	2	2	2	3	2	3	2	2	2	1	1	1	

1. Les deux premières transformations sont

Q_2^2. Indice 9, cb', $c'a'$, $a'_3a'_1$ accouplés, c en a'_2 en a', a'_3 en a_1, c' en b'

Q_3^3. Indice 6, c^2a^2, $b'c'$, $c'a'_2$, a'_2b', $a'_3a'_1$ accouplés, a'_3 en a', a'_1 en c.

2. Les homographies directives donnent les conditions

(ba', aa'_1), (ba'_1, aa'_2), (ba'_2, aa'_3), (ba'_3, ac), $(bc, b'a')$ sont alignés sur σ.

$(aa'_1, a'a'_2)$, $(aa'_2, a'a'_3)$, (aa'_3, ac) sont dans une conique D_a par c' et tangente à $a'a'_1$, ac en a', a,

$(ca'_2, c'a'_1)$, $(ca'_1, c'a'_2)$, $(ca', c'a'_1)$ sont dans une conique D_c par b' et tangente à ca'_3, $c'a'$ en c, c'.

Il est remarquable, que σ transformée vers Σ ou Σ' se change en D_c ou D_a.

[3. D'autres relations sont à tirer de l'existence de $Q_2^{(2)}$.

(a'_3c', a'_1b'), (a'_3c, a'_1a'), $(a'_3a', a'_1a'_2)$, $(a'_3a'_2, a'_1c)$, (a'_3b', a'_1c') sont alignés sur τ.

$Q_2^{(2)}$ aura 4 points doubles (comp. § 19), savoir d_1d_2 de Q^2 et i_1i_2. Deux d'entre eux doivent se trouver sur $a'_3a'_1$. Ils ne sont i_1i_2, parceque autrement τ et σ seraient identiques, ce qui est impossible, ni d_1d_2, parceque σ devrait coincider avec $a'_3a'_1$, ce qui est encore impossible. Donc:

La droite $a'_3a'_1$ *contient* d_2i_2, *la droite* (a'_3c', a'_1b'), (a'_3b', a'_1c') *contient* d_1i_1].

4. L'application du théorème du § 9 donne les homographies:

c en c' en b' en a' et a'_3 en a'_1; c en c' en b' en a' et a'_2 en a'_2, a'_1 en a'_3; c en c' en b' en a' en a'_2.

a'_1 en a'_1; a'_2 en c en c' en b' en a', a'_3 en a'_3; c en c' en b' en a', a'_1 en d_1 en a'_3; et par Q_2^2;

a' en c' en a'_1 en a'_3 en b' en c; b' en c en a' en c', a'_1 en a'_3, a'_2 en a'_2. a'_1 en a'_3, a' en c' en a',

a'_2 en b' en c; a'_1 en a'_3, c en b' en c, a' en c' en a'_2; a'_2 en a'_1 en a'_3 en a' en c', b' en c.

Q_3^3 fournit par un théorème déjà cité:

b' en c' en a'_2 en b', c en a', a'_3 en a'_1

une homographie d'indice 3. On remarque aussi, que $(a'a, a'_3c')$ (cc', a'_1b') a'_2 sont alignés].

5. *Recherche des* C_3 *et* F. Par la caractéristique passe un réseau de C_3 propres. Car trois de ses points ne peuvent pas être alignés. $(a'abca'_2)^2$ se transforme de part et d'autre en $a'_1a'_3$, elles forment ensemble une C_3 anallagmatique. Les points de rencontre sont à chercher parmi d_2i_2 (voir n. 3) et il est évident, *que droite et conique se touchent en* d_2 *).

Les courbes d'un faisceau F_1 se touchent en d_2. Ce sommet absorbe 4 points doubles du faisceau, ainsi on démontre que de même que 1, 2, 18 aussi l'indice 9 est impossible. Donc certainement *toutes les cubiques sont équianharmoniques*, *il n'y a que* 4 C_3^3. *Une d'elles est invariable et l'indice de* F_1 *est 3.*

Le point double d_1 de C_3^3 détermine F_2, dont toutes les courbes s'y touchent. L'autre C_3 fixe n'est plus rationelle manque de points doubles de $Q^{(2)}$, ni décomposée, comme on démontre en envisageant la caractéristique, elle est donc équianharmonique avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Le faisceau possède 9 autres C_3^4 qui ne peuvent pas se distribuer sur des C_3^3, donc les indices 3 et 6 ne sont pas admissibles et il reste l'indice 9.

Un faisceau F_3 est constitué par $a'_1a'_3 + (a'acca'_2)^2$ et C_c. Elles se coupent en i_1i_2, évidemment. Les 9 C_3^4 restantes conduisent comme tout-à-l'heure pour F_2 à l'indice 9.

*) Aussi sans récourir au n. 3 on arriverait à ce résultat.

Les indices sur C_3^3 et sur la C_3 décomposée détermine-t-on maintenant comme égaux à 18.

Le lieu des nonuples est représenté par la courbe Hessienne du réseau, est donc du 6ième ordre et passe deux fois par toute la caractéristique. Elle porte 2 points doubles et un triple périodique.

6. *Paramètres sur* C_e. $a'_3 \equiv -\varepsilon a'_2 + \gamma$, $c \equiv \varepsilon^2 a'_2 + (1-\varepsilon)\gamma$, $c' \equiv -a'_2 + (2\varepsilon^2 - 1)\gamma$, $b' \equiv \varepsilon a'_2 + (\varepsilon - 4)\gamma$, $a' \equiv -\varepsilon^2 a'_2 + (5\varepsilon - 1)\gamma$, $a'_1 \equiv a'_2 - 6\varepsilon^2\gamma$, $a'_2 \equiv -\varepsilon a'_2 + 7\gamma$. Cela donne les conditions $9(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma = 0$ et $a'_2 \equiv -7\varepsilon\gamma$, et $\gamma \equiv \dfrac{(2n-m)k_1 + (n-2m)k_2}{27}$.

À chaque correspondance admissible appartient une seule Q^2. Les points de la caractéristique et d_1 sont tels points, qui sont alignés avec leurs 2ième et 5ième tangentiels, appartiennent partant à des nonuples tangentiels, qui forment des configurations $(3, 3)_9$ (C).

La droite $a'c$ rencontre C_e en $-4\varepsilon\gamma$, la droite $a'_1 a'_3$ en $8\varepsilon\gamma$, ab en $-13\varepsilon\gamma$. Les droites $a'a'_3$, ca'_1 se coupent en $2\varepsilon\gamma$. C_e passe en outre par $(a'a, c'c) \equiv 5\varepsilon\gamma$ et $(aa'_1, ba'_3) - (7\varepsilon^2 - 2)\gamma$.

Les points a'_1, a'_3 sont les tangentiels de a', c, donc:

Les points a', c, $(a'a'_3, ca'_1)$ *forment un triple conjugué de* C_e; *de même* a'_1, a'_3, $2\gamma\varepsilon$ *et* a, a'_2, b.

En comparant avec n. 4 on voit, que l'homographie, qui s'y trouvait, est celle, qui reproduit les triples tout-à-l'heure écrites. La différence $a' - c$ est $6(1-\varepsilon^2)\gamma$.

Les valeurs de γ, où $2n - m \equiv n - 2m \equiv 0$ mod. 3 sont à exclure, $a'_1 a'_3$ coupant alors C_e en d_1, ce qui est impossible. Il y a 2. 9. 9 Q^2 pour C_e donnée.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

7. Il importe d'observer, ce qui ressort de la comparaison des paramètres, *que toute transformation périodique de l'espèce traitée au* § 11. II. *peut se concevoir comme transformation successive d'une* Q^2 *de l'indice 18 et de la présente espèce.*

§ 28. — La transformation (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en c. Indice 30.

Droite	C_2	C_3	C_3	C_4	C_5	C_7	C_8	C_{10}	C_{11}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{16}	C_{17}
a'	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	6
a'_1		1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6
a'_2			1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6
a'_3				1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6
a'_4					1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6
c						1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
b'	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
c'	1		1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6

Droite	C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_7	C_8	C_{10}	C_{11}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{16}
a'						1	1	2	2	3	4	4	5	5
a'_1					1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
a'_2				1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6
a'_3			1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6
a'_4		1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6
c	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6
b'	1		1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5
c'	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6

1. Les deux premières transformations sont

Q_2^2: Indice 15, $a'_4 a'_1$, $c'a'$, cb' accouplés, a'_1 en a'_3 en c, a' en a'_2 en a'_4, b' en c'.

Q_3^3: Indice 10, $a'^2 c^2$, $a'_1 a'_4$, $a'_2 c'$, $b'a'_3$, $c'b'$ accouplés, a'_1 en a'_4, a'_2 en c, a' en a'_3.

2. Les homographies directives fournissent:

$(ba', b'a'_1)$, $(ba'_1, b'a'_2)$, $(ba'_2, b'a'_3)$, $(ba'_3, b'a'_4)$, $(ba'_4, b'c)$, $(bc, b'a')$ sont alignés avec $d_1 d_2$, $(ca', c'a'_1)$, $(ca'_1, c'a'_2)$, $(ca'_2, c'a'_3)$, $(ca'_3, c'a'_4)$ sont dans D^2_c par b' et tangente à ca'_4, $c'a'$ en c, c', $(aa'_1, a'a'_2)$, $(aa'_2, a'a'_3)$, $(aa'_3, a'a'_4)$, $(aa'_4, a'c)$ sont dans D^2_a par c' et tangente à ac, $a'a'_1$ en a, a'.

Analoguement au § 12 les D^2 permettent à établir un nombre d'alinéations et convergences.

[3. Quelques homographies ternaires: a'_2 en c' en b' en a'_3, a' en c, a'_1 en a'_4 (par Q_3);

c en b', c' en a' en a'_4 en a'_1, a'_2 en a'_2; a'_4 en a'_1 en c en b', a'_3 en a'_3, c' en a';
a'_4 en a'_1 en c' en a', c en b' en a'_3; c en c' en b' en a' en c', a'_1 en a'_1;
c en c' en b' en a', a'_1 en a'_3, a'_2 en a'_2; c en c' en b' en a', a'_2 en a'_4, a'_3 en a'_3.]

4. Les 8 points constituent la base d'un faisceau F de C_3 propres, toute alinéation étant inadmissible. Le 9ième sommet soit d_1. Les cubiques de F ne se transforment pas à l'indice 30 ou 15, comme autrement toutes les C_3^4 seraient absorbées par les C_3 fixes, ce qui est impossible. À raison de ce que la base renferme d_1, les indices 1, 2, 3, 6 sont aussi inadmissibles. Reste donc l'*indice 5. Toutes les* C_3 *sont équianharmoniques, toutes les* C_3 *rationnelles sont* C_3^3, *une d'elles reste fixe, l'autre* C_3 *invariable est* C_e *avec* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. L'indice sur C_3^3 se trouve égal à 30.

5. *Paramètres sur* C_e. $a'_2 \equiv -\varepsilon a'_1 + \gamma$, $a'_3 \equiv \varepsilon^2 a'_1 + (1-\varepsilon)\gamma$, $a'_4 \equiv -a'_1 - 2\varepsilon\gamma$. $c \equiv \varepsilon a'_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma$, $c' \equiv -\varepsilon^2 a'_1 + (\varepsilon^2 - 3)\gamma$, $b' \equiv a'_1 + 3(\varepsilon - 1)\gamma$, $a' \equiv -\varepsilon a'_1 + (5\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $a'_1 \equiv \varepsilon^2 a'_1 + (2 - 5\varepsilon^2)\gamma$. De là les conditions $a'_1(1-\varepsilon^2) \equiv (2-5\varepsilon^2)\gamma$ et $2a'_1 \equiv (3-8\varepsilon)\gamma$ ou $15\gamma \equiv 0$ et $a'_1 \equiv 2(2\varepsilon^2 - 1)\gamma$, $a'_2 \equiv (2\varepsilon - 3)\gamma$, $a'_3 \equiv (2\varepsilon - 3\varepsilon^2)\gamma$, $a'_4 \equiv (4 - 2\varepsilon^2)\gamma$, $c \equiv (3 - 4\varepsilon)\gamma$, $c' \equiv (6\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma$, $b' \equiv (6 - \varepsilon)\gamma$, $a' \equiv (3\varepsilon^2 - 4\varepsilon)\gamma$.

Pour achever le sextuple $a'a'_1a'_2a'_3a'_4c$ la C_e doit toucher $a'a$ en a', $c'c$ en c, donc a'_1a' en a'_1 et a'_4c en a'_4.

Le point (aa'_1, ba'_4) est d'inflexion sur C_e. Le point aligné avec lui et a' est le tangentiel de a. Les droites $a'_2a'_3$, ab se coupent sur C_e en un point, qui avec a, b, $(a'c', ac)$, (aa'_1, ba'_4) entre en un sextuple périodique.

Tous les points de la caractéristique font partie de quadruples tangentiels. Il y a, C_e étant donnée, 216 correspondances admissibles et le même nombre de Q^2.

Paramètres sur C_3^3. Voir § 34.

6. En comparant les paramètres ou aussi par un autre raisonnement on démontre, que *toute transformation périodique de l'espèce traitée au* § 15 *peut être conçue comme transformation successive d'une* Q^2 *de la présente espèce.*

Avertissement. Pour avoir une expression analytique des transformations quadratiques, que je viens de rechercher dans les § 25-28 on peut disposer des points a, b en les faisant coincider avec les ombilics du plan.

§ 29. — Construction des transformations (ab'), (bc'), a' en a'_1 en . . . $a'_m \equiv c$ moyennant les réseaux de transformations quadratiques.

Tandis que dans les §§ antérieurs, les caractéristiques étant supposées connues, on a fait usage des simples conditions représentées par la caractéristique, pour en déduire d'autres plus cachées et pénétrer ainsi de manières variées jusqu'à la construction *), le problème sera maintenant autrement posé. Semblablement au § 24 la périodicité dépend de la variabilité d'un seul intercalaire. Donc:

Les points principaux a'b'c'c *étant donnés on demande à construire le point* a'_1 *qui jette* a'_m *sur le point* c. *Plus généralement il s'agira de l'affinité entre* $a'_1 - a'_m$.

Aux droites du système a'_m correspondent les courbes Ψ d'un réseau de a'_1 et je me servirai des trois constituantes, qui correspondent aux droites $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ pour rechercher les singularités des courbes Ψ.

$$[a'_2 - a'_1] \qquad \left.\begin{matrix} b'a' & b'a' + ac + bc \\ b'c' & b'c' + ab + ac \end{matrix}\right\} ac + B_2 .$$

Les B_2 touchent en a, b les droites $a'a$, $c'c$.

$$\left.\begin{matrix} c'b' & c'b' + ac + ab \\ c'a' & c'a' + cb + ab \end{matrix}\right\} ab + C_2 .$$

Les C_2 passent en c et $(a'c', ac) \equiv \delta$ et touchent en c' la droite $b'c'$.

$$\left.\begin{matrix} a'b' & a'b' + bc + ac \\ a'c' & a'c' + bc + ab \end{matrix}\right\} bc + A_2 .$$

*) [Je pourrais ajouter: jusqu'aux formules analytiques].

Les A_2 passent en a' et δ et touchent en b' la droite $b'c'$.

Donc: *Aux droites du système* a'_2 *correspondent les cubiques, qui passent en* c, *et touchent en* (ab'), (bc') *les droites* b'c', c'c.

L'affinité $[a'_2 - a'_1]$ *est* (1, 3). *Il y a trois points* a'_1, *qui font* $a'_2 = c$, *toutefois l'un d'eux est* δ. *Les deux autres sont situés dans la droite* (a'c, ab)δ *et sont imaginaires, si* a'a c'c *sont réels. Je les désignerai par* $(c)_2$ *).

$$[a'_3 - a'_1] \qquad \left.\begin{array}{l} b'a' + ac + B_2(ac) + ab + C_2(bc) \\ b'c' + 2ab + ac + ac + B_2(ac) \end{array}\right\} ac + ab + B_2(ac) + B_3 .$$

C_2 (bc) touche en c la droite $a'c$. Donc:

Les B_3 *passent par* c, δ, *ont en* b' *un contact triponctuel avec* b'a' *et en* c' *un contact quadriponctuel entre elles et biponctuel avec* c'b'.

La courbe B_3 (ac) touche en δ la droite $a'c'$ **) et en c la droite $c'c$.

$$\begin{array}{ll} c'b' & c'b' + ac + B_2(ac) + 2ab + ac \\ c'a' & c'a' + ab + C_2(bc) + 2ab + ac \end{array}\Bigg\} 3ab + ac + C_3 .$$

B_2 (ac) passe par δ, y étant tangente à $\delta\varepsilon$, où $\varepsilon = (a'c, ab)$, donc:

Les C_3 *passent par* c, δ^2, *touchent en* c' *la droite* c'c *et passent enfin par* $(c)_2$.

La courbe C_3 (bc) se décompose en $bc + 2$ droites par δ et $(c)_2$.

$$\begin{array}{ll} a'b' & a'b' + ac + B_2(ac) + ab + C_2(bc) \\ a'c' & a'c' + ab + C_2(bc) + 2ab + ac \end{array}\Bigg\} ab + ac + C_2(bc) + A_2 .$$

Les A_3 *passent par* a'_1 δ, *ont en* c' *un contact triponctuel entre elles et biponctuel avec* c'c, *en* a *un point double.*

A_3 $(a'c)$ touche en a' la droite $a'c$ et passe par c.

Par composition des 3 faisceaux constituantes se déduit:

Aux droites du système a'_3 *correspondent des courbes* Ψ_5, *qui passent par* c, δ^2, b'^2, $(c)_2$, c'^2: *ayant en* c' *un contact triponctuel avec* c'c *et un contact quadriponctuel avec* bc.

L'affinité $[a'_3 - a'_1]$ *est* (1, 5). *Il y a* 4 *points* $(c)_4$, *qui jettent* a'_3 *sur* c ***).

$$[a'_4 - a'_1] \qquad \left.\begin{array}{ll} b'a' & b'a' + 2ab + C_3(bc) + B_2(ac) + B_3(ac) \\ b'c' & b'c' + 2ab + ac + 2B_2(ac) + B_3(ac) \end{array}\right\} 2ab + B_2(ac) + B_3(ac) + B_4 .$$

Les B_4 *passent par* δ^2, $(c)_2$, c *ont en* b' *un contact quadriponctuel avec* b'a', *en* c' *un contact triponctuel avec* c'c *et passent en outre par 2 certains points sur* b'c'.

B_4 (ac) touche $a'c$ en c et $a'c'$ en δ.

$$\begin{array}{ll} c'a' & c'a' + 2ab + C_3(bc) + B_2(ac) + 2ab + ac \\ c'b' & c'b' + B_2(ac) + B_3(ac) + B_2(ac) + 2ab + ac \end{array}\Bigg\} 3ab + ac + B_2(ac) + C_5 .$$

*) Les conclusions du § 26, 4 donne une détermination plus complète de ces points, qui du reste pourrait aussi se déduire, en poursuivant les déductions du texte.

**) On devrait exposer la génération projective des courbes B etc. (comme § 24) afin de trouver les déterminations particulières des $B(ac)$, $C(bc)$, $A(a'c)$. Un raisonnement direct, qui conduirait au but, exige l'usage des transformations exceptionnelles.

***) L'application de $C_3(bc)$ réduit ce problème biquadratique savoir: à trouver les points $(c)_4$ à deux problèmes quadratiques. Cela convient à celui, qu'on trouve énoncé aux § 26, n. 8.

Les C_5 *passent par* $(c)_4$ $(c)_2$, *par* δ^2 *avec 2 tangentes fixes, dont l'une* a'c' *est d'inflexion, par* b', *avec les tangentes* b'c', b'c; *par* c'^2 *avec 2 tangentes fixes* c'c *et* c'b' *et une osculation d'entre elles.*

C_5 (bc) se décompose en bc et une C_4 par c.

$$\left.\begin{array}{ll} a'b' & a'b' + B_2(ac) + B_3(ac) + 2ab + C_3(bc) \\ a'c' & a'c' + B_2(ac) + ac + 4ab + C_3(bc) \end{array}\right\} B_2(ac) + C_3(bc) + 2ab + A_4 .$$

Les A_4 *passent par* a', c *ont en* δ *un contact triponctuel entre elles et biponctuel avec* a'c', *un point double en* b' *où les tangentes coincident avec* b'a', *en* c' *un contact 5-ponctuel entre elles et biponctuel avec* b'c'.

A_4 $(a'c)$ touche en a' la droite $a'b'$ et a en c un contact triponctuel avec ca'.

Aux droites du système a'_4 *correspondent des courbes* Ψ *du* 7ième *ordre par* c^2, *y touchant* cc', *par* $(c)_2$, $(c)_4$, *par* $(a'c', ac)^3$, *où une tangente est* a'c', *par* b' *avec un tacnode, qui ayant* b'c' *comme tangente, compte pour 8 points d'intersection, par* c'^2 *avec 2 tangentes fixes* c'c, c'b' *et une osculation d'entre elles, par 2 points sur* b'c', *qui appartiennent aussi à* B_4 (ac).

L'affinité $[a'_4 — a'_1]$ *est* (1,8). *Il y a 6 points* a'_1 *qui jettent* a'_4 *sur* c, *parceque deux impropres tombent sur* (a'c', ac) *etc. Je les désignerai par* $(c)_6$.

$$[a'_5 — a'_1] \quad \left.\begin{array}{ll} b'a & b'a' + ab + ac + C_5(bc) + B_3(ac) + B_4(ac) \\ b'c' & b'c' + ab + ac + B_2(ac) + B_3(ac) + B_3(ac) + B_4(ac) \end{array}\right\} \ldots + ab + ac + B_6 .$$

Les B_6 *passent par* $(c)_4$, $(c)_2$, c: *tangente* cc', δ^2 *avec deux tangentes fixes, dont l'une est* a'c', *par* b'^2: *tangentes* b'a', b'c' *et deux hyperosculations entre elles, par* c'^2: *tangentes* c'b', c'c *et une osculation entre elles.*

$$\left.\begin{array}{ll} c'a' & c'a' + ab + ac + C_5(bc) + b'c' + ac + B_2(ac) + B_3(ac) \\ c'b' & c'b' + B_3(ac) + B_4(ac) + b'c' + ac + B_2(ac) + B_3(ac) \end{array}\right\} \ldots + ab + C_7 .$$

Les C_7 *passent par* δ^3 *avec trois tangentes fixes dont deux coincident avec* a'c', *ces branches y ayant une hyperosculation, par* b'^2, *par* $(c)_6$, $(c)_4$, $(c)_2$, *par* c^2 *avec une osculation des deux branches vers* cc', ca', *par* c'^2: *tangentes* c'b', c'c *et osculation entre elles.*

C_7 (bc) se décompose en bc et une courbe C_6.

$$\left.\begin{array}{ll} a'b' & a'b' + B_3(ac) + B_4(ac) + ab + ac + C_5(bc) \\ a'c' & a'c' + B_3(ac) + B_2(ac) + ac + ab + ab + ac + C_5(bc) \end{array}\right\} \ldots + B_3(ac) + A_5 .$$

Les A_5 *passent par* a', c, δ^2 *avec deux tangentes fixes et une osculation mutuelle le long de* a'c', *par* b'^2 *avec un tacnode et la tangente* b'a', *par* $(c)_2$, c': *contact quadriponctuel avec* B_4 (ac) *et par 2 certains points sur* b'c'.

A_5 $(a'c)$ touche cc' en c.

Par composition:

Aux droites du système a'_5 *correspondent des courbes* Ψ *du* 10ième *ordre qui passent par* $(c)_2^2$, $(c)_4$, $(c)_6$, *par* c^2: *deux osculations vers* cc', ca', *par* δ^4: *deux tangentes coincidant avec* a'c', *y ayant 28 points d'intersection,* b'^3: *une tangente coincidant avec* b'a.

14 *points d'intersection, par* c^3: 3 *tangentes fixes et* 22 *points d'intersection, par* 2 *points sur* b'c'.

L'affinité $[a'_5 - a'_1]$ *est* (1, 12). *Il y a* 8 *points* a'_1 *qui jettent* a'_5 *sur* c.

Ce procédé d'établir les affinités $[a'_n - a'_1]$ se continuerait jusqu'à une valeur arbitraire de n et on établirait de la sorte effectivement des transformations du plan douées des caractéristiques (ab'), (bc'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_n = c$.

La question, comment à la valeur de $n = 6$ le changement de périodicité de la transformation en aperiodicité se fasse, sera résolue dans la IVième partie.

Remarque. Aux 24 suites qu'on peut former des 4 points donnés, correspondent 24 groupes de 4, 6, 10 points (c), qui peut-être coincident en partie comme pour $n = 2$. Ils forment ensemble certainement des covariants du quadrangle.

§ 30. — Les transformations (aa), (bb), c' en $c_1 \ldots$ en $c_m = c$ et (ab'), (ba'), c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$.

I. (aa'), (bb'), c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$.

1. Les faisceaux a et b se reproduisent et doivent donc être en homographie périodique. Étant connues les paires ac, ab' et ab, ac', il s'agit de compléter une homographie, dont on a donné trois éléments successifs d'une chaîne, laquelle construction se peut faire p. e. à l'aide des méthodes dans K 4.

Lorsque les indices de a et b sont m', m_1, le plan se produit après N transformations, N étant le plus petit multiple de m', m_1. Les deux paires de rayons doubles se coupent en 4 points doubles. Le point c vient après N — 3 transformations en c de manière que resp. m', m_1 intercalaires tombent sur a, b, si m', m'_1 sont différents.

Pour trouver le nombre des transformations de cette classe, qui ont le même indice N, on doit chercher toutes les paires m, m_1, qui n'étant pas 3 ont N pour plus petit multiple; on trouve en multipliant le nombre établi au § 1, I, partie par 3:

Il y a $\frac{1}{4}\varphi_n^{(2)}$ *telles transformations de l'indice* n, *si*

$$\varphi_n^{(2)} = n^2\left(1 - \frac{1}{f_1^2}\right).\left(1 - \frac{1}{f_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{f_n^2}\right).$$

2. Pour $m = m_1$ soient δ, δ deux certains points doubles (qui dans la suite seront définis), alors on aura $a(pp'\delta\delta) = b(pp\delta\delta)$, donc $ab\,pp'\delta\delta'$ sont dans une conique (pp' étant correspondants).

Toute conique par $ab\,\delta\delta'$ est anallagmatique et ses points se rangent en des chaînes à m points, dont les points doubles sont $\delta\delta'$. Cette relation n'existe pas pour les 2 autres points doubles.

4. *Transpositions*. α' en β (abd_1) donne une homographie où A, B sont doubles et C en D, en C' existe. Réciproquement une homographie se change par $\mathfrak{T}^2$ en notre Q^2, quand $\mathfrak{T}^2$ possède $d_1 d_2$ de Q^2 comme principaux. Les doubles de Q^2 proviennent du 3ième point double de Q^2, du 3ième point principal a de $\mathfrak{T}^2$ dans E' et des points $d_1 d_2$ eux-mêmes. Ainsi on voit, que les deux points doubles, qui sont fournis par d_3 et a, ont mê-

me rapport anharmonique et il s'explique, pourquoi ces points $(\delta\delta')$ obtiennent une position particulière.

5. Je vais discuter les cas $m' = m'_1 = 3, 4, 5$ indépendamment de l'homographie.

$m = 1$. Indice 3. La droite $c'c$ contient deux points doubles $d_1 d_2$. Les 5 droites anallagmatiques ensemble aux 2 coniques $d_3 d_4 c'ca$ et $d_3 d_4 c'cb$ composent 10 cubiques invariables, qu'on peut combiner à des faisceaux F. Ainsi obtient-on un faisceau à la base $d_1 d_2 d_4$ avec contact en $d_3 d_4$ avec $d_3 a$, $d_4 b$ et un autre à la base $d_2 d_3 d_4$ avec contact en $d_3 d_4$ avec $d_3 b$, $d_4 a$. Le premier, F_1 contient $cc' + d_3 a + d_4 b$, l'autre F_2 contient $c'c' + d_3 b + d_4 a$. Chacune de ces C_3 compte pour 4 C_3^4, toutes les courbes sont anallagmatiques et par suite équianharmoniques. D'autres faisceaux sont $d_3^2 d_4$ ou $d_4^2 d_3$.

Paramètres sur C_e (Indice 3). $a' \equiv \frac{-2\gamma}{1-\varepsilon} + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$, $b' \equiv \frac{-2\gamma}{1-\varepsilon} + \sigma' \frac{k_1 - k_2}{3}$

$c' \equiv -\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\gamma + \mu \frac{k_1 - k_2}{3}$, $c \equiv \frac{1-2\varepsilon^2}{1-\varepsilon}\gamma + \mu' \frac{k_1 - k_2}{3}$ suivant § 4.

De là la condition $(\sigma + \sigma' + \mu)\frac{k_1 - k_2}{3} = 0$. Cela dit: *La correspondance* $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ *est arbitraire; une telle étant choisie, il y a trois caractéristiques.*

$m = 2$. Indice 4. L'homographie a en a, b en b, c'_1 en c'_1, c en c' en c s'ensuit du théorème du § 9. Donc $c'c'_1c$ sont alignés. Les faisceaux $d_3^2 c'c'_1 cab$ et $d_4^2 c'c'_1 cab$ ont l'indice 4 et contiennent les cubiques invariables $d_3 a + d_3 b + c'c'_1 c$ et $d_3 c'_1 + (abc'cd_3)^2$, resp. $d_4 a + d_4 b + c'c'_1 c$ et $d_4 c'_1 + (abcc'd_4)^2$. Droite et conique sont transformées involutivement, d'où l'on conclut l'alinéation $d_3 d_4 c'_1$. Les cubiques de 2 autres F touchent en d_3, d_4 les droites $d_3 a$, $d_4 b$ resp. $d_3 b$, $d_4 a$.

Une cubique anallagmatique propre ne pourrait être que harmonique. Cela fournirait l'alinéation $ac'_1 c$ et donc une forme du § 32.

$m = 3$. Indice 5. La conique $c'c'_1 c'_2 ca$ est évidemment anallagmatique et ne passe point par b. De là on peut conclure: Les points $c'c'_1 c'_2 c$ sont alignés.

Dans tous ces cas on doit ajouter les coniques anallagmatiques $(ab\, d_3 d_4)^2$.

II. (ab'), (ba'), c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$.

1. La droite ac se change en $a'b'$, $b'c'$, $a'c'_1$, $b'c'_2 \ldots$ et pour m pair après la $(m+1)$. transformation en $b'c'_m = ac$, pour m impair en $a'c$. La droite ac' devient $a'c'_1$, $b'c_2, \ldots$ donc après la $(m+1)$ transformation pour m pair $b'b$, pour m impair $a'b'$.

Le faisceau a est donc reproduit après $m+2$ transformations, quand m est pair, et après $2m+4$ transformations quand m est impair. Périodicité à l'indice impair est impossible.

Il importe de remarquer, que la périodicité de Q^2 dépend seulement de ce que c'_m tombe sur c.

$m = 1$, Indice 6. Les points $d_1 d_2$ sont dans $c'c$. Il y a une conique invariable par $abd_1 d_2$. On a $i_1 = (ad_1, bd_2)$, $i_2 = (ad_2, bd_1)$ et que $(ci_1, c'i_2)(ci_2, c'i_1)$ sont situés dans ab. Une C_3^4 anallagmatique n'existe pas.

Les faisceaux F anallagmatiques sont: 2 avec cinq points doubles dans la base, réunis ou en d_1 ou en d_2, 2. avec trois points doubles $d_1 \bar{d}_1 \bar{\bar{d}}_1 i_1 i_2$ et $d_2 \bar{d}_2 \bar{\bar{d}}_2 i_1 i_2$, 2 avec deux points doubles réunis en d_1 ou d_2. Comme à l'extérieur de la droite cc' un seul triple périodique $c, c, (ab, i_1 i_2)$ existe, on a les deux F, dont chacun a des contacts en

c', c et passe par π. *) Désignons ces faisceaux par $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$. Les C_3 anallagmatiques dans F_1 et F_2 sont $c'c + C_2(ab\ d_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2)$ et $C_e^1\ (\pi \bar{c} \bar{c}'\ d_1\ i_1 i_2)$; $c'c + C_2\ (abd_1 d_2 \bar{d}_1 \bar{d}_2)$ et $C_e^2\ (\pi \bar{c} \bar{c}' d_2 i_1 i_2)$, dans F_3 et F_4 $c'c + d_1 a + d_1 a'$ et C_e^1; $c'c + d_2 a + d_2 a'$ et C_e^2, dans F_5 et F_6 $2\,c'c + ab$ et C_e^i. De là on constitue les autres faisceaux et on calcule les paramètres dans C_e. C_e^1 et C_e^2 ont π pour point d'inflexion et $c'c$ pour polaire harmonique. Les faisceaux $F_1 \ldots F_6$ ont respectivement les indices 6, 6, 3, 3, 6, 6.

$m = 4$. Indice 6. Le théorème du § 9 donne la convergence de ab, $c'c$, $c'_1 c'$ et ensuite que $c'_1 c'_3 d_1 d_2$ sont alignés. Le contact en d_i détermine un F, où $c'c + C_2\ (abd_1 d_2 c'_2)$ et une C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ sont anallagmatiques. Les indices de ces deux F sont 3. Le lieu des triples périodiques est une conique par $abd_1 d_2$. La C_e touche ai_2, bi_1 en i_2, i_1.

On trouve ensuite $c'_1 c'_2 c'$, $c'_3 c'_2 c$. Comme la forme la plus élégante de la construction je propose la suivante:

c'cab *sont donnés. On prend sur* (c'a, cb) (c'b, ca) *un point* λ, *tire les droites* $\lambda c'$, λc, *la conique par* abc'c, *qui touche* $\lambda c'$, λc *en* c', c *et un point d'intersection de* (c'a, cb) (cb, ca) *avec cette conique comme* c'_2. *Alors les tangentes de* c', c *coupent les droites* $c'_2 c$, $c'_2 c'$ *en* c'_1, c'_3.

$m = 3$, Indice 10. L'homographie a en b en a, c' en c en c', c'_2 en c'_1 demande, que ab, $c'c$, $c'_1 c'_2$ soient convergentes. Une C_3 propre anallagmatique n'existe pas.

Paramètres sur C_e. $a' \equiv 2\gamma\varepsilon + \frac{k_1 - k_2}{3}$, $b \equiv 4\gamma\varepsilon - \frac{k_1 - k_2}{3}$.

c' en c, où $c' \equiv -\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$, donne $4\gamma\varepsilon + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3} \equiv -2\gamma$, où $\gamma \equiv \frac{C}{6}$.

c' en c'_1 en c, où $c' \equiv \frac{-1 + 2\varepsilon^2}{2}\gamma + \delta$, donne une solution inadmissible.

c' en c'_1 en c'_2 en c, où $c' \equiv 2\varepsilon^2\gamma + \sigma \frac{k_1 - k_2}{3}$ donne $3\gamma \equiv 0$.

c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en c, où $c' \equiv \varepsilon(2\varepsilon - 1)\gamma$ donne γ arbitraire.

Remarque commune sur les classes I et II. On les peut déduire aussi de l'homographie par moyen des surfaces du 2^d ordre. Une F_2 est transformée en soi par une homographie. Qu'on la projette d'un point P de la surface sur un plan, on aura une Q^2 qui est périodique en même temps que l'homographie. Si l'homographie conserve les deux systèmes de génératrices, Q^2 sur E a deux points principaux accouplés dans chaque point d'intersection avec une génératrice de P **).

Si l'homographie permute les deux systèmes, Q^2 sur E a les points principaux accouplés en croix dans les points d'intersection avec les génératrices de P.

[Je le crois utile, de signaler expressément, que cette remarque se trouve déjà dans le manuscrit original. La méthode publiée dans les C. R. 5 janvier 1885 en est une généralisation.]

*) Les tangentes communes en c', c, d_1 et d_2 passent par π.

**) Cette transformation est d'importance, parcequ'elle prête un image univoque pour les transformations linéaires des quantités complexes dans le domaine binaire.

§ 31. — Les transformations à trois coincidences de points principaux.

I. (aa'), (bb'), (cc').

Le faisceau a est transformé en soi de manière, que ab, $a'c'$ et ac, $a'b'$ se correspondent. Soient $\alpha\alpha'$ les rayons doubles de cette involution. Les trois paires de rayons doubles dans a, b, c se coupent en 4 points, quadrangle conjugué à abc. La transformation est de soi-même involutive et est celle, qui est provoquée par la conjonction par rapport à un quadrangle donné. Tous les 4 points doubles portent des identités. Pour chaque paire involutive $i_1 i_2$ du plan les deux coniques directives coincident avec la conique $(abci_1i_2)$.

Les coniques anallagmatiques sont: 1. Trois couples, qui touchent en deux points principaux deux droites principales. 2. Soient ah, bk deux droites qui se coupent sur une droite double par c et qui coupent bc, ac en h, k et soient h', k' les points harmoniquement conjugués à h, k par rapport à bc, ac. La conique C_{ab} par $abh'k'$ qui touche ah, bk en a, b est anallagmatique. Ainsi obtient-on 6 séries, qui ont chaque fois en commun deux points doubles sur une droite par c *).

Toute conique anallagmatique ensemble à une droite double donne une C_3 anallagmatique et ainsi proviennent 36 faisceaux de C_3 décomposées. Deux quelconques de ces cubiques décomposées constituent enfin un faisceau F de cubiques propres.

En prenant p. e. $d_1d_2 + C_{bc,34}$ et $d_1d_4 + C_{ab,23}$, on obtient, que toute couple involutive ensemble à $abcd_1d_2d_3d_4$ détermine un faisceau de cubiques anallagmatiques. Une autre espèce de faisceaux contient trois couples involutives. L'indice de ces faisceaux est 2.

II. (ab'), (ba'), (cc').

Les droites par c sont en homographie aux rayons doubles cb et ca. Celle-ci doit être périodique. Les faisceaux b et b' étant homographiques de façon que bc, ba correspondent à $b'a'$, $b'c'$, ils engendrent une conique D_b, qui touche en b, a les droites bc, ac.

Or il est à remarquer, qu'un rayon de b se change après la 1. 3.... transformation en un rayon de b et que les indices impairs n'existent pas, par conséquent.

Un point p de D_b se transforme, comme il suit. On fait l' intersection p' de pa avec le successeur de pc, l'intersection q' de $p'b$ avec D_b et p'' de $q'a$ avec le second successeur de pc, etc. Le rapport anharmonique $b\,(pp'ca)$ est égal à $c\,(pp'ba)$, les rayons correspondants se coupant sur pa. De même on a

$$a(p'q'cb) = c(p'q'ab) \tag{1}$$

$$a(p'q'bc) = c(p'q'ba) \tag{2}$$

et q' étant dans D_b

$$a(p'q'bc) = b(pp'ca)\,;$$

donc de (2) et (3)

$$c(pp'ba) = c(p'q'ba)\,;$$

*) Les coniques 1. sont un cas spécial de 2. On trouve incidemment: Les couples, qui complètent d_1, d_2, d_3, d_4 à des triples conjugués par rapport à abc sont couples involutives dans la transformation.

cela exprime que q' est situé dans le second successeur de pc et coincide donc avec p''. Lorsque n est pair $p^{(n)}$ coincide avec p, toute droite par b est reproduite après n transformations de même que toute droite par c, donc tout point du plan.

Lorsque n est impair, $p^{(n)}$ est dans pa, mais puisque

$$b(pp_1ca) = b(p_1p_2ca) = \ldots b(p_{n-1}p_nca) = \varepsilon_n\,, \quad \text{où} \quad \varepsilon_n^{\,n} = 1\,, \quad \text{on a} \quad b(pp_nca) = \varepsilon_n^{\,n-1} = \varepsilon_n^{\,-1}\,.$$

$p^{(n)}$ se trouve donc sur la conique de p_1, p_3, . . . et seulement après n applications de Q^2 on sera sur pa et par suite dans p. Partant:

La seule condition, pour que Q^2 *soit périodique est la périodicité dans* c.

Si $n = 4\mu + 2$, il y a deux Q^2 composées de cycles n - ponctuels, l'une a dans c une périodicité de l'indice n, l'autre une périodicité de l'indice $\frac{1}{2}\,n$. Si $n = 4\mu$, il y a une seule Q^2, ayant une homographie de l'indice n dans c.

Le cas $n = 1$ donne l'inversion bien connue. Ces transformations périodiques peuvent donc se concevoir généralisations de l'inversion.

Formules en coordonnées. Soient cba le triple fondamental, $x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}$ les coordonnées de p_i, il faut mettre

$$x_1^{\,1} : x_2^{\,1} : x_3^{\,1} = \lambda\, x_2\, x_3 : \mu\, x_3\, x_1 : \nu\, x_1\, x_2$$

$$x_1^{(2)} : x_2^{(2)} : x_3^{(2)} = \lambda\mu\nu\, x_1^{\,2}\, x_2\, x_3 : \mu^2\lambda\, x_1\, x_2^{\,2}\, x_3 : \nu^2\lambda\, x_1\, x_3^{\,2}\, x_2 = \mu\nu\, x_1 : \mu^2\, x_2 : \nu^2\, x_3$$

. . . . . .

$$x_1^{(2r-1)} : x_2^{(2r-1)} : x_3^{(2r-1)} = \lambda\mu^{r-1}\nu^{r-1}\, x_2\, x_3 : \mu^{2r-1}\, x_1 x_2 : \nu^{2r-1}\, x_1 x_3$$

$$x_1^{(2r)} : x_2^{(2r)} : x_3^{(2r)} = \mu^r\nu^r\, x_1 : \mu^r\, x_2 : \nu^{2r}\, x_3$$

Afin que $p^{(2r)}$ soit identique à p, il faut $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{2r} = 1$ ou $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{r} = 1$ indépendamment de λ. Pour r impair l'homographie dans c consiste en des cycles à r ou à $2r$ droites. Pour r pair l'indice de Q^2 se réduit dans le premier cas à r.

Afin que $p^{(2r-1)}$ soit identique à p, il faut $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{2r-1} = 1$ et l'équation $x_1^{\,2} = \frac{\lambda}{\mu}\, x_2\, x_3$ ou $x_1^{\,2} = \frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{r-1} x_2 x_3$. Dans une Q^2 à l'indice $4\,r - 2$ y a-t-il deux coniques tangentes à ab, ac en b', c' dont les points reviennent à soi après $2\,r - 1$ transformations. Ces coniques sont invariables, tandis que les autres de leur faisceau se permutent involutivement.

En mettant $b'c'$ dans les ombilics du plan, on aura

$$\frac{x_2}{x_1} = x + iy, \frac{x_3}{x_1} = x - iy,$$

et les formules pour Q^2 prennent la forme

$$x' + iy' = \frac{\mu}{x - iy}, x' - iy' = \frac{\nu}{x + iy}; 2x' = \frac{\tau x - \sigma y}{x^2 + x^2}, 2\,y' = \frac{\sigma x - \tau y}{x^2 + y^2} \left\{ \begin{matrix} \mu - \nu = i\sigma \\ \mu - \nu = \tau \end{matrix} \right\}$$

Les relations $x'^2+y'^2=\frac{\mu\nu}{x^2+y^2}$

et $$\frac{y'}{x'}=\frac{\frac{\sigma}{\tau}+\frac{y}{x}}{1-\frac{\sigma}{\tau}\frac{y}{x}}=tg\left(\text{arc tg}\,\frac{\sigma}{\tau}+\text{arc tg}\,\frac{y}{x}\right)$$

s'expriment comme il suit:

La transformation se compose d'une inversion ordinaire et d'une rotation du plan autour du pôle de l'inversion. Si l'amplitude est $\frac{2\pi}{m}$, m *étant entier*, Q^2 *sera périodique.*

[*Paramètres sur* C_h. Une C_h anallagmatique existe pour l'indice 4. On a $(ba')\equiv-\gamma(1+i)+\frac{k_1}{2}$, $(ab')\equiv-\gamma(1+i)+\frac{k_2}{2}$, $(cc')\equiv-\gamma(1+i)$, et il s'ensuit $\gamma\equiv\frac{mk_1+nk_2}{6}$, où $m\equiv n$ mod 2 afin que $3\gamma\equiv\frac{k_1-k_2}{2}$. Donc (cc') est point d'inflexion sur C_h et (bc'), (cb') sont les deux points de premier contact non conjugués à c'.

Paramètres sur C_e. Une telle courbe existe pour l'indice 3 entre les droites de c. Or $(aa')\equiv2\gamma\varepsilon_1(bc')\equiv2\gamma\varepsilon+\frac{k_1-k_2}{3}$, $(cb')\equiv2\gamma\varepsilon-\frac{k_1-k_2}{3}$, d'où par suite la condition $3(\varepsilon-\varepsilon^2)\gamma\equiv0$ et $\gamma\equiv\frac{mk_1+nk_2}{9}$, $m+n\equiv0$ (mod 3). abc sont un triple tangentiel appartenant au triangle hessien de C_e. C_e donnée admet 18 pareilles Q^2.

Les autres 6 (A) tangentielles sont transformées entre elles de manière que chaque sextuple contient deux points d'une même (A) tangentielle.]

Quant à Q^2 donnée forme chaque sextuple du plan avec abc la base d'un F. Celle-ci contient deux C_e invariables, pour qui abc forment dans l'un ou l'autre sens un triple tangentiel. De pareilles C_e y a-t-il deux faisceaux. Les courbes de chacun s'osculent en a, b, c.

III. (ab'), (bc'), (ca').

La droite ac par a correspond à la droite $a'b'$, donc à soi-même et ab à $a'c'$. Les faisceaux a, a se coupent dans une droite S_1 par b. De même existent deux droites S_2, S_3 par c, a qui se coupent sur S_1 dans le seul point double d. Une droite g_1 par a se transforme en g_2 par c en g_3 par b en g_4 par a, de manière que g_1 et g_2 se coupent sur S_1, g_2 et g_3 sur S_2, g_3 et g_4 sur S_3. L'affinité entre g_1 et g_4 est homographique et $g_1=ac$ change en $g_4=ab$, $g_1=ab$ en $g_4=ac$. Partant:

Indépendamment du point p_1 choisi comme correspondant à un point p, cette caractéristique fournit une transformation périodique à l'indice 6.

Il y a un point fixe et un triple périodique. Ces 4 points forment un quadrangle conjugué au triangle abc. L'indice en d est 3. Les 2 points complétant d à un triple conjugué par rapport à abc sont involutifs, i_1 i_2.

Par abc passe un faisceau de C_3^4, qui passent par d^2, les deux tangentes y ayant les directions fixes de d. Les deux C_3^4, qui ont abc comme triple tangentiel, sont transformées involutivement. Une C_3^4 anallagmatique de F est $da+db+dc$, l'autre est une C_3^4 propre.

La relation entre pp_1 étant une homographie, il s'ensuit: Deux triples pp_2p_4 du même sextuple ont triple homologie.

Paramètres sur C_3^4. Voir § 34.

Paramètres sur C_e. $a' \equiv -\varepsilon a - 2\gamma$, $c' \equiv \varepsilon^2 a + 2(\varepsilon - 1)\gamma$, $a \equiv -a + 4\varepsilon\gamma$, on peut mettre $(ab') \equiv 2\varepsilon\gamma + \frac{k_1}{2}$, $(ca') \equiv 2\varepsilon\gamma + \frac{k_1 + k_2}{2}$, $(bc') \equiv 2\varepsilon\gamma + \frac{k_2}{2}$ avec la condition $3\varepsilon\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon) \equiv 0$. Pour C_h donnée y a-t-il 6 Q^2, chacune ayant un triple tangentiel de la série distinguée comme principal.

Dans Q^2 donnée existent deux C_e anallagmatiques, qui ont toutes les deux abc, $di_1 i_2$ pour triples tangentiels. Les triples pp_2p_4 forment sur la courbe précisément la série des triples conjugués par rapport au triple tangentiel. Voir I, partie § 3.

IV. Section.

CARACTÉRISTIQUES PARTICULARISÉES—RÉSUMÉ ET GÉNÉRALITÉS.

[§ 32.—Transformations périodiques avec des incidences entre points principaux et droites principales].

J'exposerai une classification directe de ces transformations. Elles présentent aussi les cas, où plusieurs intercalaires de la même chaîne coincident ou entre eux ou avec un des points principaux.

1. *Nulle coincidence de points principaux ou de droites principales.* La périodicité demande l'enchaînement des deux systèmes fondamentaux. Or si a' est incident avec bc, sans coincider avec b ou c, son transformé vers Σ' est a' même. a' n'entre donc pas dans l'enchaînement et celui-ci devrait se faire entièrement par les autres points principaux, ce qui est certainement impossible, même si $b'c'$, $c'a'$ passent par b, a, tant qu'on exclut des coincidences entre droites principales. On peut l'exprimer ainsi:

Sous la supposition faite une transformation périodique à incidence est impossible, parcequ'il est impossible, que les deux triangles soient à la fois inscrits et circonscrits entre eux.

2. *Nulle coincidence de points principaux.* Soient ab et $a'b'$ coincidentes. Si alors c' et c sont enchaînés, il y a enchaînement entre tous les points principaux, mais si c' ne se change pas directement en c, aucune des transitions ne peut être directe, ce qui ne conduit donc pas à une caractéristique périodique. S'il y a c' en c, les points $a'b'$ correspondent à deux voisins de c, puis à deux voisins de c et puis à deux points $\bar{c}\,\bar{\bar{c}}$ sur $a'b'$. Même si $\bar{c}\,\bar{\bar{c}}$ coincident resp. avec a, b ou b, a on a deux transitions moyennant deux intercalaires, qui ne font pas périodique la transformation. Voir § 3.

Si ab coincide avec $a'c'$ on a même quand il y a c en b', transition de c en soi-même de manière que c ne passe point en un point principal du 2d système.

3. *Nulle coincidence de droites principales.* En envisageant (aa) ou (ab) on voit comme au n. 1 que les points disponibles ne peuvent fournir tous les enchaînements.

4. *a)* Je ne séparerai dans la suite les cas à 1 ou 2 coincidences. Selon le n° 1.

(cc'), ca coincidente avec $c'b'$

(cc'), ca coincidente avec $c'a'$ et cb avec $c'b'$,

(cc'), ca coincidente avec $c'b'$ et cb avec $c'a'$,

(ab'), ca coincidente avec $a'b'$,

(ab'), cb coincidente avec $a'c'$

ne conduisent à aucune périodicité.

b) (cc'), ab coincidente avec $a'b'$. Les points a', b' correspondent vers Σ' à deux voisins de c', soit c_1, c_1 et ceux-ci vers Σ' à deux points $c_2 c_2$ de $a'b'$ etc. Pour achever l'enchaînement il est besoin, que c_{2i}, c_{2i} coincident avec a, b ou b, a. Successivement se correspondent ca, $c'b'$, cc_1, $c'c_2$, ... $c'c_{2i-1}$, ca ou cb. Dans ce dernier cas s'y joint une suite analogue pour cb. Donc: La présente caractéristique donne toujours une homographie périodique, si l'homograpie dans c est périodique. Si l'indice de celle-ci est $2i+1$, l'indice de Q^2 sera $2(2i+1)$ ou $2i+1$, selon que $\bar{\bar{c}}_{2i}$ coincide avec a ou b.

Les deux classes ici résultantes se rangent précisément dans les classes du § 26. On les réduit par $\mathfrak{T}^2(acd_i)$, d_i étant un des 4 points doubles, aux formes de ce § en chassant les intercalaires du point c. On obtient CC', $D_i B$, $A'\bar{C}_i$ (ou $\bar{\bar{C}}_i$) accouplés, A en A, et les deux droites $AD\bar{C}_i$ (ou $\bar{\bar{C}}_i$) sont transformées involutivement. Les transformés de A', D sont donc alternativement dans ces deux droites, jusqu'à ce qu'ils tombent sur B ou $\bar{C}_i$ resp. Pour le premier cas le lieu des cycles $2i+1$ - ponctuelles est décomposé en deux droites $AD\bar{C}_i$ et AAB et en $m-1$ droites par C, entre lesquelles une passe par $(A'D, \bar{C}_i B)$.

(cc'), (aa'), ab coincidente avec $a'b'$ est particularisation du cas précédent ou aussi du § 33. I.

(cc'), (ab'), ab coincidente avec $a'b'$ est particularisation de *c*).

c) (ab'), ab coincidente avec $a'b'$. Si c' est enchaîné directement avec c, on a transition de b' vers Σ' en $\bar{c}'$ en c en b, c'est-à-dire une forme particulière de la transformation § 18 I. S'il y avait des intercalaires entre c' et c, la périodicité cesserait d'exister. La recherche des C_3 anallagmatiques est contenue dans celle du § 18. Lorsqu'on prend là la paire $c'c$, qui est aligné avec le point double, contenue aussi dans la conique $a'bb'a'_1 a_2$, $a'bb'$ seront alignés et $a'_1 a'_2$ identiques avec $c'c$. Quant aux paramètres sur C_e, si l'on pose $\gamma \equiv \frac{mk_1+nk_2}{12}$, il faut $m \equiv n \equiv 0$ (mod. 2).

d) (cc'), ca coincidente avec $c'a'$. Si a' se transforme par des intercalaires vers Σ en $\bar{\bar{b}}$ et plus tard en $\bar{b}$ et b précisément en a, Q^2 appartiendra alors à la classe III. du § 16 et étant périodique elle est réductible par $\mathfrak{T}^2(cb'b'_1)$ à une homographie.

e) (ab), ca coincidente avec $b'c'$. On a une dégéneration particulière des caractéristiques du § 14. Le point c' donne vers Σ un point $\overline{b'_1}$, celui-ci vers Σ' un point $\overline{b'_2}$ dans la droite ac, ensuite $\overline{b'_3}$ voisin de b' etc. Pour que $c'c$ soient enchaînés, il faut que b'_{2i} coincide avec c.

Lorsqu'il y a a' en b, on a périodicité pour i arbitraire. $\mathfrak{T}^2$ $(aa'b)$ donne une homographie, où les droites A'B, CC' sont transformées involutivement.

Lorsqu'il y a a' en b, on a périodicité pour i arbitraire. Dans la transformation, qui en provient par $\mathfrak{T}^2$ (abd) les intercalaires entre $c'c$ sont de même distribués sur deux droites, savoir BD et C'C.

Lorsqu'il y a a' en a'_1 en a'_2 en b, on a périodicité seulement pour $i=1$ et alors une particularisation du § 18, III. Le calcul des paramètres sur C_e s'applique au cas présent, si $m+n=\sigma=0$.

Si l'on applique à cette transformation $\mathfrak{T}^2$ $(aa'b)$, on tombe sur une transformation du § 18, III, de la sorte, que $a'_1 a'_3$ avec a, et par suite aussi $ab\,a'_2$, sont alignés (2. var.). Cette forme est dérivée du § 27 par $\mathfrak{T}^2$ (abd_i), si d_i est aligné avec $a'_1\,a'_3$.

f) (ab'), (ba'), ca coincidente avec $b'c'$. Périodicité est possible seulement, si c' se change en b' en c. Les deux coniques directives pour aa' et bb' se touchent en (ab').

Par $\mathfrak{T}^2$ (abd) obtient-on une homographie avec la couple involutive AB et les trois points successifs C'DC. Pour obtenir donc Q^2 au moyen de la $\mathfrak{T}^2$ appliquée dans le § 30, II, il faut prendre pour D un point, dont les deux transformés sont alignés avec A.

(aa'), (bc'), ac coincidente avec $a'b'$. En conséquence de l'observation faite au n. 1 on ne pourra pas amener enchaînement ni périodicité.

(aa'), (bc'), bc coincidente avec $b'c'$. Ce cas est particularisation de *b)*. On aura périodicité quand c' par a', a'_1 (sur bc) etc. se change en c. La transformation est aussi particularisation de § 23, m étant pair. $\mathfrak{T}^2$ (abd_i) donne une transformation du même enchaînement, où tous les transformés entre c' et b sont distribués sur deux droites différentes, savoir BD_i et BC, B étant point double de Q^2.

Tout cela s'exprime de la manière suivante:

Tous les cas, où un point principal est incident avec une droite principale, sans qu'elle coincide avec une autre aboutisssant en ce point principal, ne fournissent pas périodicité. Tous les cas, où deux droites principales non accouplées sont coincidentes sans coincidence de leurs points principaux, ne fournissent pas périodicité.

Les autres caractéristiques donnent en tout 7 classes de Q^2, *qui sont des particularisations des* §§ 17 I. II., 23, 16 II. *et en outre une de* § 18 I *et* III.

On les réduit toutes par applications de $\mathfrak{T}^2$ *ou à des homographies ou à des transformations sans incidences des* §§ *précédents.*

6. Le cas possible, où sans incidences des points principaux quelques transformés des points principaux d'un système Σ sont incidents avec des droites principales de l'autre système, est celui, où (aa) (bb) étant des coincidences les périodicités dans a, b ont différents indices.

§ 33. — Transformations périodiques aux triples principaux 2 ou 1 ponctuels.

Si deux points principaux b' c' de l'un système se rapprochent infiniment, les points accouplés bc de l'autre système se rapprochent de même. Pour la possibilité de transformations périodiques les résultats des §§ antérieurs restent débout. L'enchaînement de b' avec a et de a avec b' ne sera donc pas assez fort, pour amener la périodicité et les coincidences, le seul arrangement admissible est l'enchaînement de a et a', b et b' et qu'en outre β' vient après un certain nombre de transformations en β.

2. Or on conclut du § 3, que le cas extrême est a' en a et b' en b'_1 en b. Comme pour le § 10. a. peut-on dresser le calcul des paramètres sur C_n et on obtient $\frac{9}{2}\gamma i + \rho \equiv \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$. C_c anallagmatique est impossible, attendu que la condition existe (voir, § 4, III).

$$-\gamma + \sigma\frac{k_1 - k_2}{3} + (2\varepsilon^2 - 1)\gamma \equiv -3\gamma \quad , \quad \gamma \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3}$$

Aussi l'homographie sur C_3^3 donne lieu à une telle caractéristique. Voir § 34. I.

Cette forme se réduit par $\mathfrak{T}^2(aa'b)$ à une forme du § 32. 4, ayant l'alinéation $aa\,b'$ et ensuite à une autre qui n'est pas particulière sous les points de vue des §§ 32, 33 et aussi à la forme générale du § 26. A cette dernière elle est réduite directement par $\mathfrak{T}^2(abd)$ à condition que d soit aligné avec $a'c$.

2. Les autres formes sans des coincidences sont contenues sous b' en b, β' en β, a' en a'_1 en a'_2 . . . en $a'_m = a$. En appliquant $\mathfrak{T}^2(b'b\beta)$ on obtient une forme du § 24.

3. (aa'), b' en b'_1 . . . en $b'_m = b$, β' en β'_1 . . . en $\beta'_m = \beta$ est toujours périodique et réductible à une homographie.

4. (ab'), a' en a'_1 . . . en $a'_m = b$. β se change vers Σ par degrés en $\bar{a}'$ et celui-ci en un point de $b\beta$. Si celui-ci doit être β', il faut que $b\beta$ passe par b' et qu'elle coincide avec la droite $b'\beta'$; position incompatible avec la caractéristique.

5. (bb'), a' en a'_1 . . . en $a'_m = a$. Afin que cette transformation devienne périodique, il faut, que β', qui passe de b en un point $\bar{\beta}$ de $a'b'$, entre en une chaîne, mais tel arrangement du faisceau b est impossible.

6. La caractéristique précédente devient constructible, si β' coincide avec β. Les intercalaires sont dans ba, $b'a'$. On a une particularisation de § 30, I. Toutefois quelques propriétés demanderaient une considération indépendante du § 30 et de l'homographie.

7. (ab'), (ba'), β enchaîné avec β. Pour déduire cette forme d'une homographie, on emploie $\mathfrak{T}^2(xyz)$, xy étant une couple involutive, z ayant ses deux transformés dans zx, zy. La caractéristique est une du § 30, II.

8. (aa'), (bb'). La Q^2 devient une inversion spéciale.

9. Résumé des manières, pour changer une homographie en une Q^2 aux triples principaux 2-ponctuels. On prend pour $\mathfrak{T}^2$:

1. Deux points doubles et un point d'une droite double (8).

2. Une couple involutive $i_1 i_2$ et un point p, dont les transformés p_1, p, sont alignés avec lui et resp. $i_1 i_2$ (7).

3. Deux points doubles et un voisin de l'un deux (8).

4. Un point double et deux points infiniment voisins du plan (3).

5. Un point double et deux points correspondants de la droite double opposée (5).

6. Une couple involutive $i_1 i_2$ et un point infiniment voisin à l'un d'eux (7).

7. Un point double et un point infiniment voisin et un point arbitraire du plan (6).

8. Supposez une homographie qui a la propriété, d'avoir chaque point aligné avec son premier et 3ième transformé et prenez trois points successifs $a_1 a_2 a_3$ d'une chaîne comme points principaux de $\mathfrak{T}^2$. On peut démontrer en effet qu'il y a des homographies *périodiques* de cette propriéte. La $\mathfrak{T}^2$ donne alors (4).

10. Les transformations Q^2 à triple principal *uniponctuel* doivent, pour devenir périodique, avoir telle position, que a', $\bar{a}'_1$, $\bar{a}'_2$ sont enchaînés directement avec a, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Cette forme appartiendrait à la caractéristique du § 2. Toutefois une telle transformation est impossible, comme on reconnaît par application d'une $\mathfrak{T}^2(aaa')$ *).

La coincidence de aa' peut conduire à des formes du § 16, I, et à nulle autre. En s'acheminant par la voie inverse, on arrive à des triples uniponctuels aux manières suivantes:

1. Une $\mathfrak{T}^2$ ayant un point double, un point infiniment voisin de celui-ci sur une droite double et un point sur la seconde droite double par ce point.

2. Si l'indice de la périodicité sur la droite double par p dans l'homographie employée tout-à-l'heure est égal à 2, le résultat de la transposition sera une particularisation du § 30, II, qui est généralisation (quant à l'indice) d'un certain cas spécial de l'inversion. Si l'indice de l'homographie entière est 2, la Q^2 contiendra une conique anallagmatique, savoir remplie de points doubles. *Dans le cas général y a-t-il un faisceau de coniques hyperosculantes entre elles qui sont transformées involutivement.*

Donc: Toutes les Q^2 périodiques aux triples 2 ou 1 ponctuels sont non seulement particularisations des formes traitées dans les §§ antérieurs, mais elles se changent par $\mathfrak{T}^2$ ou en des homographies ou en des transformations du § 24 ou en la transformation du § 28.

11. Restent à considérer les formes appartenant en même temps aux §§ 32, 33. Elles sont des particularisations du § 31 en ce que au n. 4. *b*. ab et ab', au n. 4. *d*. ac et $a'c'$, au n. 4. *e*. ab et $a'b'$ coincident. Cela n'empêche point leur réductibilité.

*) Comparez § 34.

[§ 34. — Détermination des transformations, qui possèdent une C_3^3 anallagmatique.]

Les §§ 4, 5, 6 donne sur les correspondances univoques dans C_3 qui les contiennent, soit périodiques, soit apériodiques certaines considérations, dont la signification accroit beaucoup par des recherches sortant du cadre du probléme présent. Pourtant, en marchant la voie préscrite par le principe des caractéristiques fermées, les calculs des paramètres sur C_e, C_h pour les Q^2 périodiques ont été ajoutés séparément aux §§ respectifs. Maintenant je développerai en me basant sur le § 5 II pour toutes les transformations périodiques, qui jouissent d'une C_3^3 anallagmatique, les paramètres. Comme à la suite de toute homographie donnée sur C_3^3 on peut déterminer les points fondamentaux, qui satisfont à un certain enchaînement demandé, il s'agira seulement d'individualiser l'homographie de manière qu'elle satisfasse à la Q^2.

I. Je pose $B:C=x$, $D:C=y$, je désignerai le rebroussement par d_1, le point double $-D:(B+C)$ par d_2. On a pour les transformés successifs d'un point α

$$\alpha^{(n)}=-\frac{D}{B^nC}\,\frac{B^n+(-1)^{n+1}C^n}{B+C}+(-1)^n\frac{B^n}{C^n}\,\alpha$$

Si $b'_n=b$, il devient

$$b'=\frac{3C^nD}{C^{n+1}+(-1)^nB^{n+1}}-\frac{D}{C+B}\quad,\quad b=(-1)^{n-1}\frac{B^nD}{C^{n+1}+(-1)^nB^{n+1}}-\frac{D}{C+B}$$

et pour composer une Q^2, ayant $a'_m=a$, $b'_n=b$, $c'_p=c$ on a la condition $a'+b'+c'=3y$ et par suite

$$1)\qquad \sum_{i=m,n,p}\frac{3C^iD}{C^{i+1}+(-1)^iB^{i+1}}-\frac{3D}{C+B}=\frac{3D}{C}$$

ce qui se réduit à

$$2)\qquad x^{m+n-p+4}+2x^{m+n-p+3}-x^{m+n+2}-x^{n-p+2}-x^{p+m+2}+x^{m+1}+x^{n+1}+x^{p+1}-2x-1=0\,.$$

Cette équation est toujours facteur d'une équation binôme $x^M=1$ et est donc satisfaite par une racine de l'unité. Par conséquent $B:C$, de même que $-B:C$ est racine de l'unité. Donc en général m,n,p arbitraires conduisent à une Q^2 avec une infinité de cycles dans C_3^3 dont l'indice se détermine par l'équation 2).

Toutefois dans des cas particuliers le degré de 2) s'abaisse beaucoup en conséquence des facteurs communs aux dénominateurs dans 1).

Remarquons encore, que b' étant déterminé univoquement, les cas où $m=n$ ou $m=n=p$ présentent des Q^2 aux triples 2 ou 1 ponctuels. Dans le dernier cas 1) devient $x^{n+2}-2x^{n+1}+2x-1=0$ ou $(2x-1)(x^{n+1}-1)=0$.

Quoique toutes les Q^2, ressortant de ces calculs, jouissent d'un nombre infini de cycles d'un même indice, celles Q^2 seules sont périodiques, où m, n, p sont égaux à 1, 2, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 4. Dans ces deux derniers cas 2) est à remplacer par

$$x^7+x^6+x^4+x^3+x+1=0 \qquad 3)$$

ou $$(x-1)(x^6+x^3+1)=0$$

et $$x^{10}+x^9-x^8+x^6+x^4-x^2+x+1=0 \qquad 4)$$

ou $$(x^2+2x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)=0.$$

L'équation 3) détermine x comme racine du 9ième et $-$ C:B comme racine du 18ième degré de l'unité. Les autres racines se rejettent par quelques raisonnements, dont je me peux passer.

Le second facteur de 4) est diviseur de $x^{15}-1$, le quotient étant $x^7+x^6+x^5-$ $-x^2-x-1$. Donc x est racine du 15ième et $-$C:B du 30ième degré.

II. Je procède aux caractéristiques du § 11.

1. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en b.

$$a'=(2+x)y:(1-x^2) \qquad a=(2x-1)y:(1-x^2)$$
$$c=-y-xb' \qquad b=(-1+x+2x^2+x^3)y+x^4b'$$
$$c'=(2+x)y+x^2b' \qquad b'=(2+x-x^2-2x^3-x^4)y-x^5b'$$
$$c'_1=-(1+2x+x^2)y-x^3b' \qquad b'=y\frac{2+x-x^2-2x^3-x^4}{x^5+1},\ c'=y\frac{2+x+2x^2+x^3-x^4}{x^5+1}$$

et la condition

$$x^7+x^6-x^4-x^3+x+1=0$$

ou $$(x+1)(x^6-x^3+1)=0.$$

x^3 est racine du 3ième degré de -1, C:B racine 9ième de -1, et $-$C:B racine 9ième de $+1$.

2. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b ($a'cc'c'_1$ comme tout-à-l'heure)

$$c'_2=(-1+x+2x^2+x^3)y+x^4b'$$
$$b=(-1+x-x^2-2x^3-x^4)y-x^5b'$$
$$b'=(2+x-x^2+x^3+2x^4+x^5)y+x^6b'$$
$$b'=\frac{2+x-x^2+x^3+2x^4+x^5}{1-x^6}y \qquad c'=\frac{2+x+2x^2+x^3-x^4+x^5}{1-x^6}y$$

d'où l'équation $x^8+x^7-x-1=0$ ou

$$(x^7-1)(x+1)=0$$

donc l'indice dans C_3^3 est 14.

3. a' en a, b' en c, c' en c_1 en c'_2 en c'_3 en b.

$$c'_3=(-1+x-x^2-2x^3-x^4)y-x^5b' \qquad b'=\frac{2+x-x^2+x^3-x^4-2x^5-x^6}{1+x^7}y$$
$$b=(-1+x-x^2+x^3+2x^4+x^5)y+x^6b$$
$$b'=(2+x-x^2+x^3-x^4-2x^5-x^6)y-x^7b' \qquad c'=\frac{2+x+2x^2+x^3-x^4+x^5-x^6}{1+x^7}y$$

et la condition $(x+1)(x^8-x^4+1)=0$. Indice 24.

4. a' en a'_1 en a, b' en c, c' en c'_1 en b ($b'cc'c'_1b$ ont les expressions de n. 1).

$$a'=\frac{2+x-x^2}{1+x^3}y \quad \text{d'où} \quad x^8+x^7-x-1=0 \quad \text{comme pour n. 2.}$$

5. a' en a'_1 en a'_2 en a, b' en c, c' en c'_1 en b ($b'cc'c'_1b$ de n. 1)

$$a = \frac{2 + x - x^2 + x^3}{1 - x^4}\, y \quad \text{d'où} \quad x^9 + x^8 - x^5 - x^4 + x + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^8 + x^4 - 1) = 0 .$$

6. a' en a, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en b.

$$b'_1 = -y - xb' \quad , \quad c = (-1 + x)\, y + x^2 b' \quad , \quad c' = (2 + x - x^2)\, y - x^3 b'$$

$$c'_1 = (-1 - 2x - x^2 + x^3)\, y + x^4 b' \quad , \quad b = (-1 + x + 2x^2 + x^3 - x^4)\, y - x^5 b$$

$$b = (2 + x - x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5)\, y + x^6 b'$$

$$b' = (2 + x - x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5)\, y : (1 - x^6) = c' .$$

Cela donnerait donc une Q^2 à triple biponctuel et la condition

$$x^6 + x^5 - x^3 + x + 1 = 0$$

dont le premier terme est facteur de $x^{12} - 1$, d'où $-C : B$ racine $12^{\text{ième}}$ de $+1$.

7. a' en a, b en b'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b.

$$b = (-1 + x - x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5)\, y + x^6 b'$$

$$b' = (2 + x - x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 - x^6)\, y - x^7 b'$$

$$b' = (2 + x - x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 - x^6)\, y : (1 + x^7) \ , \ c' = (2 + x - x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5 - x^6)\, y : (1 + x^7) ,$$

d'où $(x + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0$. Donc $-x^2$ est une racine de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

ou une racine $5^{\text{ième}}$ de l'unité, x est donc une racine du $20^{\text{ième}}$ degré et de même $-C : B$.

III. a' en b, b' en c, c' en a.

$$b = -y - xa' \quad , \quad b' = (2 + x)\, y + x^2 a' \quad , \quad c = (-1 - 2x - x^2)\, y - x^3 a'$$

$$c = (2 + x + 2x^2 + x^3)\, y + x^4 a' \quad , \quad a = -(1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4)\, y - x^5 a'$$

$$a' = (1 - x^6)\, \frac{2 + x}{1 - x^2}\, y + x^6 a'$$

Cette équation est identiquement satisfaite par $B^6 = C^6$ sans que $C^2 = B^2$. C'est-à-dire $C : B$ est racine $6^{\text{ième}}$ de l'unité et de même $-C : B$. On peut donc construire ∞^1 telles caractéristiques dans une homographie convenable donnée. La possibilité d'une Q^2 est vérifiée par

$$a' + b' + c' = a'(1 + x^2 + x^4) + (4 + 2x + 2x^2 + x^5)\, y$$

ce qui se réduit pour a' quelconque à $3y$, attenduque $1 + x^2 + x^4 = 0$ et $1 + 2x + 2x^2 + x^3 = 0$.

IV. a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a.

$$b=-y-xa',\ b'=(2+x)y+x^2a,\ b'_1=-(1+2x+x^2)y-x^3a',$$
$$c=(-1+x+2x^2+x^3)y+x^4a',$$
$$c'=(2+x-x^4-2x^3-x^4)y-x^5a,\ c'_1=(-1-2x-x^2+x^3+2x^4+x^5)y+x^6a',$$
$$a=(-1+x+2x^2+x^3-x^4-2x^5-x^6)y-x^7a',\ a=(2+x-x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6+x^7)y+x^8a,$$
$$a'=(2+x-x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6+x^7):(1-x^8)$$

d'où l'équation $\qquad x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1=0$

dont le premier terme est diviseur de $x^{15}-1$.

V. 1. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c.

$$a'_1=-y-xa' \qquad a'=y(2-2x-x^2+x^3-x^4)-x^5a'$$
$$a'_2=+y(x-1)+x^2a' \qquad a'=(2-2x-x^2+x^3-x^4)y:(1+x^5)$$
$$b=y(-1+x-x^2)-x^3a \qquad b'=(2+x-x^2+x^3+2x^4)y:(1+x^5)$$
$$b'=y(2+x-x^2+x^4)+x^4a \qquad c=(2+x)y:(1-x^2)$$

et la condition $x^7-x^3+x^4+x^3-x^2+1=0$ ou $(x+1)(x^6-x^5+x^3-x+1)=0$.

2. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en b, c' en c.

$$a'_3=y(-x^2+x-1)-x^3a' \qquad a'=(2-2x-x^2+x^3-x^4+x^5)y:(1-x^6)$$
$$b=y(-1+x^3-x^2+x)+x^4a \qquad b'=(2+x-x^2+x^3-x^4+x^5)y:(1-x^6)$$
$$b'=y(2+x-x^4+x^3-x^2)-x^5a' \qquad c'=(2+x)y:(1-x^2)$$
$$a=y(2-2x-x^2+x^5-x^4+x^3)+x^6a'$$

et la condition $x^6+x^3+1=0$ et $-C:B$ racine 18ième de l'unité.

3. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en b, c' en c.

$$a'_4=y(x^3-x^2+x-1)+x^4a'$$
$$b=y(-x^4+x^3-x^2+x-1)-x^5a'$$
$$b'=z(2+x-x^2+x^3-x^4+x^5)+x^6a'$$
$$a'=y(2-2x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6)-x^7a$$
$$a'=(2-2x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6)y:(1+x^7),\ b'=(2+x-x^2+x^3-x^4+x^5+2x^6)y:(1+x^7)$$

et la condition $x^9-x^7+x^6+x^3-x^2+1=0$ ou $(x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)=0$ comme dans I. 4).

4. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c'_2 en c ($aa'a'_1a'_2b$ comme V. 1.)

$c'=\dfrac{2+x-x^2+x^3}{1-x^4}y$ et la condition $x^9-x^7+x^6+x^3-x^2+1=0$ comme n. 3.

5. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c ($aa'a'_1a'_2b$ comme V. 1.)

$c' = \frac{1+x^3}{2+x-x^2}\,y$ et la condition $x^8 - x^6 + x^5 - x^3 + x^2 - 1 = 0$ ou

$$(x-1)(x^7+x^6+x^4+x^3+x+1)=0$$

comme I, 3).

VI. 1. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en b.

$$b' = 2y - xb \qquad b = \frac{-1+x+2x^2+x^3+2x^4-2x^5}{1-x^5}\,y$$

$$a' = (2-2x)y + x^2 b$$

$$c + (-1-2x+2x^2)y - x^3 b \qquad \text{d'où} \qquad x^6 - x^3 + 1 = 0$$

$$c' = (2+x+2x^2-2x^3)y + x^4 b$$

$$c'_1 = -(1+2x+x^2+2x^3-2x^4)y - x^5 b$$

$$b = (-1+x+2x^2+x^3+2x^4-2x^5)\,y + x^6 b,$$

Donc — C:B est égal à une racine 9ième de l'unité.

2. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b ($aa'cc'c'_1c'_2$ comme tout-à-l'heure)

$$b = (-1+x-x^2-2x^3-x^4-2x^5+2x^6)\,y - x^7 b$$

$$b = (-1+x-x^2-2x^3-x^4-2x^5+2x^6)\,y : (1+x^7)$$

et la condition $a+b+c = 3\,\frac{B}{D}$ conduit directement à $x^7 - 1 = 0$, — C:B = racine 4ième de $+1$.

3. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b ($aa'cc'c'_1c'_2c'_3b$ comme tout-à-l'heure)

$$b = (-1+x-x^2+x^3+2x^4+x^5+2x^4-2x^7)\,y : (1-x^8)$$

$$a = (2+x-x^2+x^3-x^4-2x^5-x^4-x^7)\,y : (1-x^8)$$

$$c = (-1-2x+2x^2+x^3-x^4+x^5-x^6-2x^7)\,y : (1-x^8)$$

et la condition $x^8 - x^4 + 1 = 0$, d'où — C:B racine 24ième de $+1$.

4. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b.

$$b' = 2y - xb \qquad c' = (2+x-x^2-2x^3+2x^4)\,y - x^5 b$$

$$a' = (2-2x)\,y + x^2 b \qquad c'_1 = (-1-2x-x^2+x^3+2x^4-2x^5)\,y + x^6 b$$

$$a'_1 = (-1-2x+2x^2)\,y - x^3 b \qquad b' = (-1+x+2x^2+x^3-x^4-2x^5+2x^6)\,y - x^7 b$$

$$c = (-1+x+2x^2-2x^3)\,y + x^4 b \qquad b = (-1+x+2x^2+x^3-x^4-2x^5+2x^6)\,y : (1+x^7)$$

$$a = (2+x-x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6) : (1+x^7)$$

$$c = (-1+x+2x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6) : (1+x^7)$$

et la condition $x^7 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ou $(x-1)(x^6+x^5-x^3+x+1) = 0$ comme au n. II, 6.

5. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b ($aa'a'_1cc'c'_1$ comme tout-à-l'heure)

$$b=(-+x-x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6-2x^7)y+x^8b$$
$$b=(-1+x-x^2-2x^3-x^4+x^5+2x^6-2x^7)y:(1-x^8)$$
$$a=(2+x-x^2+x^3+2x^4+x^5-x^6-2x^7)y:(1-x^8)$$
$$c=(-1+x+2x^2-2x^3+2x^4+x^5-x^6+x^7)y:(1-x^8)$$

et la condition $x^6+x^5-x^4+x^2-1=0$, ce qui est facteur de $x^{10}-1=0$, donc $-C:B$ est racine 20ième de l'unité.

VII. 1. (ab'), (bc'), a' en c.

$$c'=2y-x^2c \qquad a=(2-2x+2x^2)y-x^3c$$
$$b'=(2-2x)y+x^2c \qquad c=(-1-2x+2x^2-2x^3)y+x^4c$$
$$c=-(1+2x-2x^2+2x^3):(1-x^4)$$

et la condition $x^4-x^3+x^2-x+1$, $-C:B$ racine 5ième de l'unité.

2. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en c.

$$c=(-1+x+2x^2-2x^3+2x^4)y-x^5c$$
$$c=(-1+x+2x^2-2x^3+2x^4)y:(1+x^5)$$

et la condition $x^5-x^4+x-1=0$ ou $(x^4+1)(x-1)=0$, $-C:B$ racine 8ième de l'unité.

3. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en c.

$$c=(-1+x-x^2-2x^3+2x^4-2x^5)y+x^6c$$
$$c=(-1+x-x^2-2x^3+2x^4-2x^5)y:(1-x^6)$$

et la condition $x^6-x^5+x^3-x+1=0$, $-C:B$ racine 12ième de l'unité.

4. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en c.

$$c=(-1+x-x^2+x^3+2x^4-2x^5+2x^6)y-x^7c$$
$$c=(-1+x-x^2+x^3+2x^4-2x^5+2x^6)y:(1+x^7)$$

et la condition $x^7-x^6+x^4-x^3+x-1=0$ ou $(x-1)(x^6+x^3+1)=0$, $-C:B$ racine 18ième de l'unité.

5. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en c.

$$c=(-1+x-x^2+x^3-x^4-2x^5+2x^6-2x^7)y:(1-x^8)$$

et la condition $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1=0$, facteur de $x^{15}-1=0$, donc $-C:B$ racine 30ième de l'unité.

VIII. 1. (cc'), b' en $b'_1 \ldots$ en $b'_n = a$, a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_m = b$.

$c' = \frac{2y}{1+x}$ et il résulte généralement

$$b' = a' = \frac{2 + x - x^2 + x^3 - \ldots + (-1)^{n-1} x^n}{1 + (-1)^n x^{n-1}}$$

et la condition $$(-1)^{n+1} x^{n-1} + 1 = 0.$$

2. (cc'), (ab'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_n = b$.

$$c = \frac{2}{1+x}, \quad b = \frac{2 + 2(-1)^{n-1} + 3x + 3(-x)^{n-1}}{(1+x)(1+(-1)^{n+3} x^{n+2})}$$

$$a' = \frac{2 + 2(-1)^n x - 3x^2 + (-x)^{n+2} + 2(-1)^{n+3} x^{n+3}}{(1+x)(1+(-1)^{n+3} x^{n+2})}$$

et la condition $$(-x)^{n+1} + 1 = 0.$$

3. (ab'), (bc'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_n = c$.
En continuant le calcul de VII. 5 on trouve pour $n = 2m$

$$c = -\frac{1 + 3x^{2m-3} + 2x^{2m}}{(1+x)(1-x^{2m})}$$

et la condition $$[4 - 2x + c(1 - x + x^2)]\, x = 3$$

$$x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-3} - x^{2m-4} + \ldots + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$$

pour $n = 2m + 1$

$$= \frac{-1 + 3x^{2m-2} + 2x^{2m+1}}{(1+x)(1+x^{2m+1})}$$

et la condition

$$x^{2m+1} - x^{2m} + x^{2m-2} - x^{2m-3} + \ldots - x^3 + x - 1 = 0$$

ou $$(x^{2m} + x^{2m-3} + \ldots + x^3 + 1)(x - 1) = 0$$

IX. *Théorème. L'indice dans le point double de* Q^2, *qui est le rebroussement de* C_3^3, *est toujours égal à l'indice sur* C_3^3 *et par suite à celui de* Q^2.

En effet, suivant le § 5 les paires aa', bb', cc se correspondent dans une homographie binaire, qui est la correspondance tangentielle de l'homographie donnée. Cette nouvelle homographie est projetée du point d_1 par une homographie au même indice; suivant § 1, n. 3 et puisque l'indice dans C_3^3 résulte toujours égal à l'indice de Q^2, s'ensuit le théorème.

§ 35. — Les types. Résumés comparatifs.

Réunissons les résultats, auxquels nous sommes conduits. En différant les vues méthodiques à la IV. partie nous récueillerons ici les propriétés communes des transformations découvertes, qui se prêtent a posteriori.

Il faut remarquer d'abord, que quelque importante que la caractéristique soit pour la transformation, dans plusieurs cas elle ne suffit pas pour en individualiser univoquement la forme géométrique. Ainsi il faut distinguer entre les caractéristiques et les variétés. Celles-ci ont des points fondamentaux, dont l'enchaînement est le même, mais qui possèdent un autre arrangement géométrique. Dans la plupart des cas le caractère distinctif consiste en certaines courbes anallagmatiques, qui peuvent être ou des coniques, ou des cubiques ou des courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre à point $(m-2)^{\text{tuple}}$. Seulement pour quelques cas du tableau, qui suit tout-à-l'heure la distinction se fait au moyen de certaines valeurs arithmétiques.

1. Les classes de caractéristiques à tableau fermé sont:

I. 1.	a' en a, b' en b, c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$,	Indice $2(m+2)$
2.	(ab'), a en b, c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$,	$m+4$
3.	(ab'), a' en a'_1 en b, c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$,	$2(m+3)$
4.	(cc'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_m = a$, b' en $b'_1 \ldots$ en $b'_n = b$,	$m+n+2$
5.	(cc'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_m = b$, b' en $b'_1 \ldots$ en $b'_n = a$,	$2\,N$ *)
6.	(cc'), (ab'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_m = b$,	$2(m+1)$
7.	(aa'), (bb'), c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$,	$m+2$
8.	(ab'), (ba'), c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$,	$2(m+2)$
9.	(ab'), (ba'), (cc'),	2μ
10.	a' en b, b' en a, c' en $c'_1 \ldots$ en $c'_m = c$.	$2(m+2)$ pour m pair, $(m+2)$ pour m impair.

Les dernières caractéristiques n'ont pas une existence réelle. Les variétés de la $4^{\text{ième}}$ classe se trouvent par la transposition à l'homographie, dans la $7^{\text{ième}}$ classe les formes et les variétés de la même caractéristique sont bien définies par leur périodicité, dans la $8^{\text{ième}}$ classe chaque caractéristique a deux variétés, et la $9^{\text{ième}}$ classe ne présente pas des variétés, à côté de la distinction déjà faite au tableau.

Les transformations des classes 1., 3., 5., 6. demanderaient une recherche de la courbe principale anallagmatique. En attendant je peux citer les variétés des §§ 32, 4, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* (à la fin) et § 33, 2. 4. 10.

2. Les caractéristiques isolées à tableau fermé sont:

II. 1.	a' en a, b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c.	Indice 12	2 variétés
2.	a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b, c' en c'_1 en c.	18	5
3.	a' en a, b' en b'_1 en b'_2 en b_3 en b, c' en c'_1 en c.	30	6

*) N signifie le plus petit multiple de $m+1$ et $n+1$. Cette caractéristique diffère de celle du § 16 en cela, que les deux nombres d'intercalés sont inégaux. *Toutes ces combinaisons conduisent à des tableaux fermés*, mais les cas $m=n$ sont seuls constructibles.

4. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en b	9	1
5. a' en a, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en b	12	2
6. a' en a, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b	20	3
7. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b	14	1
8. a' en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b	24	2
9. a' en a'_1 en a, b' en c, c' en c'_1 en b.	14	1
10. a' en a'_5 en a, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b	24	2
11. a' en b, b' en c, c' en a	6	1
12. a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a	15	1
13. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c.	12	3
14. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en b, c' en c	18	2
15. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en b, c' en c'_1 en c	18	2
16. (ab'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en b, c' en c	30	2
17. (ab'), a' en a_1 en a'_2 en b_1 c' en c'_1 en c'_2 en c	30	2
18. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en b	9	1
19. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b	14	1
20. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b	24	1
21. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c' en b	20	1
22. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b	12	1
23. (ab'), (bc'), a' en c	5	1
24. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en c	8	1
25. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en c	12	1
26. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en c	18	1
27. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en b	30	1
28. (aa'), (bb'), (cc')	2	1
29. (ab'), (bc'), (ca')	6	1
30. a' en b, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en a	18	0
31. a' en b, b' en c, c' en c'_1 en a	30	0 *)
32. (ab'), a' en c, c' en b	12	0

Parmi ces 31 caractéristiques 29 sont constructibles sous la forme de 50 variétés. De celles-ci 3 ont l'indice 9, 9 l'indice 12, 4 l'indice 14, 1 l'indice 15, 10 l'indice 18, 4 l'indice 20, 5 l'indice 24, 11 l'indice 30, 1 l'indice 2, 1 l'indice 5, 2 l'indice 6, 1 l'indice 8.

3. En égard à certaines propriétés géométriques communes à toutes les formes transportables entre elles et qui sont marquées particulièrement par les courbes anallagmatiques, mais qui au fond réposent sur des vérités algébriques, est-il très convénient, de considérer toutes les transformations transportables l'une dans l'autre comme équivalentes et de les représenter par une d'entre elles. Le choix de tel représentant sera l'objet d'un nouveau raisonnement. Les transformations, qui ici seront pro-

*) Le tableau complet de cette caractéristique se trouve dans le Supplément, p. 175 (Août 1886).

posées comme types, jouissent de cette propriété éminente, que chacune d'elles donne lieu à une seule variété et en outre que parmi les transformations équivalentes elles ont dans la caractéristique le plus petit nombre de points.

III. 1. a' en b, b' en c, c' en a.	Indice 6.	(B_6) équivalente à	1 var.
2. a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a.	15.	(B_{15})	1
3. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en b	9.	(B_9)	2
4. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b.	12.	(B'_{12})	3
5. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b.	14.	(B_{14})	3
6. (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b.	20.	(B_{20})	4
7. (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c'_3 en b.	24.	(B_{24})	5
8. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en c.	12.	(B_{12})	6
9. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en c.	18.	(B_{18})	10
10. (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en c.	30.	(B_{30})	11

B_{15} est une répétition de B_{30}, B_9 est réductible à la répétition de B_{18}.

Les transformations isolées aux indices 2, 5, 6, 8 ont été l'objet d'une recherche minutieuse et sont réductibles les trois premières à des homographies, la 4ième à une caractéristique de la 6ième classe *).

Les 9 classes sont équivalentes aux 3 suivantes:

IV. 1. Le type de l'homographie	Indice arbitraire,
2. Le type (cc'), a' en $a'_1 \ldots$ en $a'_m = b$, b' en $b'_1 \ldots$ en $b'_m = a$	$2(m+1)$
3. Le type (cc'), $(a'b)$, b' en $b'_1 \ldots$ en $b'_m \equiv a$.	$2(m+1)$.

4. Toutes les transformations du tableau II. jouissent d'une courbe anallagmatique du 3ième ordre, qui est ou décomposée en trois droites, ou en droite et conique ou C_e ou C_h ou C_3^3. Une C_3^4 invariable entre dans quelques transformations des §§ 30, 31 réductibles à une homographie et dans 29 du tableau III.

L'ensemble de trois droites se trouve chez 2. 3. 11. 25. 28. 29. § 16, II. $m=1$, l'ensemble de droite et conique chez 1. 2. 3. 5. 6. 7. 8. 9 10. 13. 14. 15. 16. 17. 22. 23. 24. 25. 26. 28. Les deux parties se touchent toujours, seulement pour quelques transformations, qui appartiennent aux classes, y a-t-il deux intersections séparées (voir § 31).

$u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ admet 1. 2. 3. 5. 11. 13. 14. 15. 16. 17. 25. 27. 29.

$u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ admet 2. 4. 5. 11. 12. 14. 15. 18. 22. 26.

$u' + iu \equiv \gamma$ admet 1. 5. 6. 13. 21. 24. 25.

Quant aux types on a le tableau suivant:

V. B_6, B_{12} ont une C_3 décomposée en trois droites d'un triple périodique.

B_{12}, B_{18} ont une C_3 décomposée en droite et conique tangentes entre elles.

B'_{12}, B_{20}, B_{12} ont une C_h, $u' - iu \equiv \gamma$.

B_6, B_{12}, B_{18}, B_{30} ont C_e, $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$.

B_6, B_9, B'_{12} ont C_e, $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$.

*) Les variétés, auxquelles les types B sont équivalentes ont été établies directement sauf n. 3., mais la voie la plus sûre est celle, qu'on prend une forme de celles, que j'ai proposées comme types, et qu'on leur applique toutes les transpositions, qui conduisent à une caractéristique donnée à l'avance. Ainsi s'explique-t-il, que le nombre des variétés et le nombre des points de la caractéristique vont en même temps en croissant.

Toutes les formes prises comme types ont une C_3^3 *anallagmatique à l'exception seulement de* B'_{12}. On pourrait lever cette dyssymétrie en substituant une forme équivalente p. e. une variété de n. 5 du tableau II.

Un seul type, savoir B_6 jouit d'une C_3 anallagmatique d'un invariant arbitraire et *possède donc un paramètre variable.*

Les types B_6, B_9, B_{12} possèdent un système linéaire de ∞^3 C_3, B'_{12}, B_{14}, B_{18} un réseau et B_{15}, B_{20}, B_{24}, B_{30} un faisceau de C_3, anallagmatique pour la transformation. Savoir ils ont resp. 6, 7, 8 points dans la caractéristique.

5. Maintenant on peut se convaincre aussi qu'il n'y a nulle transformation périodique, qui aurait deux points doubles infiniment rapprochés.

Les indices des points doubles sont quelquefois difficiles à déterminer *). On peut se servir du théorème du § 34. Le point d_2 sur C_3^3 sert toujours de point base à un faisceau de C_3, dont on peut déterminer par d'autres conclusions l'indice qui alors sera aussi l'indice de d_2.

Ainsi on trouve pour B_{30} les indices 30, 5, B_{14} 14, 14, 14, B_{24} 4, 24, 24, B_{12} 1, 2, 3 B_6 3, 6, 6, 6, B_9 9, 9, 9 B_{15} 15, 15, 5, 15, et par transposition pour B_{18} 18, 18. Les indices pour B'_{12} se trouvent égaux à 12, 12, 12 et ceux de B_{20} à 20, 10, 20.

On se servira aussi avantageusement des transformations internes, si on les a recherché à part.

Du reste on ne doit considérer seulement l'indice dans un point double mais aussi les indices entre les points à distance infiniment petite du 2^d ordre. Car une $\mathfrak{C}^2$, qui possède d comme point double change $\bar{d}$ et $\bar{\bar{d}}$ en deux points doubles séparés et les indices du 2^d ordre en les indices du 1er ordre. p. e. B_{18} a un point double avec l'indice 18 et avec les deux sous-indices 2, 3 et les points doubles sur $c\,c'$ du § 18. IV. ont les indices 2. 3.

6. *Les groupes d'un indice moindre* que l'indice entier de Q^2, sont en nombre infini pour B_6 et l'indice 2, B_6, B_9, B_{12}, B_{15} et l'indice 3, B_{12}, B_{20}, B'_{12} et l'indice 4, B_{15} et l'indice 5, B_{12}, B_{18}, B_{30} et l'indice 6, B_{14} et l'indice 7, B_{24} et l'indice 8, B_{18} et l'indice 9, B_{20}, B_{30} et l'indice 10, B_{30} et l'indice 15.

Par rapport aux groupes discrets d'indice plus bas les types se comportent de la manière suivante:

B_{12}, B_{18}, B_{30} ont un t.iple et une couple involutive;
B'_{12}, B_{20} une couple involutive;
B_{24} un quadruple.

7. Les types B_6, B_9, B_{12} ont été *construits* indépendamment des cubiques anallagmatiques. La construction de B_{20} s'effectue en construisant une C_h, dont on connaît un nombre suffisant de points et en y complétant une correspondance $u' - iu \equiv \gamma$, dont on connaît une paire. Pour construire B_{30}, il faut séparer parmi les courbes avec un quadrangle in-et circonscrit donné la courbe équianharmonique **) et compléter une correspondance $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$, dont on connaît le point double.

*) La difficulté est provoquée par cela qu'un point double ne devient sommet d'un faisceau de C^3, sans qu'un autre lui est infiniment voisin.

**) Cela n'exige que la solution d'une équation cubique.

Pour B_{18} prend-on trois triangles, qui forment une configuration (C) $(3, 3)_9$ de sorte que la C_3, qui y passe, soit équianharmonique, alors un point de (C) comme point double et complète la correspondance. B'_{12} se construit d'une manière analogue.

B_{12}, B_{18}, B_{30} admettent une autre construction élégante, qui est basée sur la connaissance des indices des points d. Les droites d (c, c', b', a') déterminent dans tous ces cas une suite de l'homographie des voisins de d et l'homographie entière. Donc le lieu des points d_1 à un indice donné est (suivant K. 4.) composé de coniques par $a'b'c'c$.

Pour B_{30} d_1 se trouve sur une des 4 coniques $R_{\varepsilon_{30}}$, $R_{\varepsilon^7_{30}}$, $R_{\varepsilon^{11}_{30}}$, $R_{\varepsilon^{13}_{30}}$ et d_2 sur une des deux conique R_{ε_5}, $R_{\varepsilon^2_5}$. La conjonction des points d_1, d_2 est dans tous les cas une inversion avec $a'b'$, $c'c$ comme centre et la conique, qui touche $a'b'$, $c'c$ en b', c' et passe par ($a'c'$, $b'c$) comme directrice. Il y a, comme nous avons trouvé, 8 points d_2, dont chaque $R_{\varepsilon_{30}}$ doit contenir 4, et puisque chaque $R_{\varepsilon_{30}}$ doit contenir 4 points d_1, il faut que R_{ε_5}, ou $R_{\varepsilon^2_5}$, soit liée avec deux $R_{\varepsilon_{30}}$. Cette correspondance est telle, que $R_{\varepsilon_{30}}$, $R_{\varepsilon^{11}_{30}}$ (et par conséquent $R_{\varepsilon^7_{30}}$, $R_{\varepsilon^{13}_{30}}$, appartiennent à la même R_{ε_5} et plus précisément, que $R_{\varepsilon_{30}}$ appartient à $R_{\varepsilon^6_{30}}$.

On construira donc la conique inverse de $R_{\varepsilon^6_{30}}$ et la fera rencontrer $R_{\varepsilon_{30}}$ et $R_{\varepsilon^{11}_{30}}$, ce qui donne les 2, 2 points d_1, dont les conjugués sont 4 points d_2. On procèdera analoguément pour $R_{\varepsilon^{12}_{30}}$.

Le probléme des d_i se résout donc au moyen d'une équation biquadratique et de 5 équations quadratiques.

Pour B_{18} et B_{12} la construction est tout-à-fait analogue. Pour B_{12} j'ai déjà démontré la division en deux problèmes quadratiques (Voir §§ 26 et 29).

8. Une circonstance, que je ne veux pas passer sous silence est celle, que toutes les transformations équivalentes, qui jouissent d'une même correspondance du genre 1 fournissent pour les paramètres des valeurs, qui sont parties précises des périodes avec le même dénominateur. Comp. p. e. § 10. II., 18 I, 26.

9. On a rencontré des faisceaux de cubiques équianharmoniques chez les Q^2 suivantes du tableau II: 1. 4. 5. 8. 18. 11. 12. 13. 14. 16. 18. 20. 25. 26. 27. 29. de cubiques harmoniques chez: 1. 13. 22. 24. 26 et aussi § 10. I. et § 16 II. 1. Pour les C_e comp. aussi § 2 et § 30, 4, $m=1$.

Les indices pour les faisceaux anallagmatiques sont dans:

B_6 1, 2, 3, 6	B'_{12} 3, 4, 12
B_9 3, 9	B'_{18} 3, 9
B_{12} 2, 3, 4, 6, 12	B_{20} 10
B_{14} 7	B_{24} 4
B_{15} 5	B_{30} 5

[*Supplément.* La caractéristique a' en b, b' en c, c' en c'_1 en a, dont le tableau n'a pas été complété dans le § 13, a le tableau suivant à l'indice 30.

Droite en		Droite en	
C_2	$a' \quad b' \quad c'$	C_2	$b \quad c \quad a$
C_4	$a'^2 \; b \; b'^2 \; c \; c'^2 \; c'_1$	C_4	$a' \; b^2 \; b' \; c^2 \; c'^2_1 \; a$
C_6	$a'^2 \; b^2 \; b'^3 \; c^2 \; c'^3 \; c'^2_1 \; a$	C_6	$a'^2 \; b^3 \; b'^2 \; c^2 \; c'^2 \; c'_1 \; a^3$
C_7	$a'^2 \; b^2 \; b'^3 \; c^3 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^2$	C_7	$a'^3 \; b^3 \; b'^2 \; c^2 \; c' \; c'^3_1 \; a^3$
C_7	$a'^2 \; b^2 \; b'^2 \; c^3 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^3$	C_7	$a'^3 \; b^2 \; b'^2 \; c^2 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^3$
C_6	$a'^2 \; b^2 \; b' \; c^2 \; c'^2 \; c'^3_1 \; a^3$	C_6	$a'^2 \; b \; b'^2 \; c^2 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^2$
C_5	$a'^2 \; b^2 \; b' \; c \; c' \; c'^2_1 \; a^3$	C_5	$a' \; b \; b'^2 \; c^2 \; c'^3 \; c'^2_1 \; a$
C_4	$a'^2 \; b^2 \; b' \; c \quad c'_1 \; a^2$	C_4	$a' \; b \; b'^2 \; c^2 \; c'^2 \; c'_1$
C_3	$a' \; b^2 \; b' \; c \quad a$	C_3	$a' \; b \; b'^2 \; c \; c'$
C_2	$b \; b' \; c$	C_2	$a' \; b \; b'$
C_2	$b' \; c \; c'$	C_2	$a' \; b \quad a$
C_3	$a' \quad b' \; c \; c'^2 \; c'_1$	C_3	$a' \; b \quad c \quad c'_1 \; a^2$
C_5	$a'^2 \; b \; b'^2 \; c \; c'^3 \; c'^2_1 \; a$	C_5	$a' \; b^2 \; b' \; c^2 \; c' \; c'^2_1 \; a^3$
C_7	$a'^3 \; b^2 \; b'^3 \; c^2 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^2$	C_7	$a'^2 \; b^3 \; b'^2 \; c^3 \; c'^2 \; c'^3_1 \; a^3$

$C_8 \quad a'^3 \; b^3 \; b'^3 \; c^3 \; c'^3 \; c'^3_1 \; a^3$

Toutefois une pareille transformation n'existe pas. Car les deux couples involutives impropres $a'b$, $b'c$ demandent nécessairement la troisième $c'a$. D'autre part un faisceau anallagmatique de C_3 constitué par deux points doubles propres ne pourrait avoir que l'indice 6, à cause des courbes rationnelles, mais l'indice 6 et deux points doubles dans une C_3 sont imcompatibles.

Quant aux caractéristiques de § 16. II. (voir l'annotation de la page 173), chaque $2\nu\,(m+1)^{\text{ième}}$ caracteristique successive possède le point b, chaque $2\mu\,(n+1)^{\text{ième}}$ caractéristique le point a, toutes les caractéristiques contiennent c et donc la $2\,N^{\text{ième}}$ abc. Dans ce dénombrement on a commencé par la droite et μ, ν signifient des nombres entier quelconques.]

APPENDICE

Je propose ici quelques autres méthodes générales, capables de fournir tout d'un coup toutes les transformations quadratiques, méthodes, qui tout en paraissant indispensables à la première vue, ont été privées de leur importance capitale par la théorie des caractéristiques et les recherches, que nous avons basées sur elles.

I. L'usage conséquente des coniques directives comme point de départ.

Probléme. On a deux coniques et sur chacune d'elles une paire de points. Chaque conique sert de courbe directive pour une homographie des deux faisceaux qui ont leurs sommets dans les deux points pris sur cette conique. En employant ces deux ho-

mographies pour constituer une affinité du plan, on demande la condition, afin que l'affinité soit périodique.

II. La position mutuelle des deux triangles principaux comme point de départ (Voir § 1). Ce serait, de mon avis, un *probléme fort à propos, que d'établir le système complet des formes covariantes auxquelles deux triangles simultanés donnent origine.*

Incidemment à cette recherche on rencontrera nécessairement ces invariants, dont la disparition caractérise la position exigée pour la possibilité des transformations périodiques soit des 9 classes soit des 50 variétés.

III. Les réseaux de transformations quadratiques comme point de départ. Pour en faire usage soit séparément soit aidé par la théorie des caractéristiques, il faudrait simplifier cette théorie des réseaux.

IIIième Partie

TRANSFORMATIONS PÉRIODIQUES CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES

A) — Transformations cubiques.

§ 1. — Généralités.

A. Les principes admis comme point de départ ou acquis durant la recherche suffiront pour établir la théorie suivante. Il y a un seul point de vue davantage, c'est la demande des transformations engendrées par la répétition d'une Q^2 ou Q^3, laquelle n'a pas dû être traitée séparément, les Q^2 de la 3ième section étant les seules, dont la répétition fait retomber à des Q^2. Aussi la question ne devient considérable que par l'augmentation du degré.

En abordant je vais préciser le probléme à résoudre et contourner le but à atteindre dans cette partie. Ici on posera nullement le probléme, de trouver toutes les formes ou variétés comme pour les Q^2, on se contentera de posséder les différents procédés, pour déduire les transformations, désignées à satisfaire à certaines conditions. Tout en daignant l'intérêt, que les formes réductibles pourront offrir, j'insiste plutôt à établir celles qui ne sont réductibles ni à une homographie ni à une Q^2.

J'applique donc premièrement le principe de l'enchaînement des points fondamentaux et puis sur le champ le principe de la transposition, pour enlever les formes, réductibles aux homographies ou aux Q^2. Je remarque, qu'il n'y a aucune difficulté à dériver a priori toutes les Q^2, qui dérivent d'une Q^3 ou d'une homographie par transposition. Enfin j'emploie les transformations successives, pour écarter toutes les caractéristiques qui malgré l'enchaînement ne produisent pas la périodicité. Ce qui reste, sont des caractéristiques irréductibles et à tableau fermé. Cela fait, raisonnera-t-on comme antérieurement soit pour construire les transformations soit pour en démontrer définitivement la périodicité. J'observe, que les $\mathfrak{T}^2$ intermediaires, qui seront appliquées,

ne cessent d'exister, que si les trois points fondamentaux, qui leurs sont principaux, deviennent alignés ou forment un triangle infiniment petit à des angles finis.

B. *Condition générale pour les points fondamentaux.*

Première démonstration. Toute transformation cubique entre EE', quelque soit la disposition des points fondamentaux, peut être engendrée par application successive de deux transformations quadratiques P et P' entre EE', si dans E_1 deux points fondamentaux de P, P' coincident. Soient les points fondamentaux

pour P	$E(aa_1a_2)$	$E_1(a'a'_1a'_2)$	
pour P'		$E_1(a'b'_3b'_4)$	$E'(bb_3b_4)$

et supposons que P change les points $b'_3b'_4$ en a_4a_3 de E et que P' change $a'_1a'_2$ en b_2b_2 de E'. La transformation $Q^3 = P.P'$ aura $a^2a_1a_2a_3a_4$ et $b^2b_1b_2b_3b_4$ comme fondamentaux et ab, a_ib_i seront accouplés.

Or suivant le § 9, II. partie existent deux homographies, qui à raison de P conduisent $aa_1a_2a_3a_4$ en $a'a'_1a'_2b'_4b'_3$ et à raison de P' : $a'b'_3b'_4a'_1a'_2$ en $bb_3b_4b_1b_2$.

En les appliquant de suite, on élimine les points auxiliaires dans E_1 et obtient

$$a \text{ en } b\ ,\ a_1 \text{ en } b_1\ ,\ a_2 \text{ en } b_2\ ,\ a_3 \text{ en } b_3\ ,\ a_4 \text{ en } b_4\ .$$

Cela veut dire: Afinque $a^2a_1a_2a_3a_4$ et $b^2b_1b_2b_3b_4$ soient les deux systèmes fondamentaux pour une transformation cubique birationnelle, il faut et il suffit, qu'une homographie changeant les points a par ordre en les points b se peut établir. Alors ils donnent lieu à cinq différentes Q^3.

Seconde démonstration. Les points fondamentaux accouplés de Σ, Σ' seront désignés par $a^2b^2, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4$. Alors se correspondent a et conique B $(bb_1b_2b_3b_4)$, a_i et droite bb_i, a_ia_j et droite b_kb_l, droite aa_i et b_i, conique A $(aa_1a_2a_3a_4)$ et b

$$A_4 \left\{ \begin{array}{ll} aa_1 + a_2a_3 & b_1\ b_4 \\ aa_2 + a_3a_1 & b_2\ b_4 \\ aa_3 + a_1a_2 & b_3\ b_4 \\ aa_1a_2a_3a_4 & b\ b_4 \end{array} \right.$$

Droites par a Droites par b

Les faisceaux a, b sont rapportés homographiquement, donc: $a(a_1a_2a_3a_4)$ et $b(b_1b_2b_3b_4)$ sont deux quadruples homographiques. Ensuite se correspondent homographiquement d'une part les coniques A_4 et les droites par b_4 et d'autre par les A_4 et leurs tangentes en a. Donc, $a\alpha$ étant la tangente de A en a

$$a(a_1a_2a_3\alpha) \pi b_4(b_1b_2b_3b)\ .$$

En outre $a(a_1a_2a_3a_4) \pi b(b_1b_2b_3b_4)$ et $a(a_1a_2a_3\alpha) \pi b(b_1b_2b_3b)$ où la dernière formule se complète par $b_4(b_1b_2b_3b) \pi b(b_1b_2b_3\beta)$, $b\beta$ étant la tangente de B en b. Donc $a_1(a_1a_2a_3\alpha) \pi b(b_1b_2b_3\beta)$ et en tout

$$a(a_1a_2a_3a_4\alpha) \pi b(b_1b_2b_3b_4\beta) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

[Γ. *Les systèmes fondamentaux particularisés.*

Ces particularisations consistent en ce que des points fondamentaux sont alignés ou infiniment voisins. Tel accident entraîne toujours quelque particularisation dans le second plan et je me propose de donner l'énumération de tous ces cas possibles.

Notations. Je désignerai par $(p_1 p_2)$, $(p_1 p_2 p_3)$, que 2, 3, 4 points sont infiniment voisins vers la même direction, par $(p_1 p_2 p_3)^1$, que p_1, p_2, p_3 sont alignés par $(p p_1)$ $(p p_2)$ que p_2 et p_1 sont voisins de p sous un angle fini et par $(b b_1)$ $(b b'_1)$ que toutes les courbes du réseau ont en b un point de rebroussement à tangente fixe. Dans ce dernier cas b'_1 tient lieu du point b_2.

1. $(a_1 a_2)$ . . . . . $(b_1 b_2)$
2. $(a_1 a_2)$, $(a_3 a_4)$ . . . . . $(b_1 b_2)$, $(b_3 b_4)$
3. $(a_1 a_2 a_3)$ . . . . . $(b_1 b_2 b_3)$
4. $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ . . . . . $(b_1 b_2 b_3 b_4)$
5. $(a_1 a_2 a_3)^1$ . . . . . $(b b_4)$
6. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2)$ . . . . . $(b b_4)$, $(b_1 b_2)$
7. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_3 a_4)$ . . . . . $(b b_3 b_4)$
8. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2)$, $(a_3 a_4)$ . . . $(b b_3 b_4)$, $(b_1 b_2)$
9. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2 a_4)$ . . . . . $(b b_1 b_2 b_4)$
10. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2 a_3)$ . . . . . $(b_1 b_2 b_3)$, $(b b_4)$
11. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2 a_3 a_4)$. . . . . $(b b_1 b_2 b_3 b_4)$
12. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a a_4)$. . . . . $(b_1 b_2 b_3)^1$, $(b b_4)$
13. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a a_4)$, $(a_1 a_2)$ . . . . $(b_1 b_2 b_3)^1$, $(b b_4)$, $(b_1 b_2)$
14. $(a_1 a_2 a_3)^1$, $(a_1 a_2 a_3)$ $(a a_4)$ . . . $(b_1 b_2 b_3)^1$, $(b_1 b_2 b_3)$, $(b b_4)$
15. $(a a_1)$ $(a a_2)$ . . . . . $(b b_3)$, $(b b_4)$
16. $(a a_1)$, $(a a_2)$, $(a_3 a_4)$ . . . . . $(b b_3)$, $(b b'_3)$
17. $(a a_1 a_2)$, $(a a_4)$ . . . . . $(b b_1 b_2)$, $(b b_3)$
18. $(a a_1 a_2)$, $(a a_3 a_4)$ . . . . . $(b b_1 b_2)$, $(b b_3 b_4)$
19. $(a a_1 a_2 a_3)$, $(a a_4)$ . . . . . $(b b_1 b_2 b_3)$, $(b b_4)$
20. $(a a_1)$, $(a a'_1)$, $(a_3 a_4)$ . . . . . $(b b_3)$, $(b b'_3)$, $(b_1 b_2)$
21. $(a a_3 a_3)$, $(a a'_4 a_4)$ . . . . . $(b b_3 b_1)$, $(b b'_3 b_3)$.

J'omets à préciser comment dans les différents cas la condition de ci-haut se change.]

§ 2. — Dénombrement des transformations cubiques, qui sont répetitions d'une transformation quadratique.

L'affinité entre les points et leurs $f^{\text{èmes}}$ transformés par une Q^2 périodique à l'indice n, a elle-même l'indice n; f ou n, selon que f est facteur de n ou non. Les points fondamentaux sont évidemment ou les points fondamentaux de Q^2 ou leurs transformés et pour avoir les courbes fondamentales correspondantes, on cherche les $f^{\text{èmes}}$ trans-

*

formées des points fondamentaux. Dans la suite les 5 paires de points écrites en parenthèse désignent les points de l'ancienne caractéristique, qui joue dans la nouvelle notation le rôle de ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4.

Par deux applications donne: § 16. I. $(cc', ab', ba'_1, a'_{m-1}b', b'_{n-1}a')$

$m \equiv 0$, $n \equiv 0$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m}{2}} = b_4$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{n}{2}} = b_3$
Indice $\frac{m+n+2}{2}$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m}{2}-1} = b_2$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{n}{2}-1} = b_1$

;

$m \equiv 0$, $n \equiv 1$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m}{2}} = b_4$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{n-1}{2}} = b_1$
Indice $m+n+2$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m}{2}-1} = b_2$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{n-1}{2}} = b_3$

$m \equiv 1$, $n \equiv 0$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m-1}{2}} = b_2$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{n}{2}} = b_3$
Indice $m+n+2$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{2}} = b_4$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{n}{2}-1} = b_1$

;

$m \equiv 1$, $n \equiv 1$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m-1}{2}} = b_2$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{n-1}{2}} = b_1$
Indice $\frac{m+n+2}{2}$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{2}} = b_4$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{n-1}{2}} = b_3$

et toujours la coincidence (ab).

§ 16. II. $(cc', ab'_1, ba'_1, a'_{m-1}b', b'_{m-1}a')$

$m \equiv 0$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m}{2}} = b_3$
Indice $m+1$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{m}{2}} = b_4$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m}{2}-1} = b_1$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{m}{2}-1} = b_2$

$m \equiv 1$, mod 2: $a_1 \ldots a_1^{\frac{m-1}{2}} = b_1$
Indice $m+1$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{m-1}{2}} = b_2$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{2}} = b_3$
$a_4 \ldots a_4^{\frac{m-1}{2}} = b_4$

et toujours la coincidence (ab).

§ 16. III. $(ba', b'c'_1, c'_{m-1}b', cb, a'c')$

$m \equiv 0$, mod 2: $a_2 \ldots a_2^{\frac{m-2}{2}} = b_1$
Indice $\frac{m+4}{2}$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m}{2}} = b_4$

;

$m \equiv 1$, mod 2: $a_2 \ldots a_2^{\frac{m-1}{2}} = b_4$
Indice $m+4$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{2}} = b_1$

et toujours (ab_3), (ba_4), (a_1b_2).

§ 16. IV. $(ba', b'c'_1, c'_{m-1}b', ca'_1, a'_1c')$

$m \equiv 0$, mod 2: $a_3 \ldots a_4^{\frac{m}{2}} = b_4$
Indice $m+1$
$a_2 \ldots a_2^{\frac{m-2}{2}} = b_1$

;

$m \equiv 1$, mod 2: $a_2 \ldots a_2^{\frac{m-1}{2}} = b_4$
Indice $m+1$
$a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{2}} = b_1$

et toujours a en b, (a_1b_2), (a_4b_3).

§ 18. I. $(ba', b'c, c'b', ca'_1, a'_2c')$

a en b_3, b en a_4, (a_1b_2), (a_2b_4), (a_3b_1) Indice 6

II. $(ba', b'c, c'b', ca'_1, a'_3c')$

a en a' en b_4, (a_1b_2), (a_2b_4), (a_3b_1), a_4 en b_3 Indice 9

III. $(ba'_1, b'c'_1, c'_1b'_1, ca'_1, a'_2c')$

a en b_3, b en a_4, (a_1b_2), (a_2b_1), a_3 en b_4 Indice 9

IV. $(ba', b'c, c'b', ca'_1, a'_1c')$

a en a' en b_3, a_4 en a'_4 en b, (a_1b_2), (a_2bl), (a_3b_1) Indice 15

V. $(ba'_1 b'c'_1, c'_2b'_1, ca'_1, a'_2c')$

a en b_3, b en a_4, (a_1b_2), a_2 en b_4, a_3 en b_1 Indice 15

§ 19. $(ba', b'c'_1, a'b', cc, c'_1c')$

a en b_3, (a_2b), (a_1b_2), (a_3b_3), (a_4b_1) Indice 9

§ 20. $(ba', b'c'_1, a'_1b', ca'_1, c'_1c')$

a en b_4, a_3 en b, (a_1b_2), (a_2b_3), $a_4b_1)$ Indice 6

§ 21. $(ba', b'c'_1, a'b', cc, c'_2c')$

a en b_1, (a_2b), (a_1b_2) (a_3b_3), a_4 en b_4 Indice 7

§ 22. $(ba', b'c'_1, a'_1b', ca'_1, c'_2c')$

a en b_1, b en a_3, (a_1b_2), (a_3b_3), a_4 en b_1 Indice 10

§ 23. $(ba', b'c'_1, a'b', cc, c'_3c')$

a en a' en b_4, (ba_2), $a_1b_2)$, (a_3b_3), a_4 en b_1 Indice 12

Par trois applications donne § 24. $(cc', b'b', a'_{m-1}a'_1, a'_{m-2}a', ba'_2)$

$m \equiv 0 \bmod 3 : a_4 \ldots a_4^{\frac{m}{3}} = b_3$ $\quad m \equiv 1 \bmod 3 : a_3 \ldots a_4^{\frac{m-1}{3}} = b_2$ $\quad m \equiv 2 \bmod 3 : a_4 \ldots a_4^{\frac{m-2}{3}} = b_4$

$a_3 \ldots a_3^{\frac{m}{3}-1} = b_2$; $\quad a_3 \ldots a_3^{\frac{m-1}{3}} = b_4$; $\quad a_3 \ldots a_3^{\frac{m-2}{3}} = b_3$

$a_2 \ldots a_2^{\frac{m}{3}-1} = b_4$ $\quad a_2 \ldots a_2^{\frac{m-1}{3}} = b_3$ $\quad a_2 \ldots a_2^{\frac{m-2}{3}} = b_2$

et toujours (ab), (a_1b_1).

§ 25. $(ca', a'b', b'c', c'c, a'_1a'_1)$

(ab_3), (ba_1), (a_2b_1), (a_3b_2), (a_4b_4) Indice 8

§ 26. $(ca', a'_1b', b'c', c'a'_2, a'_2a'_1)$

a en b, (a_1b_4) (a_2b_1), (a_3b_2), (a_4b_3) Indice 4

§ 27. $(ca', a'_2b', b'c', c'a'_2, a'_3a'_1)$

a en b_4, b en a_4, (a_1b_3), (a_2b_1), (a_3b_2) Indice 6

§ 28. $(ca', a'_3b', b'c', c'a'_2, a'_4a'_1)$

a en b_3, b en a_1, (a_2b_1), (a_3b_2), a_4 en b_4 Indice 10

Les variétés des Q^2 donnent évidemment lieu à des variétés de Q^3.

Restent encore à citer les Q^3, qui sont produites par répétition d'une Q^3 du texte suivant.

§ 3. — Les deux points doubles coincident.

a) En commençant nous demandons, si la périodicité soit possible sans aucune coincidence de points fondamentaux. Alors le cas le plus favorable serait l'enchaînement direct b en a et des quatre points a_i avec les b_i et parceque l'ordre de ce dernier enchaînement est indifférent, je prends b_i en a_i. Les transformations successives sont

$$\begin{array}{lllllllllll}
C_3 & b^2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & & \\
C_9 & b^6 & b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 & a^2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
C_{19} & b^{10} & b_1^6 & b_2^6 & b_3^6 & b_4^6 & a^6 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\
C_{33} & b^{20} & b_1^{10} & b_2^{10} & b_3^{10} & b_4^{10} & a^{10} & a_1^6 & a_2^6 & a_3^6 & a_4^6 \\
C_{55} & b^{32} & b_1^{17} & b_2^{17} & b_3^{17} & b_4^{17} & a^{20} & a_1^{10} & a_2^{10} & a_3^{10} & a_4^{10} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

et les différences successives des ordres

$$\begin{array}{ccccccc}
2, & 6, & 10, & 14, & 22, & 30, & 42, \ldots \\
4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 12 & \ldots
\end{array}$$

Donc il n'y a pas périodicité.

b) Les cas suivants sont à considérer dans ce §.

$$\begin{array}{ll}
b_1 \text{ en } b'_1 \ldots b_1^{(m)} = a_i & b_3 \text{ en } b'_3 \ldots b_3^{(p)} = a_k \\
b_2 \text{ en } b'_2 \ldots b_2^{(n)} = a_j & b_4 \text{ en } b'_4 \ldots b_4^{(q)} = a_l
\end{array}$$

i, j, k, l étant égaux à I. 1, 2, 3, 4, II. 2, 1, 3, 4, III. 2, 1, 4, 3, IV. 2, 3, 1, 4, V. 2, 3, 4, 1.

I. Pour obtenir une caractéristique à tableau fermé, il est permis de prendre m, n, p, q arbitraires. Si N est le plus petit multiple des nombres $m+1$, $n+1$, $p+1$, $q+1$, on aura toujours un tableau à l'indice 2N. L'existence effective dépend de ce que $m=n=p=q$, car l'homographie dans a possède les cycles a $(b_i b_i \ldots a_i)$, et a l'indice $m+1$. Voici les transformations successives :

$$\begin{array}{llll}
\text{Droite} & & & \\
C_3 & b^2 & b_i & \\
C_5 & b^4 & b_i\ b'_i & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
C_{2m+1} & b^{2m} & b_i\ b'_i \ldots\ldots b_i^{(m-1)} & i=1, 2, 3, 4 \\
C_{2m+3} & b^{2m+2} & b_i\ b'_i \ldots\ldots b_i^{(m-1)}\ a_i & \\
C_{2m+1} & b^{2m} & b'_i \ldots\ldots b_i^{(m-1)}\ a_i & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
C_5 & b^4 & b_i^{(m-1)}\ a_i & \\
C_3 & b^2 & a_i & \\
\text{Droite} & & &
\end{array}$$

II. L'homographie en a contient les cycles $a(b_2 b'_2 \ldots a_1 a_1 a_1 \ldots a_2)$,

$$a(b_3 b'_3 \ldots a_3) \quad , \quad a(b_4 b'_4 \ldots a_4)$$

donc $p = q = m + n + 2$. $(a b_1 b'_1)^2$ donne

$$P(a b_1 b'_1) \text{ en } \begin{cases} \delta_2(a^3 b_1 b'_2 b_3 b_4 b'_1 b''_1) \text{ en } \gamma'_2(A^2 B_2 B_3 B_4 B''_1) \\ \gamma_1(a^2 a_2 a_3 a_4 b_1) \text{ en } \gamma'_1(A^2 A_2 A_3 A_4 B_1) \end{cases}$$

$B_2 A_2, B_3 A_3, B_4 A_4, B''_1 B_1$ deviennent accouplés. Les paires $A_3 B_3, A_4 B_4$ sont enchaînées par $m + n$, $B_2 B_1$ par $m + 1$, $B''_1 A_2$ par $n - 1$ intercalés.

En continuant par transposer par des transpositions analogues, on fait croître n et diminuer m, jusqu'à ce qu'on arrive à b_1 en a_2 ou à $(b_1 a_2)$. Alors suivant le cas on applique $(a b_1 a_2)^2$ ou $(a b_1 a_3)^2$ et obtient

$$\begin{matrix} \gamma_2(a^2 b_1 b_3 b_4 a_2) \text{ en } \beta'_2(AB_3 B_4) \\ \gamma_1(a^2 a_2 a_3 a_4 b_1) \text{ en } \beta'_1(AA_4 A_3) \end{matrix} \quad \text{et } B_3 \text{ en } \ldots A_3 \text{ , } B_4 \text{ en } \ldots A_4$$

c'est-à-dire une Q^2 de II. p. § 16. II.

ou
$$\begin{matrix} \beta_2(a b_1 b_4) \text{ en } \beta'_2(AB_1 B_4) \\ \gamma_1(a^2 a_2 a_3 a_4 a'_3) \text{ en } \beta'_1(AA_4 A'_3) \end{matrix} \quad \text{et } A'_3 \text{ en } \ldots B_3 \text{ en } B_1 \text{ , } A_4 \text{ en } \ldots B_4$$

encore une Q^2 de II. p. § 16. II.

III. Il faut $p + q = m + n$. On procède pour la réduction comme tout à l'heure, jusqu'à la dernière transpositions et obtient ou

$\beta'_2(AB_3 A_4)$ et $\beta'_1(AA_3 A_4)$, $B_3 A_4$, $A_3 B_4$ étant accouplés et $B_3 A_4$, $A_3 B_4$ enchaînés, donc une Q^2 de II. § 16. I., réductible à une homographie,
ou $\beta'_2(AB_1 B_4)$ et $\beta'_1(AA_4 A'_3)$, $A'_3 B_1$, $A_4 B_4$ étant accouplés et $A'_3 B_4$, $A_4 B_1$ enchaînés.

IV. Il faut $m + n + p + 2 = q$. Les $(a b_1 b'_1)^2$ conduisent successivement à un résultat analogue à celui de II.

V. Les $(a b_1 b'_1)^2$ suivies des $(a a_1 b_2)^2$ ou $(a a_1 a_3)^2$ conduisent à un résultat analogue à celui de III.

Remarque. Les transpositions de ce § sont toujours applicables.

d) Les cas I, II, IV. admettent une modification de la caractéristique si $(a_4 b_4)$ ou $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ coincident. Le tableau pour I devient

Droite en $i=1,2,3,\ m=2\mu$

$C_3 \quad b^2 \quad b_i \quad b_4$

$C_4 \quad b^3 \quad b_i \quad b'$

$C_5 \quad b^4 \quad b_i \quad b'_i\ b''_i\ b_4$

. . . . . .

$C_{\frac{3m+1}{2}} \quad b^{\frac{3m-1}{2}} \quad b_i \quad b'_i\ b''_i \ldots b_i^{(m-1)}$

$C_{\frac{3m+3}{2}} \quad b^{\frac{3m+1}{2}} \quad b_i \quad b'_i\ b''_i \ldots a_i\ b_4$

$C_{\frac{3m+1}{2}} \quad b^{\frac{3m-1}{2}} \quad b_i \quad b'_i\ b''_i \ldots a_i$

. . . . . .

$C_6 \quad b^5 \quad b_i^{(m-2)}\ b_i^{(m-1)}\ a_i\ b_4$

$C_4 \quad b^3 \quad b_i^{(m-1)}\ a_i$

$C_3 \quad b^2 \quad a_i \quad a_4$

Droite

Droite $i=1,2,3\ ,\ m=2\mu+1$

$C_3 \quad b^2 \quad b_i\ b_4$

$C_4 \quad b^3 \quad b_i\ b'_i$

$C_5 \quad b^4 \quad b_i\ b'_i\ b''_i\ b_4$

. . . . . .

$C_{\frac{3m+1}{2}} \quad b^{\frac{3m-3}{2}} \quad b_i\ b'^m_i b''_i \ldots b_i^{(m-2)}$

$C_{\frac{3m+3}{2}} \quad b^{\frac{3m+1}{2}} \quad b_i\ b'_i\ b''_i \ldots b_i^{(m-1)}\ b_4$

$C_{\frac{3m+5}{2}} \quad b^{\frac{3m+3}{2}} \quad b_i\ b'_i\ b''_i \ldots a_i$

$C_{\frac{3m+3}{2}} \quad b^{\frac{3m+1}{2}} \quad b'_i\ b''_i \ldots \quad a_i \quad b_4$

. . . . . .

$C_4 \quad b^3 \quad b_i^{(m-1)}\ a_i$

$C_3 \quad b^2\ a_i\ b_4$

Droite

et en cas de $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$

Droite $i=1,2 \qquad m=2\mu$

$C_3 \quad b^2 \quad b_i\ b_3\ b_4$

$C_3 \quad b^2 \quad b_i\ b'_i$

. . . . . .

$C_{m+1} \quad b^m \quad b_i\ b'_i\ b_i'' \ldots . b_i^{(m-1)}$

$C_{m+3} \quad b^{m+2} \quad b_i\ b'_i\ b''_i \ldots . b_i^{(m-1)}\ a_i\ b_3\ b_4$

$C_{m+1} \quad b^m \quad b_i\ b'_i\ b_i'' \ldots . b_i$

. . . . . .

$C_3 \quad b^2 \quad b_i^{(m+1)}\ a_i$

$C_3 \quad b^2\ b_3\ b_4\ a_i$

Droite

Droite en $i=1,2 \qquad m=2\mu+1$

$C_3 \quad b^2\ b_i\ b_3\ b_4$

$C_3 \quad b^2\ b_i\ b'_i$

. . . . . .

$C_m \quad b^m \quad b_i\ b'_i \ldots b^{(m-2)}$

$C_{m+2} \quad b^{m+1}\ b_i\ b'_i \ldots b_i^{(m1)}\ b_3\ b_4$

$C_{m+2} \quad b^{m+1}\ b_i\ b'_i \ldots a_i$

. . . . . .

$C_3 \quad b^2\ b_i^{(m-1)}\ a_i$

$C_3 \quad b^2\ a_i\ b_3\ b_4$

Droite

Dans tous les cas l'indice de la périodicité pourrait devenir au moins $2m+2$.

§ 4. — Les deux points doubles sont enchaînés.

a) 1. Il y a b en a. Si alors a_1 b_2 coincident, $(aba_1)^2$ donne

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_2\,(b^2 a b_2 b_3 b_4) \text{ en } \beta'_2\,(\mathrm{B B_3 B_4})\\ \gamma_1\,(a^2 b a_1 a_3 a_4) \text{ en } \beta^i\,(\mathrm{A A_4 A_3})\end{array}\right\}, \text{ A en } \mathrm{A_2}, \text{ B en } \mathrm{B_1}.$$

$\mathcal{T}^2$ est appliquable, sauf que aba_1 soient alignés. Mais une telle disposition est incompatible avec l'enchaînement b en a. Chaque Q^2, qui possède deux points principaux accouplés non coincidents, enchaînés ou non, peut être transposée en cette forme.

2. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$. Indice 4.

Droite en		Droite en	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, a^2$

C_5 $\quad b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, a^2$

3. b en a, $(a_1 b_1)$ $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4 Indice 6.

Droite en		Droite en	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1\, b_2\, b_3\, a\, a_4$
C_6	$b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^3\, a^2\, a_4$	C_6	$b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4\, a_3\, a_4^3$

C_7 $\quad b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^3\, a^3\, a_4^3$

4. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$ b_4 en b'_4 en a_4 Indice 10.

Droite en		Droite en	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$a_1\, a_2\, a_3\, a^2\, a_4$
C_6	$b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^3\, a^2\, b'_4$	C_6	$b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, a^3\, b'_4\, a_4^3$
C_8	$b^4\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^4\, a^3\, b'^3_4\, a_4$	C_8	$b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4\, a^4\, b'^3_4\, a_4^4$
C_{11}	$b^6\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^4\, a^4\, b'^4_4\, a_4^3$	C_{11}	$b^4\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, a^6\, b'^4_4\, a_4^4$

C_{13} $\quad b^6\, b_1^4\, b_2^4\, b_3^4\, a^6\, b'^4\, b_4^4\, a_4^4$

5. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4 Indice 18.

Droite en		Droite en	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1\, b_2\, b_3\, a^2\, a_4$
C_6	$b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^3\, a^2\, b'_4$	C_6	$b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, a^3\, b''_4\, a_4^3$
C_8	$b^4\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^4\, a^3\, b'^3\, b''_4$	C_8	$b^3\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, a^4\, b'_4\, b''^3_4\, a_4^4$
C_{12}	$b^7\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^5\, a^4\, b'^4_4\, b''^3_4\, a_4$	C_{12}	$b^4\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4\, a^7\, b'^3_4\, b''^4_4\, a_4^5$
C_{18}	$b^{10}\, b_1^5\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^7\, a^7\, b'^5_4\, b''^5_4\, a_4^3$	C_{18}	$b^7\, b_1^5\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^3\, a^{10}\, b'^4_4\, b''^5_4\, a_4^7$
C_{22}	$b^{11}\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^5\, a^{10}\, b'^7_4\, b''^7_4\, a_4^4$	C_{22}	$b^{10}\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^4\, a^{11}\, b'^7_4\, b''^7_4\, a_4^8$
C_{24}	$b^{12}\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^8\, a^{11}\, b'^8_4\, b''^7_4\, a_4^5$	C_{24}	$b^{11}\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^5\, a^{12}\, b'^7_4\, b''^8_4\, a_4^8$
C_{27}	$b^{14}\, b_1^7\, b_2^7\, b_3^7\, b_4^8\, a^{12}\, b'^8_4\, b''^8_4\, a_4^4$	C_{27}	$b^{12}\, b_1^7\, b_2^7\, b_3^7\, b_4^7\, a^{14}\, b'^8_4\, b''^8_4\, a_4^8$

C_{30} $\quad b^{14}\, b_1^8\, b_2^8\, b_3^8\, b_4^8\, a^{14}\, b'^8_4\, b''^8_4\, a_4^8$

6. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en b'''_4 en a_4.

Droite en										
C_3	2		1	1	1	1				
C_6	3	2	2	2	2	3	1			
C_8	4	3	2	2	2	4	3	1		
C_{12}	7	4	3	3	3	5	4	3	1	
C_{19}	11	7	5	5	5	8	5	4	3	1
C_{27}	15	11	7	7	7	11	8	5	4	3
C_{35}	19	15	9	9	9	13	11	8	5	4
C_{44}	24	19	11	11	11	16	13	11	8	5
C_{56}	31	24	14	14	14	20	16	13	11	8
C_{70}	38	31	18	18	18	24	20	16	13	11
C_{83}	44	38	21	21	21	28	24	20	16	13
C_{97}	52	44	24	24	24	32	28	24	20	16
C_{115}	62	52	29	29	29	37	32	28	24	20
C_{134}	71	62	34	34	34	43	37	32	28	24
C_{152}	80	71	38	38	38	48	43	37	32	28
C_{172}	91	80	43	43	43	53	48	43	37	32
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les dernières différences des ordres sont

$$1, -1, 2, 3, 1, 0, 1, 3, 2, -1, 1, 4, 1, -1, 2, 3, 1, 0, 1, \ldots$$

et il n'existe pas périodicité.

7. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4. Indice 8.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$a_1\, a_2\, a^2\, a_3\, a_4$
C_7	$b^4\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^3\, b_4^3\, a^2\, a_3\, a_4$	C_7	$b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3\, b_4\, a^4\, a_3^3\, a_4^4$
C_{11}	$b^6\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^4\, b_4^4\, a^4\, a_3^3\, a_4^3$	C_{11}	$b^4\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, a^6\, a_3^4\, a_4^4$
C_{13}	$b^6\, b_1^4\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, a^6\, a_3^4\, a_4^4$		

8. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_4 en a_3, b_3 en a_4 donne le même tableau.

9. Toutes les caractéristiques b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_4 en a_3 sont traduisibles en les caractéristiques de II. p. § 25 au moyen de $a^2 b^2 a_3^2 b_4 a_2 a_1$ comme il suit: $\delta_2\,(b_2 b_4^2 a^2 a_1 b^2 b_1)$ en ABB_4 et $\varepsilon_1\,(b^2 b_4^2 a_4 a_1 a_2 a^3 a_3^2)$ en B_4AA_4; B_4B, AB_4, A_4A sont accouplés et B en $B_3 \ldots A_4$, donc b_3 en b_3 en b_3' en b_3'' en a_4 est le premier cas irréductible. Cette transposition est toujours applicable, et cela se démontre par deux transpositions successives.

10. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4. Indice 14.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_1\ b_2\ a^2\ a_3\ a_4$
C_7	$b^4\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^3\ b_4^3\ a^2\ a_3\ b'_4$	C_7	$b^2\ b_1^2\ b_2^2\ b_3\ b_4\ a^4\ a_3^3\ b'_4\ a_4^3$
C_{12}	$b^7\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^4\ b_4^5\ a^4\ a_3^3\ b'^3_4\ a_4$	C_{12}	$b^4\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^3\ b_4\ a^7\ a_3^4\ b'^3_4\ a_4^5$
C_{18}	$b^{10}\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^7\ a^7\ a_3^4\ b'^5_4\ a_4^3$	C_{18}	$b^7\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^4\ b_4^3\ a^{10}\ a_3^5\ b_4^5\ a_4^7$
C_{23}	$b^{12}\ b_1^6\ b_2^6\ b_3^7\ b_4^8\ a^{10}\ a_3^5\ b'^7_4\ a_4^5$	C_{23}	$b^{10}\ b_1^6\ b_2^6\ b_3^5\ b_4^5\ a^{12}\ a_3^7\ b'^7_4\ a_4^8$
C_{27}	$b^{14}\ b_1^7\ b_2^7\ b_3^8\ b_4^8\ a^{12}\ a_3^7\ b'^8_4\ a_4^7$	C_{27}	$b^{12}\ b_1^7\ b_2^7\ b_3^7\ b_4^7\ a^{14}\ a_3^8\ b'^8_4\ a_4^8$

C_{29} $b^{14}\ b_1^8\ b_2^8\ b_3^8\ b_4^8\ a^{14}\ a_3^8\ b'^8_4\ a_4^8$

11. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4.

Droite en										
C_3	2		1	1	1		1			
C_7	4	2	2	2	3	1	3	1		
C_{12}	7	4	3	3	4	3	5	3	1	
C_{19}	11	7	5	5	5	4	8	5	3	1
C_{28}	16	11	7	7	8	5	11	8	5	3
C_{40}	23	16	10	10	12	8	14	11	8	5
C_{55}	31	23	14	14	16	12	19	14	11	8
C_{71}	39	31	18	18	20	16	24	19	14	11
C_{88}	48	39	22	22	24	20	29	24	19	14
C_{108}	59	48	27	27	29	24	35	29	24	19
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

On ne tombe point sur un tableau fermé, les ordres successifs donnant les différences

2 , 4 , 5 , 7 , 9 , 12 , 15 , 16 , 17 , 20 , 23 , . . .

12. b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4. Indice 12.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_1\ a^2\ a_2\ a_3\ a_4$
C_8	$b^5\ b_1^2\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ a^2\ a_2\ a_3\ a_4$	C_8	$b^2\ b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4\ a^5\ a_2^3\ a_3^3\ a_4^3$
C_{15}	$b^9\ b_1^4\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a^5\ a_2^3\ a_3^3\ a_4^3$	C_{15}	$b^5\ b_1^4\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ a^9\ a_2^5\ a_3^5\ a_4^5$
C_{22}	$b^{12}\ b_1^6\ b_2^7\ b_3^7\ b_4^7\ a^9\ a_2^5\ a_3^5\ a_4^5$	C_{22}	$b^9\ b_1^6\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a^{12}\ a_2^8\ a_3^7\ a_4^7$
C_{27}	$b^{14}\ b_1^7\ b_2^8\ b_3^8\ b_4^8\ a^{12}\ a_2^7\ a_4^7\ a_4^7$	C_{27}	$b^{12}\ b_1^7\ b_2^7\ b_3^7\ b_4^7\ a^{14}\ a_2^{10}\ a_3^{10}\ a_4^{10}$

C_{29} $b^{14}\ b_1^8\ b_2^8\ b_3^8\ b_4^8\ a^{14}\ a_2^8\ a_3^8\ a_4^8$

13. b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4.

Droite en										
C_3	2		1	1		1		1		
C_8	4	2	2	3	1	3	1	3	1	
C_{16}	10	4	4	5	3	5	3	6	3	1
C_{29}	17	10	8	9	5	9	5	11	6	3
C_{46}	27	17	11	14	9	14	9	16	11	6
C_{69}	40	27	18	20	14	20	14	23	16	11
C_{96}	54	40	24	28	20	28	20	31	23	16
C_{128}	72	54	32	36	28	36	28	40	31	23
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les différences des multiplicités dans b sont

4 , 1 , 3 , 3 , 1 , 4 , 1 , 3 , 3 , . . .

14. La caractéristique b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_4, b_4 en a_3 est traduite par $(a b a_1)^2$ en une de la forme $(a b_1)$, $(b a_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_4 et celle-ci par $(a a_4 b_3)^2$ en $A_2^2 B^2$. $A B_2$, $A_4 A_4$, $A_1 A$, $A_3 B_3$, B_2 en A_2, B_3 en B_4 . . . en A_3, savoir $(a b_1)$, b en a_2, $(a_1 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en . . . a_4, ce qui donne par $(a b a_2)^2$: $A B$, $A_4 B_3$, $A_3 B_4$. B en B_2 en A, donc § 16, IV. ou § 18, III. ainsi que b_4 en b'_4 en b''_4 en a_3 est déjà apériodique.

15. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en b'_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4.

Droite en										
C_3	3		1	1	1			1		
C_7	4	2	2	2	3	1		3	1	
C_{13}	8	4	3	3	5	3	1	5	3	1
C_{23}	14	8	6	6	8	5	3	8	5	3
C_{34}	20	14	9	9	12	8	5	12	8	5
C_{49}	28	20	12	12	16	12	8	16	12	8
C_{67}	38	28	17	17	21	16	12	21	16	12
C_{87}	48	38	22	22	27	21	16	27	21	16
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les dernières différences des ordres sont

1 2 2 4 2 2 4 2 2 4 2 2 4 . . .

16. La caractéristique b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en . . . $b_2^{(n)}$ . . a_2, b_3 en a_4 admet la même transposition et est donc déjà apériodique pour $n = 1$ et b_4 en b'_4 en b''_4 en a_3 ou pour $n = 2$ et b_4 en b'_4 en a_3.

17. De là je conclus que b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en b'_3 en a_4 ne sont périodiques non plus, de même pour b_2 en a_2 et pour toutes les caractéristiques à plusieurs intercalés. Et en outre b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en b'_2 en a_2, b_3 en b'_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4 n'étant pas finie, on conclut la même chose pour b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en b'_2 en a_2, b_4 en b'_4 en a_3, b_2 en b'_2 en a_1.

18. b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_3, b_3 en a_4, b_4 en a_2 donne le même tableau que n. 12.

19. b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_3, b_3 en a_4, b_4 en b'_4 en a_2.

Droite en

C_3	2		1	1		1		1		
C_8	5	2	2	3	1	3	1	3	1	
C_{16}	10	5	4	6	3	5	3	5	3	1
C_{27}	16	10	7	10	6	8	5	8	5	3
C_{40}	23	16	10	14	10	11	8	12	8	5
C_{56}	32	23	16	21	14	16	11	19	12	8
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans b sont

$$3\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 10\ ,\ 11\ ,\ 13\ ,\ \ldots$$

b) Il existe des intercalés entre a, b.

1. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 6.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b_1 b_2 b_3 b_4 a^2$
C_5	$b^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b'^2$	C_5	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b'^2 a^2$

C_7 $b^2 b_1^3 b_2^3 b_3^3 b_4^3 b'^2 a^2$.

2. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4 Indice 10.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b_1 b_2 b_3 a_4 a^2$
C_6	$b^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^3 b'^2 a_4$	C_6	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4 b'^2 a^3 a_4^3$
C_{11}	$b^5 b_1^4 b_2^4 b_3^4 b_4^5 b'^3 a^2 a_4^3$	C_{11}	$b^2 b_1^4 b_2^4 b_3^4 b_4^3 a'^3 a^5 a_4^5$
C_{14}	$b^5 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^6 b'^5 a^3 a_4^5$	C_{14}	$b^3 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^5 a^5 a_4^6$

C_{16} $b^5 b_1^6 b_2^6 b_3^6 b_4^6 b'^5 a^5 a_4^6$

3. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4.

Droite en									
C_3	2			1	1	1	1		
C_6	3	2		2	2	2	3	1	
C_{12}	6	3	4	4	4	6	3	1	1
C_{19}	9	6	3	6	6	6	9	6	3
C_{30}	14	9	6	10	10	10	13	9	6
C_{42}	18	14	9	14	14	14	18	13	9
C_{57}	24	18	14	19	19	19	24	18	13
C_{70}	30	24	18	24	24	24	30	24	18
C_{93}	38	30	24	31	31	31	34	30	24
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres étant:

1 , 3 , 1 , 4 , 1 , 3 , 1 , 4 , 1 , 3 , 1 , 4 , . . .

la périodicité n'a pas lieu.

4. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4.

Droite en									
C_3	2			1	1	1		1	
C_7	4	2		2	2	3	1	3	1
C_{18}	8	4	2	5	5	6	3	6	3
C_{25}	12	8	4	8	8	10	6	10	6
C_{39}	18	12	8	13	13	15	10	15	10
C_{55}	24	18	12	18	18	19	15	19	15
C_{75}	32	24	18	25	25	26	19	26	19
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

2 , 4 , 2 , 4 , 2 , 4 , 2 , 4 , . . .

5. b en b' . . . a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_j)$, $(a_3 b_k)$, b_l en . . . a_4 $4 (=) l$ sont réductibles par $(a_1 a_2 a_3)^2$ à $\gamma_2 (b_4^2 b b_1 b_2 b_3)$ en $(B_4 B B_l)$ et $\gamma_1 (a_l^2 a a_i a_j a_k)$ en $(A A_l A_4)$; $A B_4$, $A_l B$, $A_4 B_l$ accouplés, B_4 en B'_4 en A_l, B_l en B'_l . . . A_4, B en B'. . . A et sont donc apériodiques sauf B_l en A_4 et $(B_l A_4)$.

6. b en b' en . . . a, $(a_1 b_i)$, $(a_2 b_j)$, $(a_3 b_k)$, b_4 en a_4, $i (=) 1$ sont réductibles par $(a_1^2 a_2 a_3 a_4 b_4)^3$ à $\delta_2 (b_4^2 b_3^2 b_2^2 a_4 b_1 b)$ en $A_4 B_1 B$ ou à $\delta_1 (a_4^2 a_j^2 a_k^2 a_j a b_4)$ en $B_4 A A_j$; $A_4 B_4$, $A A$, $B B$, accouplés, donc pour $k = 3$ ou $j = 2$, (ab'), a' en a'_1 en b, c en c'_1 . . . c, II. p.,

§ 16, IV. pour $k=1$, $i=2$ ou $j=1$, $i=3$, B_4 en A_j, B_1 en A_4, B en B'_4 . . . A, caractéristiques inconstructibles, et apériodiques pour b en b' en b'' en b''' en a.

7. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_4 en a_3, b_3 en a_4 est apériodique de même que 4. et de là il s'ensuit que b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en a_4 ainsi que b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en b'_4 en a_4 le sont de même.

8. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, $(b_3 a_4)$, b_4 en a_3 est réductible à une Q^2. En effet $(a_3^2 a_1 a b b)^3$ donne $B_2^2 B' A B_1 B_4$ et $A_2^2 B' B A_1 B_4$, ou $B'B', AB, B_4 A B_1 B_4$, sont accouplés et B_2 en A_2, B en A_4 en A sont enchaînés, donc la caractéristique b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en b'_4 en a_4. Ensuite donne $(A_2^2 B_2 B' B A_1)^3$ la Q^2. Voir ce §, a) 6.

9. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, $(a_3 b_4)$, b_3 en b'_3 en a_4.

Droite en										
C_3	2			1	1		1	1		
C_7	4	2		2	3	1	3	2	1	
C_{15}	8	4	2	5	6	3	7	4	2	1
C_{25}	12	8	4	8	10	6	12	6	4	2
C_{39}	18	12	8	13	15	10	19	9	6	4
C_{55}	24	18	12	18	21	15	27	12	9	6
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences successives des ordres donnent

2 , 4 , 2 , 4 , 2 , 4 , 2 , 4 . . . .

10. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en b'_2 en a_2, $(a_3 b_4)$, b_3 en a_4.

Droite										
C_3	2			1	2			1	1	
C_7	4	2		2	3	1		3	2	1
C_{15}	8	4	2	5	7	3	1	6	4	2
C_{27}	14	8	4	8	12	7	3	11	7	4
C_{47}	24	14	8	15	20	12	7	19	12	7
C_{77}	38	24	14	24	32	20	12	32	20	12
C_{123}	64	38	24	39	51	32	20	55	31	20
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

11. $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, b_4 en a_3, b_3 en a_4 est évidemment apériodique selon n. 6.

12. b_1 en a_1, b_2 en a_2, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ est apériodique selon n. 4.

13. b_1 en a_1, b_2 en a_2, b_4 en a_3, $(a_4 b_3)$ l'est autant de plus.

14. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_3)$, b_4 en a_3, b_2 en a_4

Droite en									
C_3	2			1	1	1		1	
C_7	4	2		2	3	1	1	2	1
C_{14}	7	4	2	5	6	6	1	4	2
C_{22}	10	7	4	7	9	10	6	6	4
C_{32}	13	10	7	11	12	14	10	9	6
C_{43}	18	14	10	14	15	19	14	13	9
C_{57}	24	18	14	19	19	24	19	18	13
C_{73}	30	24	18	24	24	30	24	24	18
C_{93}	38	30	24	31	31	37	30	31	24
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres sont

3 , 1 , 2 , 1 , 3 , 1 , 2 , 4 , 2 , 3 , 1 , 2 , . . .

Ainsi tous les cas imaginables sont traités et pour b en b' en b'' en a il faut discuter les cas suivants.

15. b en b' en a, $(a_1 b_2)$, b_3 en a_2, b_4 en a_3, b_1 en a_4.

Droite en										
C_3	2			1	1		1		1	
C_8	5	2		3	3	1	3	1	2	1
C_{18}	10	5	2	7	7	3	7	3	5	2
C_{35}	19	10	5	13	13	7	14	7	9	5
C_{63}	33	19	10	23	23	13	15	14	17	9
C_{110}	57	33	19	40	39	23	44	15	30	17
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

16. b en b' en b'' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 8.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b_1 b_2 b_3 b_4 \quad a^2$
C_5	$b^2 b'^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b''^2$	C_5	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 b^2 \quad b'^2 b''^2 a^2$
C_7	$b^2 b_1^3 b_2^3 b_3^3 b_4^3 b'^2 b''^2$	C_7	$b_1^3 b_2^3 b_3^3 b_4^3 b'^2 b''^2 a^2$

$C_9 \quad b^2 b_2^4 b_2^4 b_3^4 b_4^4 b'^2 b''^2 a^2.$

17. b en b' en b'' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4. Indice 18.

Droite en										Droite									
C_3	b^2	b_1	b_2	b_3	b_4					C_3		b_1	b_2	b_3				a^2	a_4
C_6	b^3	b_1^2	b_2^2	b_3^2	b_4^3	b'^2		a_4		C_6		b_1^2	b_2^2	b_3^2	b_4		b'^2	a^3	a_4^3
C_{11}	b^5	b_1^4	b_2^4	b_3^4	b_4^5	b'^3	b''^2	a_4^3		C_{11}		b_1^4	b_1^4	b_2^4	b_3^4	b'^2	b''^3	a^5	a_4^5
C_{18}	b^7	b_1^7	b_2^7	b_3^7	b_4^8	b'^5	b''^3	a^2	a_4^5	C_{18}	b^2	b_1^7	b_2^7	b_3^7	b_4^5	b'^3	b''^5	a^7	a_4^8
C_{24}	b^8	b_1^9	b_2^9	b_3^9	b_4^{11}	b'^7	b''^5	a^3	a_4^8	C_{24}	b^3	b_1^9	b_2^9	b_3^9	b_4^8	b'^5	b''^7	a^8	a_4^{11}
C_{31}	b^{10}	b_1^{12}	b_2^{12}	b_3^{12}	b_4^{13}	b'^8	$b_4''^7$	a^5	a_4^{11}	C_{31}	b^5	b_1^{12}	b_2^{12}	b_3^{12}	b_4^{11}	b'^7	b''^8	a^{10}	a_4^{13}
C_{36}	b^{10}	b_1^{14}	b_2^{14}	b_3^{14}	b_4^{15}	b'^{10}	b''^8	a^7	a_4^{13}	C_{36}	b^7	b_1^{14}	b_2^{14}	b_3^{14}	b_4^{13}	b'^8	b''^{10}	a^{10}	a_4^{15}
C_{39}	b^{10}	b_1^{15}	b_2^{15}	b_3^{15}	b_4^{16}	b'^{10}	b''^{10}	a^8	a_4^{15}	C_{39}	b^8	b_1^{15}	b_2^{15}	b_3^{15}	b_4^{15}	b'^{10}	b''^{10}	a^{10}	a_4^{16}

C_{41} $b^{10}\, b_1^{16}\, b_2^{16}\, b_3^{16}\, b_4^{16}\, b'^{10}\, b''^{10}\, a^{10}\, a_4^{16}$.

18. b en b' en b'' en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, $(a_3 b_3)$, b_3 en a_4.

Droite en										
C_3	2				1	1		1	1	
C_7	4	2			2	3	1	3	2	1
C_{14}	7	4	2		5	6	3	6	4	2
C_{26}	12	7	4	2	9	11	6	12	8	4
C_{43}	19	12	7	4	15	18	11	20	12	8
C_{67}	20	19	12	7	24	28	18	31	19	12
C_{102}	42	28	19	12	36	42	28	48	28	19
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres sont

2 , 4 , 7 , 12 , 17 , 24 , 35 , 49 , . . .

19. Pour le cas de plusieurs intercalés entre b et a restent à envisager les caractéristiques $(a_i b_i)$. On trouve que b en b' en . . . $b^{(n-1)}$ en a, $(a_i b_i)$ donne un tableau fermé pour n quelconque. Toutefois elle est traduisible en une du § 3.

§ 5. — Un point double et un point simple coincident.

I. (ab_1), b en a_2. $(aba_2)^2$ donne $\gamma_2\,(b^2 a_2 b_1 b_3 b_4)$ en $\beta'_2\,(BB_4B_3)$, $\gamma_1\,(a^2 b a_2 a_3 a_4)$ en $\beta_1\,(AA_3A_4)$, AB, A_4B_3, A_3B_4, sont accouplés. La transposition est toujours applicable, l'alinéation aba_2 étant contradictoire à la caractéristique.

II. 1. (ab_1), b en a_1, b_2 en a_i, b_3 en a_k, b_3 en a_l

Droite en

C_3	1	2		1		1		1	
C_7	2	5	2	2	1	2	1	2	1
C_{12}	3	7	5	4	2	4	2	4	2
C_{19}	4	10	7	7	4	7	4	7	4
C_{30}	8	15	10	11	7	11	7	11	7
C_{43}	12	21	15	15	11	15	11	15	11
C_{57}	16	26	21	20	15	20	15	20	15
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

2 , 1 , 2 , 4 , 2 , 1 , 2 , 4 , . . .

2. (ab_1), b en a_1, (a_2b_3) est réductible à une Q^2 au moyen de $(aba_2)^2$ et on obtient BA_1B_4 et A_2AA_4, A_2B_4, A_4A_1, AB accouplés et B en B_2, A_1 en A_2.

3. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) Indice 6.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4\, a_1$
C_4	$b^2\, b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4\, a_1^2$	C_4	$b\, b_1\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, a_1$

C_3 $b\, b_2\, b_3\, b_4\, a_1^2$.

4. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4 Indice 8.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1^2\, b_2\, b_3\, a_1\, a_4$
C_5	$b_3\, b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4^2\, a_1^2\, a_4$	C_5	$b\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4\, a_1\, a_4^2$
C_6	$b^2\, b_1\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, a_1^3\, a_4^2$	C_6	$b\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4\, a_1^2\, a_4^3$

C_7 $b^2\, b_1^2\, b_2^2\, b_3^3\, b_4^3\, a_1^3\, a_4^3$.

5. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en a_4 Indice 12.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1^2\, b_2\, a_1\, a_3\, a_4$
C_6	$b^4\, b_1^2\, b_2\, b_3^2\, b_4^2\, a_1^2\, a_3\, a_4$	C_6	$b\, b_1^3\, b_2^2\, b_3\, b_4\, a_1\, a_3^3\, a_4^3$
C_9	$b^5\, b_1^2\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, a_1^4\, a_3^2\, a_4^2$	C_9	$b\, b_1^4\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, a_1^2\, a_3^4\, a_4^4$
C_{12}	$b^5\, b_1^3\, b_2^4\, b_3^5\, b_4^5\, a_1^5\, a_3^3\, a_4^3$	C_{12}	$b^2\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^4\, b_4^4\, a_1^4\, a_3^5\, a_4^5$
C_{15}	$b^6\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^6\, b_4^6\, a_1^5\, a_3^5\, a_4^5$	C_{15}	$b^4\, b_1^5\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, a_1^6\, a_3^6\, a_4^6$

C_{17} $b^6\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^6\, a_1^6\, a_3^6\, a_4^6$.

6. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4 Indice 14.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 \quad b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4$	C_3	$a_1 \, b_1^2 \, b_2 \, b_3 \qquad a_4$
C_5	$b^3 \, a_1^2 \, b_1^2 \, b_2 \; b_3 \; b_4^2 \, b'_4$	C_5	$b \; a_1 \, b_1^2 \, b_2^2 \, b_3^2 \qquad b'_4 \; a_4^3$
C_7	$b^4 \, a_1^3 \, b_1 \; b_2^3 \, b_3^2 \, b_4^3 \, b'^2_4 \, a_4$	C_7	$b \; a_1^2 \, b_1^3 \, b_2^2 \, b_3^2 \; b_4 \; b'^3_4 \, a_4^4$
C_{11}	$b^5 \, a_1^4 \, b_1^3 \, b_2^4 \, b^4 \; b_4^5 \, b'^3_4 \, a_4^2$	C_{11}	$b^2 \, a_1^3 \; b_1^5 \, b_2^4 \, b_3^4 \, b_4^3 \, b'^4_4 \, a_4^5$
C_{13}	$b^5 \, a_1^5 \, b_1^4 \, b_2^4 \, b_3^4 \, b_4^6 \, b'^5_4 \, a_4^3$	C_{13}	$b^3 \, a_1^4 \, b_1^4 \, b_2^5 \, b_3^5 \, b_4^4 \, b'^5_4 \, a_4^6$
C_{15}	$b^6 \, a_1^5 \, b_1^4 \, b_2^5 \, b_3^5 \, b_4^6 \, b'^6_4 \, a_4^5$	C_{15}	$b^4 \, a_1^6 \, b_1^5 \, b_2^5 \, b_3^5 \, b_4^5 \, b'^6_4 \, a_4^6$

$C_{17} \quad b^6 \, a_1^6 \, b_1^6 \, b_2^6 \, b_3^6 \, b_4^6 \, b'^6_4 \, a_4^6$.

7. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4.

Droite en									
C_3	1	2		1	1		1		
C_6	2	4	2	1	2	1	2	1	
C_{10}	2	6	4	3	3	2	4	2	1
C_{16}	4	8	6	5	6	3	7	4	2
C_{24}	6	12	8	7	9	6	10	7	4
C_{35}	10	17	12	12	12	9	14	10	7
C_{46}	13	21	17	14	16	12	18	14	10
C_{59}	16	26	21	19	21	16	23	18	14
C_{75}	22	32	26	24	27	21	29	23	18
C_{92}	27	39	32	29	32	27	35	29	23
C_{111}	33	46	39	36	38	32	42	35	29
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans b_4 sont

1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 7 , 7 , 8 , 9 , 9 , 1 . . .

8. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2		1	1	1			
C_5	2	3	2	1	1	2	1		
C_7	1	4	3	2	2	3	2	1	
C_{12}	3	6	4	4	4	6	3	2	1
C_{17}	5	8	6	5	5	8	6	3	2
C_{23}	6	11	8	7	7	10	8	6	3
C_{32}	9	15	11	10	10	14	10	8	6
C_{41}	12	18	15	13	13	17	14	10	8
C_{50}	14	21	18	16	16	21	17	14	10
C_{62}	18	26	21	20	20	26	21	17	14
C_{75}	23	31	26	24	24	30	26	21	17
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

0 , 0 , 3 , 0 , 1 , 3 , 0 , 0 , 3 , 1 , 0 , 3 , 0 , 0 , . . .

*

9. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), b_4 en a_3, b_3 en a_4 donne le même tableau que n. 5.

10. (ab_1), b en a_1, (a_2b_2), b_4 en a_3, b_3 en b'_3 en a_4

Droite en									
C_3	1	2		1	1		1		
C_6	2	4	2	1	2	1	2	1	
C_{10}	2	6	4	3	4	2	3	2	1
C_{16}	4	8	6	5	7	4	6	3	2
C_{23}	6	11	8	7	10	7	8	6	3
C_{32}	9	15	11	10	14	10	10	8	6
C_{41}	12	18	13	13	17	14	13	10	8
C_{49}	14	20	18	16	21	17	16	13	10
C_{58}	17	23	20	19	25	21	18	16	13
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres sont

3 , 4 , 6 , 7 , 9 , 9 , 8 , 9 , ...

III. 1. (ab_1), b en . . . en $b^{(n)}=a_2$, (a_1b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) est réductible à des Q^2 au moyen de $(a_1a_3a_4)^2$. AB_2, A_2B_1, A_1B, B en . . . $B^{(n)}=A_2$, c'est II. p. § 25.

2. (ab_1), b en . . . en $b^{(n)}=a_2$, (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4 est réductible à une Q^2 au moyen de $(b^2\, a^4\, a_2^2\, a_1^2\, a_3^2\, b_4\, a_4)$.

3. (ab_1), b en b' en a_2, (a_1b_2), b_3 en a_3, b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2			1	1		1	
C_6	1	4	2		2	2	1	2	1
C_{12}	3	7	4	2	5	4	2	4	2
C_{19}	4	10	7	4	7	7	4	7	4
C_{30}	8	15	10	7	11	11	7	11	7
C_{42}	11	20	15	10	15	15	11	15	11
C_{57}	16	26	21	15	21	20	15	20	15
C_{75}	20	32	26	20	26	20	26	20	26
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

1 , 3 , 1 , 4 , 1 , 3 , 1 , 4 , . . .

et le tableau devient infini.

4. (ab_1), b en b' en a_2, $(a_1 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2			1		1		1
C_5	1	3	2		2	1	2	1	
C_{10}	2	6	3	2	4	3	4	2	1
C_{16}	4	8	6	3	6	5	7	4	2
C_{24}	6	12	8	6	9	7	10	7	4
C_{34}	9	16	12	8	12	11	14	10	7
C_{46}	13	21	16	12	17	14	18	14	10
C_{59}	16	26	21	16	21	19	23	18	14
C_{75}	22	32	26	21	27	24	29	23	18
C_{91}	26	38	32	26	32	29	35	29	23
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des multiplicités dans b_4 sont

1 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 7 , 7 , . . .

5. (ab_1), b en b' en a_2, b_2 en a_1, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$. Cette caractéristique est réductible à Q^2 moyennant $b' a_3 a_4 a^2 b^2 a_2^2$. En composant cette $\mathfrak{C}^4$ par $(a b a_2)^2$ et $(b' a_3 a_4)^2$ on démontre que $\mathfrak{C}^4$ est toujours applicable.

6. (ab_1), b en b' en a_2, b_2 en . . . a_1, b_3 en a_3, $(a_4 b_4)$. Cette transformation serait réductible au moyen de $(a b a_4)$ et alors au moyen de $(A B' A_2)$ à une des transformations (ab_1), b en a_2, qui sont reconnues comme réductibles à une Q^2. Les alinéations $a b a_3$ ou $a b' a_2$ sont impossibles, de même des coincidences.

7. (ab_1), b en b' en a_2, b_2 en a_1, b_3 en a_3, b_4 en a_4 est apériodique à raison du tableau 3.

8. (ab_1), b en . . . a_2, b_2 en . . . a_1, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ est réductible à une Q^2 au moyen de $(a a_2 a_4)^2$, $(a a_2 a_4)^1$ ou $(a a_3)$, $(a a_4)$, $(a_3 a_4)$ sont contradictoires à la caractéristique.

9. (ab_1), b en . . . a_2, b_2 en . . . a_1, b_4 en a_3, $(a_4 b_3)$ est réductible à une Q^2 au moyen de $(a a_2 a_4)^2$, $(a a_2 a_4)^1$ et $(a a_4)$ $(a a_2)$ ou etc. sont excluses par la caractéristique.

10. (ab_1), b en . . . a_2, b_2 en a_1, b_4 en a_3, b_3 en a_4 est apériodique à raison de n. 3.

11. (ab_1), b en . . . a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en . . . a_4 sont réductibles au moyen de $(a a_3 a_4)^2$, à $A_4 B$, $A_2 B_1$, $A_1 B_2$; B en . . . A_2, B_1 en A_4 en B_3, B_2 en B_4 en . . . A_4, apériodique déjà pour b_4 en b'_4 en a_4, ou b en b' en b'' en a_2, b_4 en a_4. $(a a_3 a_4)^1$ et $(a a_3)$, $(a a_4)$ etc. sont excluses par la caractéristique.

12. $(a b_1)$, b en b' en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en b'_2 en a_3, $(a_4 b_4)$

Droite en									
C_3	1	2			1	1			1
C_5	1	3	2		2	2	1		1
C_{10}	2	6	3	5	4	4	1	1	3
C_{16}	4	8	6	3	7	6	4	2	5
C_{23}	5	11	8	6	10	9	6	4	7
C_{32}	8	15	11	8	14	12	9	6	11
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

13. $(a b_1)$, b en b' en a_2, b_3 en . . . a_1, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$ sont réductibles au moyen de $(a a_4 a_3)$ à $A_1 B_2$, $A_2 B_1$, $A_3 B$; B en B' en A_2, B_1 en B_4 en B_3 en . . . A_1 c'est selon II. p. § 17 apériodique déjà pour b_3 en b'_3 en a_1. $(a a_3 a_4)^1$ et $(a a_3)$, $(a a_4)$ ou etc. sont excluses par la caractéristique.

14. $(a b_1)$, b en b' en b'' en a_2, b_2 en a_1, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$

Droite en									
C_3	1	2				1		1	1
C_5	2	3	2			2	1	1	1
C_8	2	5	3	2		3	2	2	2
C_{14}	4	8	5	3	2	6	3	4	4
C_{21}	7	11	8	5	3	8	6	6	6
C_{28}	8	14	11	8	5	11	8	8	8
C_{39}	12	19	14	11	8	15	1	12	12
C_{50}	16	23	19	14	11	19	15	15	15
C_{62}	19	28	23	19	14	23	19	19	19
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences sont

0 , 1 , 3 , 1 , 0 , 4 , 0 , 1 , 3 , 1 , 0 , 4 .

15. $(a b_1)$, b en b' en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en a_3, $(a_4 b_4)$ Indice 12.

| Droite en | | | | | | | | |

16. (ab_1), b en b' en b'' en a_2, (a_1b_3), b_2 en a_3, (a_4b_4)

	Droite en								
C_3	1	2				1	1		1
C_5	1	3	2			2	3	1	1
C_9	2	5	3	2		3	4	3	3
C_{14}	4	7	5	3	2	4	7	4	4
C_{20}	6	10	7	5	3	6	8	7	6
C_{27}	8	13	10	7	5	7	12	8	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

17. (ab_1), b en b' en a_2, b_3 en a_1, b_2 en a_3, (a_4b_4)

	Droite en								
C_3	1	2			1				1
C_5	2	4	2		1	1	1		1
C_{11}	3	7	4	2	3	1	4	1	3
C_{18}	6	9	7	4	6	3	6	4	5
C_{26}	9	14	9	7	8	6	8	6	7
C_{34}	11	17	14	9	11	8	10	8	10
C_{45}	15	22	17	14	15	11	14	10	13
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

18. (ab_1), b en b' en a_2, (a_1b_3), b_2 en a_3, b_4 en a_4

	Droite en								
C_3	1	2			1	1		1	
C_6	1	4	2		2	2	1	2	1
C_{12}	3	7	4	2	4	5	2	4	2
C_{20}	5	11	7	4	7	7	5	7	4
C_{31}	8	15	11	7	10	11	7	11	7
C_{43}	12	21	15	11	15	15	11	15	11
C_{57}	16	26	21	15	20	20	15	20	15
C_{74}	21	33	26	21	26	26	20	26	20
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

19. (ab_1), b en . . . a_2, b_3 en . . . $b_3^{(n)} = a_1$, $(a_3 b_4)$, b_2 en . . . a_4 sont réductibles à des Q^2 au moyen de $(aa_2a_3)^2$. $(aa_2a_3)^1$ et $(aa_3)(aa_2)$ etc. sont impossibles.

20. (ab_1), b en b' en a_2, $(a_1 b_3)$, b_4 en a_3, b_2 en a_4

Droite en									
C_3	1	2			1	1		1	
C_6	1	4	2		2	2	1	2	1
C_{12}	3	7	4	2	4	4	2	5	2
C_{20}	5	11	7	4	7	7	4	7	5
C_{30}	8	15	11	7	11	10	7	11	7
C_{42}	11	20	15	11	15	15	10	15	11
C_{57}	16	26	20	15	21	20	15	20	15
C_{73}	20	32	26	20	26	26	20	26	20
C_{93}	27	40	32	26	33	33	26	33	26
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans b sont

2 , 2 , 3 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 8 . . .

III. 1. (ab_1), b en b' en . . . a_1, $(a_2 b_3)$ sont réductibles par $(aa_2a_4)^2$ à A_3B_1, A_1B_3, A'_1B; B en B' en . . . A_1, B_3 en B_4, B_1 en A_4 en B_2.

2. (ab_1), b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 10.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4\ a_1$
C_4	$b^2\ b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4\ b'^2$	C_4	$b_1\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ b'\ a_1$
C_5	$b^3\ b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4\ b'^2\ a_1^2$	C_5	$b\ b_1\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ b'\ a_1^3$
C_6	$b^3\ b_1\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ b'^3\ a_1^2$	C_6	$b\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ b'^3\ a_1^3$

C_8 $b^3\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ b'^3\ a_1^3$.

3. $(a b_1)$, b en b' en b'' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 18.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1^2\, b_2\, b^3\, b_4\, a_1$
C_4	$b^2\, b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4\, b'^2$	C_4	$b_1\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, b''\, a_1$
C_5	$b^3\, b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4\, b'^2\, b''^2$	C_5	$b_1\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, b'\, b''\, a_1^3$
C_8	$b^5\, b_1^3\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, b'^3\, b''^2\, b_1^2$	C_8	$b\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^2\, b'\, b''^3\, a_1^4$
C_{10}	$b^5\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, b'^5\, b''^3\, a_1^2$	C_{10}	$b\, b_1^3\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, b'^3\, b''^4\, a_1^4$
C_{13}	$b^6\, b_1^5\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, b'^5\, b''^5\, a_1^3$	C_{13}	$b^3\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, b'^4\, b''^4\, a_1^6$
C_{14}	$b^6\, b_1^5\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, b'^6\, b''^5\, a_1^5$	C_{14}	$b^4\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, b'^4\, b''^6\, a_1^6$
C_{15}	$b^6\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, b'^6\, b''^6\, a_1^5$	C_{15}	$b^4\, b_1^5\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, b'^6\, b''^6\, a_1^6$

C_{17} $b^6\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^6\, b'^6\, b''^6\, a_1^6$

4. $(a b_1)$, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4. Indice 14.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	C_3	$b_1^2\, b_2\, b_3\, a_1\, a_4$
C_5	$b^3\, b_1^2\, b_2\, b_3\, b_4^2\, b'^2\, a_4$	C_5	$b_1^2\, b_2^2\, b_3^2\, b_4\, b'\, a_1\, a_4^3$
C_8	$b^5\, b_1^3\, b_2^2\, b_3^2\, b_4^2\, b'^3\, a_1^2\, a_4^2$	C_8	$b\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, b'\, a_1^3\, a_4^4$
C_{10}	$b^5\, b_1^3\, b_2^3\, b_3^3\, b_4^3\, b'^5\, a_1^3\, a_4^2$	C_{10}	$b\, b_1^3\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, b'^3\, a_1^4\, a_4^4$
C_{13}	$b^6\, b_1^4\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^6\, b'^5\, a_1^5\, a_4^3$	C_{13}	$b^3\, b_1^4\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^4\, b'^4\, a_1^6\, a_4^5$
C_{15}	$b^6\, b_1^4\, b_2^4\, b_3^4\, b_4^4\, b'^6\, a_1^5\, a_4^4$	C_{15}	$b^4\, b_1^5\, b_2^5\, b_3^5\, b_4^5\, b'^6\, a_1^6\, a_4^6$

C_{17} $b^6\, b_1^6\, b_2^6\, b_3^6\, b_4^6\, b'^6\, a_1^6\, a_4^6$

5. $(a b_1)$, b en b' en b'' en b''' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$

Droite en									
C_3	1	2					1	1	1
C_4	2	2	2				1	1	1
C_5	2	3	2	2			1	1	1
C_8	3	5	3	2	2		2	2	2
C_{12}	5	7	5	3	2	2	3	3	3
C_{15}	5	8	7	5	3	2	4	4	4
C_{21}	8	11	8	7	5	3	6	6	6
C_{26}	10	13	11	8	7	5	7	7	7
C_{32}	11	16	13	11	8	7	9	9	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

6. (ab_1), b en b' en b'' en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2				1	1	1	
C_5	2	3	2			1	1	2	1
C_8	3	5	3	2		2	2	2	2
C_{12}	5	7	5	3	2	3	3	3	2
C_{16}	5	9	7	5	3	4	4	5	3
C_{24}	8	13	9	7	5	7	7	8	5
C_{32}	11	16	13	9	7	9	9	11	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

7. (ab_1), b en b' en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2			1	1	1		
C_5	2	3	2		1	1	2	1	
C_9	3	6	3	2	2	2	3	2	1
C_{14}	4	8	6	3	4	4	5	3	2
C_{21}	7	11	8	6	6	6	8	5	3
C_{28}	8	14	11	8	8	8	11	8	5
C_{39}	12	19	14	11	12	12	15	11	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

0 , 2 , 1 , 2 , 0 , 4 , 0 , 2 , 1 , 2 , 0 , 4 , . . .

8. (ab_1), b en b' en a_1, (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2			1	1		1	
C_6	2	4	2		1	2	1	2	1
C_{11}	4	7	4	2	3	3	2	3	2
C_{16}	5	9	7	4	4	5	3	5	3
C_{24}	7	13	9	7	7	8	5	8	5
C_{34}	10	17	13	9	10	12	8	12	8
C_{47}	15	20	17	13	14	16	12	16	12
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

9. (ab_1), b en b' en a_1, b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4
(ab_1), b en b' en a_1, b_2 en a_2, b_4 en a_3, b_3 en a_4
(ab_1), b en b' en a_1, b_3 en a_2, b_4 en a_3, b_2 en a_4
sont apériodiques à plus forte raison.

§ 6. — Tous les deux points doubles sont coincidents avec des points simples.

I. (ab_1), (ba_2) est toujours réductible à des Q^2 au moyen de $(aba_3)^2$, parceque jamais il ne peut arriver, que tous les points simples soient alignés avec a, b.

II. 1. (ab_1), (ba_1), (a_2b_3) est réductible à une Q^2 au moyen de $(aba_2)^2$.

2. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2) (a_3b_3), (a_4b_4) Indice 4.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b\ b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4$

C_2 $b_2\ b_3\ b_4$

3. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4 Indice 6.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b\ b_1^2\ b_2\ b_3\ a_4$
C_3	$b\ b_2\ b_3\ b_4^2\ a_4$	C_3	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ a_4^2$

C_5 $b^2\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ a_4^2$

4. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4 Indice 10.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b\ b_1^2\ b_2\ b_3\ a_4$
C_3	$b\ b_2\ b_3\ b_4^2\ b'_4$	C_3	$b_1\ b_2\ b_3\ b'_4\ a_4^2$
C_6	$b^3\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^3\ b'^2_4\ a_4$	C_6	$b^2\ b_1^3\ b_2^2\ b_3^2\ b_4\ b'^2_4\ a_4^3$
C_6	$b^2\ b_1\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^3\ b'^3_4\ a_4^2$	C_6	$b^2\ b_1\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ b'^3_4\ a_4^3$

C_8 $b^3\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ b'^3_4\ a_4^3$

5. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en a_4 Indice 8.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b\ b_1^2\ b_2\ a_3\ a_4$
C_4	$b^2\ b_2\ b_3^2\ b_4^2\ a_3\ a_4$	C_4	$b_1^2\ b_2\ b_3\ b_4\ a_3^2\ a_4^2$
C_7	$b^3\ b_1^2\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ a_3^2\ a_4^2$	C_7	$b^2\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^2\ b_4^2\ a_3^3\ a_4^3$

C_7 $b^2\ b_1^2\ b_2^2\ a_3^3\ b_3^3\ a_4^3\ b_4^3$

6. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4 Indice 18.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b\ b_1^2 b_2 b_3$
C_3	$b\ b_2 b_3 b_4^2 b'_4$	C_3	$b_1 b_2 b_3\ b''_4 a_4^2$
C_6	$b^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^3 b'^2_4 b''_4$	C_6	$b^2 b_1^3 b_2^2 b_3^2\ b'_4 b''^2_4 a_4^3$
C_7	$b^3 b^2\ b_2^2 b_3^2 b_4^4 b'^3_4 b''^2_4 a_4$	C_7	$b\ b_1^3 b_2^2 b_3^2 b_4\ b'^2_4 b''^2_4 a_4^4$
C_{11}	$b^5 b_1^3 b_2^4 b_3^4 b_4^5 b'^4_4 b''^3_4 a_4^2$	C_{11}	$b^3 b_1^5 b_2^4 b_3^4 b_4^2 b'^3_4 b''^4_4 a^5_4$
C_{12}	$b^4 b_1^3 b_2^4 b_3^4 b_4^6 b'^5_4 b''^4_4 a_4^3$	C_{12}	$b^3 b_1^4 b_2^4 b_3^4 b_4^3 b'^4_4 b''^5_4 a_4^6$
C_{15}	$b^6 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^6 b'^6_4 b''^5_4 a_4^4$	C_{15}	$b^5 b_1^6 b_2^5 b_3^5 b_4^4 b'^5_4 b''^6_4 a_4^6$
C_{15}	$b^5 b_1^4 b_2^5 b_3^5 b_4^6 b'^6_4 b''^6_4 a_4^5$	C_{15}	$b^4 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^6_4 b''^6_4 a_4^6$

C_{17} $b^6 b_1^6 b_2^6 b_3^6 b_4^6 b'^6_4 b''^6_4 a_4^6$

7. (ab_1), (ba_1), b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4 Indice 12.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b\ b_1^2\ a_2 a_3 a_4$
C_5	$b^3\ b_2^2 b_3^2 b_4^2 a_2 a_3 a_4$	C_5	$b_1^3 b_2 b_3 b_4\ a_2^2 a_3^2 a_4^2$
C_9	$b^4 b_1^2 b_2^4 b_3^4 b_4^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2$	C_9	$b^2 b_1^4 b_2^2 b_3^2 b_4^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4$
C_{13}	$b^6 b_1^3 b_2^5 b_3^5 b_4^5 a_2^4 a_3^4 a_4^4$	C_{13}	$b^3 b_1^6 b_2^4 b_3^4 b_4^4 a_2^5 a_3^5 a_4^5$
C_{15}	$b^5 b_1^4 b_2^6 b_3^6 b_4^6 a_2^5 a_3^5 a_4^5$	C_{15}	$b^4 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5 a_2^6 a_3^6 a_4^6$

C_{17} $b^6 b_1^6 b_2^6 b_3^6 b_4^6 a_2^6 a_3^6 a_4^6$

8. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4 Indice 14.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b\ b_1^2 b_2\ a_4 a_3$
C_4	$b^2\ b_2 b_3^2 b_4^2 b'_4\ a_3$	C_4	$b^2_1 b_2 b_3\ b'_4 a_4^2 a_3^2$
C_8	$b^4 b_1^2 b_2^3 b_3^3 b_4^4 b'^2_4 a_4 a_3^2$	C_8	$b^2 b_1^4 b_2^3 b_3^2 b_4\ b'^2_4 a_4^4 a_3^3$
C_{10}*)	$b^4 b_1^2 b_2^3 b_3^4 b_4^5 b'^4_4 a_4^2 a_3^3$	C_{10}	$b^2 b_1^4 b_2^3 b_3^3 b_4^2 b'^4_4 a_4^5 a_3^4$
C_{14}	$b^6 b_1^4 b_2^5 b_3^5 b_4^6 b'^5_4 a_4^4 a_3^4$	C_{14}	$b^4 b^5_1 b^5_2 b^4_3 b^4_4 b'^5_4 a^6_4 a^6_3$
C_{15}	$b^5 b_1^4 b_2^5 b_3^6 b_4^6 b'^6_4 a_4^5 a_3^5$	C_{15}	$b^4 b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^6_4 a_4^6 a_3^6$

C_{17} $b^6 b_1^6 b_2^6 b_3^6 b_4^6 b'^6_4 a_4^6 a_3^6$

*) M. Cremona, dans son énumération, a omis ce système fondamental du degré 10.

10. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en b''_4 en b'''_4 en a_4

Droite en										
C_3	1	2	1	1		1				
C_4		2	1	2	1	2	1			
C_8	2	4	3	3	2	4	2	1		
C_{11}	2	5	3	4	3	6	4	2	1	
C_{18}	4	9	6	6	4	9	6	4	2	1
C_{26}	5	12	8	10	6	13	9	6	4	2
C_{40}	9	19	13	15	10	19	13	9	6	4
C_{56}	12	25	18	21	15	27	19	13	9	6
C_{80}	19	36	26	29	21	38	25	19	13	9
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

11. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en b'_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4

Droite en									
C_3	1	2	1	1			1		
C_4		2	1	2	1		2	1	
C_9	2	5	3	4	2	1	4	2	1
C_{13}	2	6	4	6	4	2	6	4	2
C_{21}	5	10	7	9	6	4	9	6	4
C_{28}	6	12	9	12	9	6	12	9	6
C_{39}	10	17	13	16	12	9	16	12	9
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les multiplicités dans b_3 donnent les différences

1 , 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , . . .

12. (ab_1) (ba_1), (a_2b_3) est traduite par $(aba_2)^2$ en la Q^2 : AB, A_2B_3, B_3B_2, B en B_2, A_4 en A, caractéristiques de la 2ième section. $(aba_2)^1$ serait contradictoire à la caractéristique, de même (ab), (aa_2) etc.

13. (ab_1)., (ba_1), b_2 en a_2, b_4 en a_3, b_3 en a_4 est traduite par $(aa_3b_4)^2$ en A_2^2 B^2, A_4B_4, A_3A_3, A_1A, AB_2, B_4 en B_3 en A_4, savoir (ab_1), b en a_2, (b_2a_1), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4 et de là par $(aba_2)^2$ en AB, A_4B_3, A_3B_4 accouplés et B_4 en B'_4 en A_4, B en B_2 en A_2 en A, savoir II. p. § 16. IV. $m = 5$. Les réductions sont sans exception.

14. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_4 en a_3, b_3 en a_4 donne (ab_1), (ba_2), (b_2a_1), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4 et de là par $(aba_1)^2$ en une forme du § 30, II. A_2A, AA_2, $A_4B'_4$, B_4 en B'_4 en A_4, A_3 en A_1 en A_3.

15. (ab_1), (ba_1), b_2 en b'_2 en a_2, b_4 en a_3, b_3 en a_4 donne (ab_1), b en b' en a_2, (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4.

16. (ab_1), (ba_1), b_2 en a_2, b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en a_4 donne (ab_1), b en a_2, (b_2a_1), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4 et de là II, p. § 18, I.

Si l'on met dans la caractéristique b_4 en b'_4 en b''_4 en a_3 on obtiendra apériodicité.

17. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_4 en a_3, b_3 en b'_3...en a_4 donne (ab_1), (ba_2), (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4...a_4, ce qui est traduisible par $(aba_3)^2$ en A_2A, AA_2, A_4B_4, B_4 en B'_4 en...A_4.

18. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en b'_3 en a_4 donne le même tableau apériodique que n. 11.

19. (ab_1), (ba_1), b_2 en a_2, b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en b'_3 en a_4 donne un tableau apériodique à plus forte raison.

20. (ab_1), (ba_1), b_2 en b'_2 en a_2, b_4 en b'_4 en a_3, b_3 en a_4 donne (ab_1), b en b' en a_2, (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4, à tableau illimité.

21. Toutes les caractéristiques avec plusieurs intercalés sont écartées comme apériodiques.

22. (ab_1), (ba_1), b_2 en a_3, b_3 en a_4, b_4 en a_2 donne le même tableau que n. 6 et serait traduisible par $(aa_2b_4)^2$ en (ab_1), b en b' en a_2, (a_1b_4), (a_3b_3), b_2 en a_4. $(aa_2b_4)^4$ est inadmissible, de même (ab_4), (aa_2), (b_4a), (b_4a_2) etc.

23. (ab_1), (ba_1), b_2 en b'_2 en a_3, b_4 en a_2, b_3 en a_4 donne

Droite									
C_3	1	2	1			1		1	
C_5		3	2	1		2	1	2	1
C_{10}	2	5	4	2	1	4	2	5	2
C_{16}	3	8	6	4	2	6	4	7	5
C_{23}	5	10	9	6	4	8	6	10	7
C_{32}	8	14	12	9	6	11	8	14	10
C_{41}	10	17	16	12	9	13	11	18	14
C_{52}	14	21	20	16	12	17	13	22	18
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b_2 donnent les différences

1 , 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 . . .

La caractéristique est du reste traduisible par (aa_4b_3) en § 5, III, 11.

§ 7.—Tous les deux points doubles sont enchaînés avec des points simples.

I. 1. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$. Indice 6.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_2\ b_3\ b_4\ a^2\ a_1$
C_6	$b^3\ b_1^3\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ a_1^2\ a$	C_6	$b\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^2\ a^3\ a_1^3$

C_8 $b^3\ b_1^3\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\ a^3\ a_1^3$

2. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4. Indice 30.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_2\ b_3\ a^2\ a_1\ a_4$
C_7	$b^4\ b_1^3\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^3\ a\ a_1^2\ a_4$	C_7	$b\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4\ a_4\ a_1^3\ a_4^3$
C_{12}	$b^6\ b_1^4\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^5\ a^3\ a_1^4\ a_4^3$	C_{12}	$b^3\ b_1^4\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^3\ a^6\ a_1^4\ a_4^5$
C_{15}	$b^6\ b_1^5\ b_2^6\ b_3^6\ b_4^6\ a^4\ a_1^6\ a_4^5$	C_{15}	$b^4\ b_1^6\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a^6\ a_1^5\ a_4^6$
C_{16}	$b^5\ b_1^5\ b_2^6\ b_3^6\ b_4^6\ a^5\ a_1^6\ a_4^6$	C_{16}	$b^5\ b_1^6\ b_2^6\ b_3^6\ b_4^6\ a^5\ a_1^5\ a_4^6$
C_{14}	$b^3\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a^5\ a_1^5\ a_4^6$	C_{14}	$b^5\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^6\ a^3\ a_1^5\ a_4^5$
C_{11}	$b^2\ b_1^4\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^3\ a^5\ a^3_1\ a^5_4$	C_{11}	$b^5\ b_1^3\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^5\ a_2\ a_1^4\ a_4^3$
C_7	$b\ b_1^3\ b_2^2\ b_3^2\ b_4\ a^4\ a_1^2\ a_4^3$	C_7	$b^4\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^3\ a\ a_1^3\ a_4$
C_4	$b\ b_1\ b_2\ b_3\ a^3\ a_1\ a_4$	C_4	$b^3\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ a\ a_1$
C_2	$b\ a\ a_1$	C_2	$b\ b_1\ a$
C_3	$b^2\ b_2\ b_3\ b_4\ a_1$	C_3	$b_1\ b_2\ b_3\ a^2\ a_4$
C_6	$b^3\ b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4^3\ a_1^2\ a_4$	C_6	$b_1^2\ b_2^2\ b_3^2\ b_4\ a^3\ a_1^2\ a_4^3$
C_{11}	$b^5\ b_1^4\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^5\ a^2\ a_1^3\ a_4^3$	C_{11}	$b^2\ b_1^3\ b_2^4\ b_3^4\ b_4^3\ a^5\ a_1^4\ a_4^5$
C_{15}	$b^6\ b_1^6\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^6\ a^4\ a_1^5\ a_4^5$	C_{15}	$b^4\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a^6\ a_1^6\ a_4^6$

C_{17} $b^6\ b_1^6\ b_2^6\ b_3^6\ b_4^6\ a^6\ a_1^6\ a_4^6$

3. b_1 en a, b en a_1, $(a_2\ b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1		2		1	1		1	
C_8	3	1	5	2	2	3	1	3	1
C_{16}	5	3	9	5	5	6	3	6	3
C_{26}	8	5	13	9	8	10	6	10	6
C_{39}	12	8	18	13	13	15	10	15	10
C_{55}	18	12	24	18	18	21	15	21	15
C_{75}	25	18	32	24	25	28	21	28	21
C_{98}	33	25	41	32	32	36	28	36	28
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres donnent les secondes différences: 1, 3, 3, 2, 3, 3, 4, 3, 3, ...

4. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4

Droite en									
C_3	1		2		1	1	1		
C_7	3	1	4	2	2	2	3	1	
C_{13}	4	3	7	4	4	4	5	3	1
C_{20}	6	4	10	7	5	5	9	5	3
C_{30}	9	6	14	10	10	10	13	9	5
C_{42}	14	9	18	14	14	14	18	13	9
C_{57}	19	14	24	18	19	19	24	18	13
C_{74}	25	19	31	24	24	24	30	24	18
C_{94}	31	25	39	31	31	31	37	30	24
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans a_2 donnent les différences:

1 , 1 , 2 , 2 , 4 , 4 , 5 , 5 , 6 , 7 , 7 , 8 , 8 , 10 , . . .

5. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ est traduisible par $(a a_2 a_3)^2$ en $A_1^2 A_3^2, AB_1$, $A_3 A$, $B_1 A_2$, $A_4 B$, B en A_1, A_2 en A_4, savoir $(a b_1)$, b en a_2, b_2 en a_3, $(b_3 a_4)$, $(b_4 a_1)$ et de là par $(a b a_2)^2$ en AB, $A_4 B_3$, $A_3 B_4$ B_4 en A_2 en A, B en B_2 en A_3, II p., § 16, II. $m = 2$.

6. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, b_4 en ... a_3, $(a_4 b_3)$ est traduisible de même en $(a b_1)$, b en a_2, b_2 en b'_2 en... a_3, $(b_3 a_4)$, $(b_4 a_1)$ et de là en la caractéristique inconstructible de II. p. § 35, I. table n. 5 $m = 2$, n arbitraire.

7. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, b_4 en a_3, b_3 en a_4 est apériodique et donne le même tableau que n. 3.

8. b_1 en a, b en a_1, b_2 en a_2, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ donne le même tableau que n. 2., mais au moyen de $(b_3^2 b_1 a b a_1)^3$ $A_2^2 B_2^2$, $B_1 A_1$, BA, $A_3 B_4$, $A_1 B_4$, B_2 en A_2, A en B_3 en B, savoir b en a, $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_1)$, b_4 en b'_4 en a_4 et de là par $(a b a_1)^2$ en $A_4 B_3$, $A_3 B_4$, AB accouplés et B en B_3, B_4 en B'_4 en A_4, B_3 en A, savoir II. p., § 13 de l'indice 30 (voir le supplément p. 175).

9. b_1 en a, b en a_1, b_2 en b'_2 en a_2, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ donne le même tableau apériodique que n. 4.

10. b_1 en a, b en a_1, b_2 en ... a_2, b_4 en ... a_3, $(a_4 b_3)$ est tout de même que n. 5, réductible à une caractéristique de II. p., § 35, table I, n. 5.

11. b_1 en a, b en a_1, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$, $(a_2 b_3)$ donne le même tableau que n. 1. Voici quelques transpositions de cette caractéristique:

γ $(a_2^2 a_3 a_4 a_1 b)$ donne vers $\Sigma' b_3^2 b_4^2 b_1^2 a_1 b b_2$ et de là $B_2 B A_1 B_1^2 A_2$ et vers $\Sigma b a a_1^2 a_2 a_4$ et ensuite $B A A_4 A_2 A_3^2$; BB_2, $A_2 B$, $A_4 A_2$, AA_1 accouplés et B_1 en A, A_1 en A_3, c'est la même forme.

β $(a a_2 a_3)$ donne $A_1^2 B_4^2$, AB_1, $A_2 B$, $A_2 A$, $B_1 A_2$, B_4 en A_4, B en A_1, savoir la même forme.

$\beta\,(a_2 a_3 a_4)$ donne $A_1^2 B_1^2$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$, AB, B_1 en A, B en A_1, savoir la même forme.

$\gamma\,(a_3^2 b a_1 a b_1)$ donne $A_2^2 B_2^2$, $A_1 A_3$, $A_3 B_1$, $B_1 A_1$, BA, B_2 en B, A en A_2, savoir la même forme.

12. b_1 en a, b en a_1, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$, b_3 en a_2. Indice 12.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b_3\ b_4\ a_1\ a^2\ a_4$
C_7	$b^4\ b_1^3 b_2^2 b_3^2 b_4^3 a_1^2 a\ \ a_4$	C_7	$b\ \ b_1^2 b_2\ b_3^3 b_4^2 a_1^3 a^4\ \ a_4^2$
C_{11}	$b^5\ b_1^4 b_2^7 b_3^3 b_4^5 a_1^4 a^3\ \ a_4^2$	C_{11}	$b^3\ b_1^4 b_2^2 b_3^5 b_4^3 a_1^4 a^5\ \ a_4^4$
C_{13}	$b^5\ b_1^4 b_2^5 b_3^3 b_4^6 a_1^5 a^5\ \ a_4^4$	C_{13}	$b^4\ b_1^5 b_2^4 b_3^6 b_4^3 a_1^4 a^5\ \ a_4^5$
C_{13}	$b^4\ b_1^4 b_2^6 b_3^4 b_4^5 a_1^5 a^4\ \ a_4^5$	C_{13}	$b^4\ b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^3 a_1^4 a^4\ \ a_4^6$

$C_{13}\quad b^4\ b_1^4 b_2^6 b_3^4 b_4^4 a_1^4 a^4\ a_4^6$

$\gamma\,(a_3^2 b_1 a b a_1)$ donne $A_2^2 B_2^2$, BA, $A_1 A_3$, $A_3 B_1$, $B_1 A_1$, B_2 en B, A_2 en B_3 en A savoir b_1 en a, b en b' en a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$.

$\gamma\,(a_4^2 b_1 a b a_1)$ donne également cette forme.

13. b_1 en a, b en a_1, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$, b_3 en b'_3 en a_2.

Droite en									
C_3	1		2		1	1	1		
C_7	3	1	4	2	2	3	2	1	
C_{12}	4	3	6	4	3	6	4	2	1
C_{16}	5	4	7	6	3	8	6	4	2
C_{21}	6	5	9	7	4	10	9	6	4
C_{28}	9	6	12	9	6	12	12	9	6
C_{39}	15	9	17	12	10	16	16	12	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b_3 donnent les différences

1 , 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 5 . . . .

14. b_1 en a, b en a_1, $(a_3 b_4)$, b_2 en a_4, b_3 en a_2

Droite en									
C_3	1		2		1	1		1	
C_8	3	1	5	2	3	3	1	2	1
C_{15}	5	3	8	5	6	6	3	4	2
C_{23}	7	5	11	8	9	10	6	6	4
C_{32}	10	7	14	11	12	14	10	9	6
C_{43}	14	10	18	14	15	19	14	13	9
C_{57}	19	14	24	18	19	24	19	18	13
C_{74}	25	19	31	24	24	30	24	24	18
C_{94}	31	25	39	31	31	37	30	31	24
C_{116}	38	31	47	39	39	45	37	38	31
C_{140}	46	38	55	47	48	54	45	46	38
C_{166}	55	46	64	55	57	64	54	54	46
C_{194}	65	55	74	64	66	74	64	63	54
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

III. 1. b_1 en a, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 12.

Droite en		Droite	
C_5	$b^2 b_1 b_2 b_3 b_4$	C_3	$b_2 b_3 b_4 a^2 a_1$
C_6	$b^3 b_1^3 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b'^2 a$	C_6	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b' a^3 a_1^3$
C_{10}	$b^5 b_1^5 b_2^3 b_3^3 b_4^3 b'^3 a^3 a_1^2$	C_{10}	$b b_1^3 b_2^4 b_3^4 b_4^4 b'^3 a^4 a_1^4$
C_{13}	$b^6 b_1^5 b_2^4 b_3^4 b_4^4 b'^5 a^5 a_1^3$	C_{13}	$b^3 b_1^4 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^4 a^4 a_1^6$
C_{14}	$b^6 b_1^5 b_2^4 b_3^4 b_4^4 b'^6 a^5 a_1^5$	C_{14}	$b^4 b_1^4 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^6 a^4 a_1^6$

C_{15} $b^6 b_1^4 b_2^5 b_3^5 b_4^5 b'^6 a^5 a_1^6$

2. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_3), (a_3b_3), b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1		2			1	1	1	
C_7	3	1	4	2		2	2	3	1
C_{14}	6	3	8	4	2	4	4	5	3
C_{23}	9	6	12	8	4	7	7	8	5
C_{34}	13	9	17	12	8	10	10	12	8
C_{48}	17	13	23	17	12	15	15	17	12
C_{64}	23	17	29	23	17	20	20	23	17
C_{84}	30	23	37	29	23	27	27	30	23
C_{106}	38	30	45	37	29	34	34	38	30
C_{131}	47	38	55	45	37	42	42	46	38
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b donnent les dernières différences

2 , 2 , 4 , 4 , 5 , 6 , 6 , 8 , 8 , 10 , 10 , . . .

3. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_2), (a_3b_4), (a_4b_3) est traduisible comme II. n. 5 par $(aa_2a_3)^2$ en (ab_1), b en b' en a_2, b_2 en a_3, (b_3a_4), (b_4a_1), et de là par $(aa_2a_4)^2$ en A_1B_3, A_3B_1, $B'B$, B en B', B_3 en B_2 en A_3, B_1 en A_2 en A_1, voir II. § 11. (aa_2), (aa_3) ou (aa_2), (a_2a_3), etc. sont inadmissibles.

4. b_1 en a, b en b' en b'' en a_1, (a_2b_2), (a_3b_4), (a_4b_3) donne par les mêmes transpositions la Q^2 apériodique: b' en b'_1 en b, c' en c'_1 en c, a' en a'_1 en a.

5. b_1 en a, b en b' en a_1, b_2 en a_2, (a_3b_4), (a_4b_3) est apériodique comme n. 1.

6. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_2), b_4 en . . . a_3, (a_4b_3) est traduite semblablement à n. 3, par $(aa_2a_4)^2$ en (ab_1), b en b' en a_2, b_2 en b'_2 en . . . a_3, (b_3a_4), (b_4a_1), et de là par $(aa_2a_4)^2$ en b' en b, c' en c'_1 en c'_2 en . . . a, a' en a'_1 en c et les seuls cas périodiques sont donc $b'_4 = a_3$ et $b''_4 = a_3$. II. p. § 3.

7. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_2), b_4 en a_3, b_3 en a_4 est apériodique à plus forte raison de II, 3.

8. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) donne le même tableau que n. 1.

9. b_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), b_2 en a_4.

Droite en									
C_3	1		2			1	1	1	
C_7	3	1	4	2		2	3	2	1
C_{13}	6	3	7	4	2	3	5	4	2
C_{21}	8	6	11	7	4	5	8	7	4
C_{30}	11	8	15	11	7	7	11	10	7
C_{42}	15	11	20	15	11	11	15	15	10
C_{57}	20	15	26	20	15	16	21	20	15
C_{75}	27	20	32	26	20	21	27	26	20
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b ont les différences

$$2\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,6\,,\,7\,,\,8\,,\,8\,,\,\ldots$$

10. b_1 en a, b en b' en b'' en a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) est traduite par $(a_2^2a_3a_4b_1a)$ en II. 13 et est apériodique, par conséquent.

11. b_1 en b'_1 en a, b en b' en a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4)

Droite en									
C_3	1			2			1	1	1
C_6	3	1		3	2		2	2	2
C_{12}	6	3	1	6	3	2	4	4	4
C_{20}	9	6	3	9	6	3	7	7	7
C_{30}	14	9	6	13	9	6	10	10	10
C_{42}	18	14	9	18	13	9	14	14	14
C_{57}	24	18	14	24	18	13	19	19	19
C_{73}	30	24	18	30	24	18	24	24	24
C_{93}	37	30	24	38	30	24	31	31	31
C_{114}	45	37	30	45	38	30	38	38	38
C_{138}	54	45	37	54	45	38	46	46	46
C_{164}	63	54	45	63	54	45	55	55	55
C_{192}	74	63	54	73	63	54	64	64	64
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Les multiplicités dans a_2 ont les différences

$$1\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,5\,,\,6\,,\,6\,,\,7\,,\,7\,,\,8\,,\,9\,,\,9\,,\,10\,,\,10\,,\,11\,,\,11\,,\,\ldots$$

12. Toutes les caractéristiques, qui possèdent plus d'intercalés que les précédentes, sont apériodiques.

IV. 1. b_1 en $\ldots b_1^{(m)} = a$, b en $b' \ldots b^{(n)} = a_2$, (a_1b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) est traduisible au moyen de $(a_1a_3a_4)^2$ en AB_2, A_1B, A_2B_1, B en $B' \ldots B^{(n)} = A_2$, B_1 en $\ldots B_1^{(m)} = A$, donc les cas: 1, 5; 2, 4; 3, 3 égaux à m, n ou à n, m, sont les premiers à tableau illimité. $(a_1a_4a_3)^1$ et (a_1a_3), (a_1a_4) etc. sont excluses.

2. b_1 en $\ldots b_1^{(m)} = a$, b en $b' \ldots b^{(n)} = a_2$, (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4 est traduisible au moyen de $(aa_1a_3)^2$ en $A_4^2B_2^2$, A_1A, $B_1^{(m-1)}A_3$, A_2B, AB_4, B_4 en A_4, A_3 en $B_1 \ldots B_1^{(m-1)}$, B en $B' \ldots A_2$, savoir (ab_1), b en a_2, b_3 en $b'_3 \ldots b_3^{(m)} = a_3$, (a_1b_2), b_4 en $b'_4 \ldots b_4^{(m)} = a_4$, qui est traduite par $(aba_2)^2$ en AB, A_4B_3, A_3B_4 accouplés et B_4 en $\ldots B_4^{(n)} = A_4$, B_3 en $\ldots B_3^{(m)} = A_3$, B en B_2 en A_2 en A. Donc les cas 1, 3 ou 2, 2 sont les premiers à tableau illimité. $(aa_1a_3)^1$ ou (aa_1), (aa_3); (a_1a), (a_1a_3) etc. sont excluses.

3. b_1 en $\ldots b_1^{(m)} = a$, b en $b' \ldots b^{(n)} = a_2$, (a_1b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4 fournit de même par $(aa_1a_3)^2$: (ab_1), b en b' en a_2, b_3 en $\ldots b_3^{(m)} = a_3$, (a_1b_2), b_4 en $\ldots b_4^{(n)} = a_4$, qui est apériodique déjà pour $m = n = 1$, voir § 5. III.

4. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4

Droite en									
C_3	1		2		1	1		1	
C_8	2	1	5	2	3	3	1	3	1
C_{15}	4	2	8	5	5	6	3	6	3
C_{25}	8	4	12	8	8	10	6	10	6
C_{39}	13	8	18	12	13	15	10	15	10
C_{56}	18	13	25	18	19	21	15	21	15
C_{75}	24	18	32	25	25	28	21	28	21
C_{97}	32	24	40	32	32	36	28	36	28
C_{123}	41	32	50	40	41	45	36	45	36
C_{152}	50	41	61	50	51	55	45	55	45
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b_3 donnent les différences

2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , . . .

$(a a_1 a_3)^2$ fournit $A_4^2 B_2^2$, $A_2 B$, $A B_4$, $B_3 A$, $B_1 A_3$, B_4 en A_4, B en A_2, A_3 en B_1, B_2 en B_3, savoir la même caractéristique.

$(a_1^2 b_3 a_3 b_4 a_4)^2$ fournit $A^2 B^2$, $A_2 A_1$, $A_4 B_1$, $B_4 A_3$, $B_3 A_4$, A_3 en B_4, A_4 en B_3, la même caractéristique.

5. b en a_1, b_2 en a, b_1 en a_2, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Indice 18.

Droite en					
C_3	b^2	b_1	b_2	b_3	b_4
C_7	b^4	$a_1^2 b_1^3$	a_2	$b_2^3 a$	b^2 b_4^2
C_{12}	b^6	$a_1^4 b_1^4$	$a_2^3 b_2^5$	$a^3 b_3$	b_4^4
C_{15}	b^6	$a_4^6 b_1^5$	$a_2^4 b_2^6$	$a^5 b_3^5$	b_4^5

Droite en				
C_3	a_1	a_2	$a^2 b_3$	b_4
C_7	b	$a_1^3 b_1$	$a_2^3 b_2^2$	$a^4 b_3^2 b_4^2$
C_{12}	b^3	$a_1^5 b_1^3$	$a_2^4 b_2^4$	$a^6 b_3^4 b_4^4$
C_{15}	b^5	$a_1^6 b_1^4$	$a_3^5 b_2^6$	$a^8 b_3^5 b_4^5$

6. b en a_1, b_2 en a, b_1 en ... $b_1^{(n)} = a_2$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ donne par $(a^2 b a_1 b_2 a_3)^3 A_4^2 A_3^2$, $B B_2$, $A_3 A$, $A_2 A_1$, $A B_4$, B_2 en B, A_1 en B_1 en A_2, savoir $(a b_1)$, $(b a_2)$, $(a_1 b_2)$ b_3 en a_3, b_4 en $b_4 \ldots b_4^{(n-1)} = a_4$, et celle-ci par $(a a_2 a_3)^2 A_4 B_1$, AB, $B_3 B_4$, B en B_1, B_4 en ... $B_4^{(n-1)} = A_4$. Les caractéristiques sont des Q^2 à (ab), a en c etc. Le premier cas apériodique est donc $n = 4$.

La transposition ne peut tomber en défaut, mais lorsque $a_3 a_4$ s'approchent infiniment, on obtient immédiatement une Q^2, comme il suit: $\gamma_2 (b^2 b_2 a a_1 b_4)$ en β_2 $(B_1 A_1 B_2)$ et ε_1 $(a^3 a_1^2 b_2^2 a_4^2 a_2 a_3 b)$ en β_1 $(A_1 B A_2)$, $A_2 B_4$, $B A_1$, $A_2 B_2$ accouplés et A_1 en B_1 en A_2, B_2 en B.

7. b en a_1, b_2 en a, b_1 en ... $b_1^{(n)} = a_2$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4 fournit par $(a^2 b a_1 b_2 a_3)^2$ une caractéristique $(a b_1)$, b en a_2, $(a_1 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en $b'_4 \ldots b_4^{(n+1)} = a_4$, et celle-ci par $(a b a_2)^2$ AB, $B_4 B_3$, $A_3 B_4$, B en B_2 en A_2 en A, B_3 en A_3, donc $n = 1$ fait déjà apériodique.

8. b en a_1, b_2 en a, b_1 en .... $b_1^{(n)} = a_2$, $(a_3 b_4)$, b_3 en ... $b_3^{(m)} = a_4$ est traduite par $(a_3^2 b a_1 b_2 a)^3$ en BA, $B_2 A_4$, $A_2 B_1$ accouplés et B_1 en ... $B_1^{(n)} = A_2$, A en B_3 en ... $B_3^{(m)} = A_4$ en B, A_1 en B_2; c'est donc une forme de II. p. § 11, et n, m égaux à 1, 5; 2, 4; 3, 3 sont les premiers cas apériodiques. La transposition ne tombe jamais en défaut.

9. b en a_1, b_2 en a, b_1 en a_2, b_4 en a_3, b_3 en a_4 devient apériodique suivant § 3, I.

10. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$ est toujours traduisible par $(a_1 a_3 a_4)^2$ en AB_2, $A_1 B$, $A_2 B_1$, B_1 en A, B en A_2, B_2 en A_4 en A_1; c'est la caractéristique illusoire du § 13 à l'indice 30.

11. b_1 en a, b en ... $b^{(n)} = a_2$, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$ donnent b' en a, a' en a'_1 en c, c' en ... $c'^{(n)} = b$, savoir § 15 pour $n = 2$, et apériodicité pour $n = 3$.

12. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en a_4 — Indice 10.

Droite en		Droite	
C_3	$b^2\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$	C_3	$b\ a_3\ a_1\ a_2\ a^2\ a_4$
C_7	$b^4\ b_1^2\ b_2^3\ b_3^2\ b_4^3\ a_2^2\ a\ a_4$	C_7	$b_1^2\ b_2^2\ b_3^3\ b_4\ a_2^2\ a^4\ a_4^3$
C_{11}	$b^5\ b_1^4\ b_2^4\ b_3^3\ b_4^5\ a_2^4\ a^2\ a_4^3$	C_{11}	$b^2\ b_1^4\ b_2^3\ b_3^4\ b_4^3\ a_2^4\ a^5\ a_4^5$
C_{15}	$b^6\ b_1^6\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^6\ a_2^5\ a^4\ a_4^5$	C_{15}	$b^4\ b_1^5\ b_2^5\ b_3^5\ b_4^5\ a_2^6\ a^6\ a_4^6$

C_{17} $b^6\ b_1^6\ b_2^6\ b_3^6\ b_4^6\ a_2^6\ a^6\ a_4^6$

13. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en b'_4 en a_4

Droite en									
C_3	1		2		1	1	1		
C_7	2	1	4	2	2	3	3	1	
C_{12}	4	2	6	4	3	4	6	3	1
C_{20}	7	4	10	6	6	6	9	6	3
C_{34}	10	7	15	10	10	10	13	9	6
C_{43}	14	10	19	15	14	14	18	13	9
C_{57}	19	14	24	19	19	18	24	18	13
C_{71}	24	19	31	24	25	24	30	24	18
C_{93}	30	24	38	31	31	31	37	30	24
C_{115}	38	30	45	38	38	38	45	37	30
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans b_4 donnent les différences

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, ...

14. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en... a_3, $(a_4 b_4)$ est toujours traduisible par $(a a_1 a_4)^2$ en $A_2^2 B_3^2$, AB_2, $A_3 B$, $B_3 A$, $B_1 B_4$, B_2 en... A_3, B en A_2, donc (ab_1), b en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en $b'_2 \ldots a_3$, b_4 en a_4 et celle-ci par $(a b a_2)^2$ en AB_2, $A_4 B_3$, $A_3 B_4$, B_4 en A_4, B_3 en A_2 en A, B en B_2 en $B'_2 \ldots A_3$. Seulement b_2 en a_3 fournit II p., § 15 et b_2 en b'_2 en a_3 donne déjà apériodicité.

15. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en a_3, b_4 en a_4 est encore traduisible au moyen de $(a a_1 a_4)^2$ etc., et donne b' en b'_1 en a, a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b, laquelle est apériodique, II p. § 3, II.

16. b_1 en a, b en a_2, b_2 en a_3, b_3 en a_1, $(a_4 b_4)$

Droite en									
C_3	1	2		1	1		1		
C_8	3	1	5	2	3	1	3	1	2
C_{16}	6	3	9	5	5	3	6	3	5
C_{26}	10	6	13	9	8	5	10	6	8
C_{35}	14	10	18	13	11	8	15	10	12
C_{57}	18	14	23	18	15	11	20	15	16
C_{65}	22	18	28	23	19	15	26	20	21
C_{80}	27	22	33	28	24	19	32	26	26
C_{97}	32	27	39	33	30	24	39	32	32
C_{116}	38	32	46	39	37	30	46	39	38
C_{138}	45	38	54	46	45	37	54	46	46
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

17. b_1 en... $b_1^{(m)} = a$, b en b' en... $b^{(n)} = a_2$, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_4)$ $(a_4 b_2)$ fournit par $(a_1 a_3 a_4)^2$ AB_2, $A_1 B$, $A_2 B_1$, B_1 en... $B_1^{(m)} = A$, B en B... $B^{(n)} = A_2$ en A_1, donc apériodique pour 1, 5; 2, 4; 3, 3 égaux à m, n ou n, m.

18. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_4)$, b_2 en... a_4 est traduisible par $(a_3^2 a b_1 a_2 b)^3$ en $A_1 B_2$, $B_1 A$, BA_2, B_2 en... A_4 en B, A_2 en B_1, A en A_1, ce qui ne contient que des caractéristiques illusoires et devient apériodique pour b_2 en b'_2 en b''_2 en a_4. Voir II. § 12.

19. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, b_4 en a_3, b_2 en a_4

Droite en									
C_3	2		1		1	1		1	
C_8	2	2	5	1	3	3	1	3	1
C_{14}	3	2	8	5	5	5	3	5	3
C_{22}	7	3	10	8	8	8	5	7	5
C_{34}	11	7	15	10	11	11	8	11	7
C_{49}	13	11	22	15	19	20	11	17	11
C_{66}	19	13	28	22	24	27	20	23	17
C_{89}	29	19	36	28	33	36	27	31	23
C_{118}	37	29	48	36	58	47	36	42	31
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

20. b_1 en $\ldots b_1^{(m)} = a$, b en $\ldots b^{(n)} = a_2$, $(a_1 b_3)$, b_4 en $\ldots b_4^{(p)} = a_3$, $(b_2 a_4)$ est traduisibile par $(a\, a_1 a_4)^2$ en $B_1^{(m-1)} B$, $A_3 B_3$, $A_2 B_2$, B_3 en $B_4 \ldots B_4^{(p)} = A_3$, B_2 en $B_1 \ldots B^{(m-1)} B$ en $\ldots B^{(n)} = A_2$, les caractéristiques de II. p. § 13.

21. b_1 en b'_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_4)$, b_2 en a_4

Droite en									
C_3	1			2		1	1	1	
C_7	2	1		4	2	2	3	3	1
C_{13}	5	2	1	6	4	4	6	5	3
C_{20}	8	5	2	8	6	6	9	8	5
C_{30}	12	8	5	12	8	9	13	12	8
C_{43}	16	12	8	17	12	12	17	17	12
C_{57}	22	16	12	23	17	17	22	22	17
C_{74}	28	22	16	29	23	23	28	28	22
C_{94}	35	28	22	36	29	30	36	35	28
C_{115}	42	35	28	43	36	36	44	43	35
C_{138}	51	42	35	51	43	43	52	51	43
C_{163}	60	51	42	60	51	51	60	60	51
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres ont les dernières différences

2 . 2 . 1 . 3 . 2 . 3 , 2 . 3 , 1 . 2 , 2 . 4 , 2 , 2 , 1 , . . .

22. b_1 en b'_1 en a, b en a_2, b_3 en a_4, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$ *)

Droite en									
C_3	1			2		1		1	1
C_7	3	1		4	2	2	1	2	3
C_{13}	6	3	1	6	4	5	2	4	5
C_{22}	10	6	3	10	6	8	5	7	8
C_{34}	14	10	6	15	10	12	8	11	13
C_{48}	20	14	10	20	15	17	12	15	18
C_{64}	26	20	14	26	20	23	17	20	23
C_{87}	33	26	20	34	26	30	23	27	30
C_{112}	41	33	26	42	34	37	30	34	38
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres ont les dernières différences

1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 2 , 2 , 4 , 2 , 2 , 4 , . . .

*) 21. et 22. sont deux caractéristiques essentiellement différentes.

23. Toutes les autres caractéristiques sont écartées ou comme apériodiques ou comme réductibles à des Q^2.

§ 8. — Les classes équivalentes des formes non réductibles à des Q^2.

Les §§ 4-7 ont conduit aux tableaux fermés, dont voici les caractéristiques.

1. b en $b' \ldots b^{(m)} = a$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$,	Indice $2(m+1)$
2. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	6
3. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4	10
4. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4	18
5. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4	8
6. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4	14
7. b en a, $(a_1 b_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4	12
8. b en a, $(a_1 b_1)$, b_3 en a_2, b_4 en b_3, b_2 en b_4	12
9. b en b' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	10
10. b en b' en b'' en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	18
11. $(a b_1)$, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $a_4 b_4)$	6
12. $(a b)$, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	8
13. $(a b_1)$, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4	14
14. $(a b_1)$, b en a_1, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4	12
15. $(a b_1)$, b en b' en a_2, $(a_1 b_3)$, b_2 en a_3, $(a_4 b_4)$	12
16. $(a b_1)$, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	10
17. $(a b_1)$, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	18
18. $(a b_1)$, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	14
19. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	4
20. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	6
21. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4	10
22. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4	18
23. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4	8
24. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4	14
25. $(a b_1)$, $(b a_1)$, b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4	12
26. $(a b_1)$, $(b a_1)$, b_3 en a_2, b_4 en a_3, b_2 en a_4	12
27. b en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	6
28. b en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$	6
29. b en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, b_2 en a_4	12

30. b en b' en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ 12

31. b en b' en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4$, $(a_4 b_2)$ 12

32. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en a_4 10

33. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4 30

I. Les caractéristiques du n. 1 se changent par $(a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3})^2$ en $A_{i_4}^2 A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A$, $B_{i_4}^2 B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B$, B en B′ en A, c'est-a-dire en une caracteristique du § 2.

La $\mathfrak{C}^2$ ne tombe jamais en défaut, étant impossible que tous les points fondamentaux soient alignés.

II. Les n. 2-8 sont traduites par $(aba_1)^2$, comme il suit:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_2 (b^2 ab_2 b_3 b_4) \text{ en } \gamma'_2 (B^2 AB_2 B_3 B_4)\\ \gamma'_1 (a_2 ba_2 a_3 a_4) \text{ en } \gamma_1 (A^2 BA_2 A_3 A_4)\end{array}\right\} , \quad A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4, \text{ accouplés},$$

donc en une des n. 20-26.

La transposition serait détruite par $(aba_1)^1$, ce qui serait contradictoire à l'enchaînement b en a.

III. Les n. 11, 16, 17 sont traduites par $(aa_2a_4)^2$ en $A_3^2 A^2$, $A_1 B$, AB_3, $A_4 A$, $A_2 A$ B en B′... A_1, savoir les caractéristiques 21, 22, 23.

Les n. 12, 13, 18 sont traduites par $(aa_2a_4)^2$ en $A_3^2 A^2$, $B'_4 A_2$, $A_4 A_4$, $A_1 B$, AB_3, A_2 en B_4 en B'_4, B en A_1, les n. 23, 24, 24.

Le n. 14 est traduite par $(aba_2)^2$, comme il suit:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_2 (b^2 aa_1 b_3 b_4) \text{ en } \gamma'_2 (B^2 AA_1 B_3 B_4)\\ \beta_1 (aa_3 a_4) \quad \text{ en } \gamma'_1 (A^2 BA_2 A_3 A_4)\end{array}\right\} , \quad A_4 B_4, A_3 B_3, A_2 A_1, BA \text{ accouplés}, A_1 \text{ en } A_2$$

c'est-à-dire le n. 25.

IV. Les n. 9, 10 sont traduites par $(a_1 a_2 a_3)^2$ en n. 3, 4. L'alinéation $(a_1 a_2 a_3)^1$ entraînerait (bb_4), et ensuite b en a_4, ce qui ne se comporterait pas avec la caractéristique. Les n. 3, 4 se changent suivant II.

V. Le n. 15 est traduisible en 26 par $(a_1 a_2 a_4)^2$, comme il suit:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_2 (b_3^2 b_1 b_2 b_4 b) \text{ en } \gamma'_2 (B^2{}_3 B_4 B_1 B_2 B)\\ \delta_1 (a^2 a_2^2 a_1^2 a_3 a_4 b') \text{ en } \gamma'_1 (A^2 A_3 B'A_1 A_2)\end{array}\right\} , \quad \begin{array}{l}A_2 B_2, A_1 B_1, A_3 B, B'B_4 \text{ accouplés}\\ B_2 \text{ en } A_3, B_4 \text{ en } A_2, B \text{ en } B'\end{array}$$

$(a_1 a_2 a_4)^1$ est empêchée par la transformation involutive interne et une approche $a_1 a_4$ ferait s'approcher $b_1 b_4$ et détruirait la caractéristique de même que les deux autres approches entre a_1, a_2, a_4.

VI. Le n. 29 se change en le n. 31. Voir § 7. III.

Voici donc l'ensemble des caractéristiques non équivalentes entre elles :

II.	1. (ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	Indice 4	1 car.
	2. (ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4	6	3
	3. (ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4	10	4
	4. (ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b_4'' en a_4	18	4

5. $(ab_1), (ba_1), (a_2 b_2), b_3$ en a_3, b_4 en a_4	8	3
6. $(ab_1), (ba_1), (a_2 b_2), b_3$ en a_3, b_4 en b'_4 en a_4	14	4
7. $(ab_1), (ba_1), b_2$ en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4	12	3
8. $(ab_1), (ba_1), b_2$ en a_3, b_3 en a_4, b_4 en a_2	12	3
9. b en a_1, b_1 en $a, (a_2 b_2), (a_3 b_3), (a_4 b_4)$	6	1
10. b en a_1, b_1 en $a, (a_2 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_2)$	6	1
11. b en a_1, b_2 en $a, (a_2 b_3), (a_3 b_1), b_4$ en a_4	10	1
12. b_1 en a, b en b' en $a_1, (a_2 b_2), (a_3 b_3), (a_4 b_4)$	12	1
13. b_1 en a, b en b' en $a_1, (a_2 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_2)$	12	2
14. b en a_1, b_1 en $a, (a_2 b_2), (a_3 b_3), b_4$ en a_4	30	1

J'ajoute, que n. 1 si elle existe et qu'elle possède un point double propre, peut être traduit au moyen de $(abd)^2$ en b en a, $(a_i b_i)$ et de là en une du § 3. Les transformations périodiques s'arrangent donc sous les classes (ab) et sous 14 caractéristiques isolées et les réductions sont effectuées sans faire usage de points non fondamentaux.

§ 9. Construction et étude des transformations périodiques cubiques.

I. Si l'on ne voulait pas se restreindre aux types, on devrait discuter la compatibilité de toutes les formes particulières du § 1. Γ avec les caractéristiques, dont on a dressé le tableau fermé.

II. 1. Pour les caractéristiques § 3. I et pourvu que l'homographie, à laquelle le tableau revient, soit une identité, le lieu des cycles $(m+1)$ ponctuels à l'ordre $2m+3$ passe $(2m+1)$ fois par b. Elle touche $bb_i, \ldots ba_i$ en $b_i \ldots a_i$ et contient les points invariables dans les deux droites doubles de l'homographie. L'existence de cette courbe et la forme du tableau démontrent la périodicité. Les tangentes de la courbe, sortant de a se partagent en 4 cycles d'une homographie.

2. La $f^{\text{ième}}$ répétition $(f \overline{\overline{<}} m+1)$ produit une transformation de Jonquières du degré $2f$ et possède les points fondamentaux simples

$$\Sigma' \qquad b_i\, a_i^{(m-1)}\, a_i^{(m-2)} \ldots a_i^{(\rho)} \ldots a_i^{(m-f+1)}$$

$$\Sigma \qquad a_i^{(f-1)}\, a_i^{(f-2)}\, a_i^{(f-3)} \ldots a_i^{(\rho-m+f-1)} \ldots a_i$$

où deux points de la même colonne sont accouplés.

Pour déterminer les enchaînements il faut distinguer

$$m = \mu f \quad b_i \text{ en } a_i^{(m-f)} \text{ en } a_i^{(m-2f)} \ldots a_i^{(f)} \text{ en } a_i$$

$$a_i^{(\rho)} \text{ en } a_i^{(\rho-f)} \text{ en } a_i^{(\rho-2f)} \ldots a_i^{(\rho-(\mu-1)f)}$$

Soit $m = \mu f + g$. Si maintenant

$$\alpha)\ f < \frac{m}{2} + 1, \text{ on aura } b_i \text{ en } a_i^{(m-f)} \ldots a_i^{(g)} \qquad a_i^{(m-g-1)} \text{ en } a_i^{(m-g-f-1)} \ldots a_i^{(f-1)}$$

$$a_i^{(m-1)} \text{ en } a_i^{(m-f-1)} \ldots a_i^{(g-1)} \qquad a_i^{(m-g-2)} \text{ en } a_i^{(m-g-f-3)} \ldots a_i^{(f-2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_i^{(m-g)} \text{ en } a_i^{(m-g-f)} \ldots a_i \qquad a_i^{(m-f+1)} \text{ en } a_i^{(m-2f+1)} \ldots a_i^{(g+1)}$$

$$\beta)\ f \geqq \frac{m}{2} + 1, \text{ savoir } f = \frac{m}{2} + 1 + \gamma, \text{ on aura}$$

$$\left(a_i^{(\frac{m}{2}+\gamma)} a_i^{(f-1)} \right) \ldots \left(a_i^{(m-f+1)} a_i^{(f-2\gamma-1)} \right)$$

$$b_i \text{ en } a_i^{(m-f)};\ a_i^{(m-1)} \text{ en } a_i^{(m-f-1)};\ \ldots\ a_i^{(f)} \text{ en } a_i$$

3. Si f est facteur de m, la transformation T_f ne possède que des enchaînements $a_i b_j$, où $i(=)j$. Si f n'est pas facteur de m, ou tous les enchaînements de T_f sont $a_i b_j$, $(i=)j$, ou tels enchaînements ensemble aux coincidences $(a_i b_j)$, $i(=)j$. Les seuls cas $m = \mu f + f - 1$, donc $g = f - 1$, fournissent des T_f, dont tous les enchaînements sont $a_i b_j$.

En supposant même la courbe des hémicycles non décomposée, on doit distinguer différents cas suivant la valeur des rapports anharmoniques de l'homographie dans (ab).

III. Dans le § 3 on a écrit les tableaux fermés pour le cas (ab). Toutefois il n'est pas indispensable, que l'homographie, à laquelle on arrive ainsi, soit immédiatement une identité. L'indice pourrait devenir un multiple de $(m + 1)$. Je me propose d'étudier les pareilles transformations.

1. Dans une transformation de Jonquières la courbe fondamentale correspondante à a ou b est déterminée univoquement par les points simples fondamentaux et par b ou a et cela d'autant plus, si la courbe fondamentale se décompose.

2. Or la transformation de l'ordre $2m + 3$ dans § 3. I est de manière, que deux points fondamentaux accouplés coincident partout, les deux courbes fondamentales de a, b coincident par conséquent et cela démontre, que toute droite par a porte une involution, si tôt qu'il existe une partie de la courbe fondamentale, qui est rencontrée par une droite par a à l'extérieur de a.

3. Afin qu'une pareille involution n'entre pas, il faut, que la courbe fondamentale ait dans (ab) une multiplicité égale à son ordre, savoir, qu'elle se décompose en $2m+2$ droites par a. Donc:

Si Q^3 doit avoir un indice $> 2m + 2$, la transformation de l'ordre $2m + 2$ doit avoir une courbe fondamentale, qui se décompose en $2m + 2$ droites.

4. Cette courbe fondamentale se change par $(Q^3)^{-1}$ en la courbe fondamentale de la transformation précédente et comme un tel changement produit toujours des droites, il s'ensuit enfin, que Q^3 même est de la sorte, que toute la courbe fondamentale A de a se décompose en des droites.

5. La transformation interne en question ne peut point posséder un point fondamental simple à l'extérieur de a. Si elle en avait un, A devrait passer par ce point et

la droite de ce point vers a devrait faire partie de A. Mais cette droite est aussi fondamentale pour le point simple, ce qui donne un paradoxe, si non ce point simple est infiniment voisin de a. Il s'ensuit donc que tous les points fondamentaux simples sont infiniment voisins de a.

6. Pour la recherche, qui nous occupe, les seules dégénerations admissibles sont: § 1, Γ. 18. 19. 21. et il est essentiel, que la transformation n'est pas encore déterminée complètement par les systèmes fondamentaux. Par les autres déterminations s'ensuivent l'homographie entre les rayons de a et l'indice dans ces rayons mêmes.

7. Si dans la transformation en considération l'indice entre les rayons de a est égal à 1, elle s'appelle une homologie supérieure. Donc on conclut de ce qui précède: Une homologie supérieure possède toujours une courbe remplie de points doubles de la transformation. Cette courbe C_ν est du même ordre que la transformation même et la détermine, savoir elle a un point $\nu - 1^{\text{tuple}}$ en a et les points voisins de a sont fondamentaux pour l'homologie.

Dans notre transformation successive $(m+1)^{\text{ième}}$ de Q^3, qui est évidemment une homologie supérieure, existe une courbe A de l'ordre $2m+3$ à un point $(2m+2)^{\text{tuple}}$. Les points voisins de a se partagent en deux fois $m+1$, dont toute partie forme un cycle et dans la courbe même existe une homographie de l'indice $m+1$, qui contient ces deux cycles.

Réciproquement on peut déterminer la transformation par cette courbe-lieu. Prenez une courbe C_{2m+3} à un point $(2m+2)^{\text{tuple}}$ a, dont les tangentes se partagent en deux fois $m+1$ d'un cycle homographique. Les cycles, qui en même temps apparaissent dans C_{2m+3} au moyen de cette homographie, font aussi partie de la Q^3. On peut prendre encore deux points successifs entre les voisins de l'un cycle et deux points successifs entre les points de l'autre cycle, pour en constituer le système fondamental de Q^3. Alors l'homographie dans C_{2m+3} sert à compléter la transformation Q^3.

8. On pourrait penser, qu'ainsi l'indice de l'homologie et l'indice $2\lambda(m+1)$ de Q^3 ne soient pas encore déterminés. Pourtant il en est ainsi. Car le rapport double de l'homologie dépend de la relation, que les voisins de a pour le réseau de C_{2m+3} ont aux voisins de a pour la C_{2m+3} fixe, laquelle relation peut être mésurée par le rapport des rayons de courbure des deux points multiples. Car même dans le cas normal il y a deux points fondamentaux simples infiniment rapprochés au point a vers la même direction.

9. Comme la courbe C_{2m+3} ensemble aux points doubles détermine dejà l'homologie supérieure, il s'ensuit, que les formes des transformations de Jonquières, où des points simples en nombres variés pour les différentes directions sont infiniment rapprochés à a, ne peuvent point exister. Donc notre cas spécial n'entre point pour le système fondamental 19. Le système 21 conduit à ce cas spécial de la T_{2m+3}, où les voisins de a dans la C_{2m+3} fixe se trouvent seulement dans $m+1$ directions fixes, où il y a donc $m+1$ rebroussements infiniment rapprochés. Ces $m+1$ tangentes doivent alors déterminer un seul cycle, par lequel se détermine aussi l'homographie dans C_{2m+3}. La Q^3 qui y appartient, se détermine alors comme dans le cas normal par deux successeurs parmi le cycle des voisins.

10. Je termine par remarquer, que les homologies périodiques se laissent conjoindre encore avec les autres particularisations des C_{2m+3}. Mais il est impossible de trouver une Q^3, qui aboutisse par répétition à cette homologie.

IV. 1. (ab), b_i en a_i, $i=1, 2, 3, 4$. Les couples involutives sont contenues dans une courbe du 5ième ordre. Une C_3 anallagmatique, déterminée par les 9 points, possèdera donc des quadruples.

$u' + iu \equiv \gamma$. Les conditions pour la caractéristique se trouvent ainsi. $a + u_1 + u_2 \equiv 0$ et $a + u'_1 + u'_2 \equiv 0$ donnent $(i+1)a + 2\gamma = 0$ 1). Ensuite $a_i + ib_i \equiv \gamma$, 2), et $a_1 + u_1 + u_2 \equiv 0$, $a + b_2 + b_3 + b_4 + u'_1 + u'_2 \equiv 0$ fournissent $a + ia_i - b_i + \Sigma b_i + 2\gamma \equiv 0$ $i = 1, 2, 3, 4$). Puis de $b_i - i(a + b_i) \equiv \gamma$ 4) et $b_i - ia_i \equiv -i\gamma$ 2) dérive $a \equiv (i-1)\gamma$, c'est 1) plus précisée. On a donc $\Sigma b_i \equiv -(2i+1)\gamma$ 5) et $\Sigma a_i + \Sigma b_i + a \equiv 0$ et peut conclure: La valeur de γ est arbitraire, a s'en détermine, les points b_i doivent remplir la seule condition 5) et les points a_i s'en déterminent.

Les 9 points sont la base d'un faisceau de cubiques. Son indice est évidemment 2.

Paramètres sur C_3^3. $u' + xu + y = 0$, $a + u_1 + u_2 = 0$ et $a' + u'_1 + u'_2 = 0$ donnent $(1+x)a - 2y = 0$. $a_i + xb_i + y = 0$ et $b_i - x(a + a_i) + y = 0$ donnent $a_i - a_k = -x(b_i - b_k)$ et $b_i - b = x(a_i - a_k)$ et de là $x^2 = -1$. En outre $\Sigma b_i = (3x-1)y : (1+x)$, $\Sigma a_i = -(3x+1)$. *Les 9 points forment la base d'un faisceau.*

Les transpositions $(ad_id_j)^2$ démontrent, qu'il y a une forme, où les b_i et a_i sont contenues dans une conique anallagmatique.

2. (ab), (a_1b_1), b_2 en a_2, b_3 en a_3, b_4 en a_4, Indice 4. Le lieu des couples involutives est une quartique par a^3, qui touche $a(b_i, a_i)$ $i(=)1$ en b_i, a_i.

Les 8 points déterminent un faisceau de C_3, et l'indice n'est pas 4, puisque ces C_3 coupent la quartique en des triples de points.

Le 9ième pivot ne peut pas être un point double propre d_i. Car chaque C_3 porte une involution $u' + u \equiv \gamma$, dont trois points doubles tombent sur la quartique, le 4ième dans d_i et toutes les C_3 auraient $d_i a$ pour tangente dans d_i. Donc:

Les cubiques du faisceau se touchent dans a_1. Les paramètres dans C_3^3 pour $u' + xu + y = 0$ donne $a = 2y : (1+x)$, $a_1 = -y : (1+x)$, $b_2 + b_3 + b_4 = 3x : (1+x)$, $x^2 = -1$, $a_i + xb_i + y = 0$ $(i = 2, 3, 4)$.

Les paramètres dans C_h fournissent $a \equiv \gamma(i-1)$, $a_1 \equiv \gamma : (1+i) + \mu(k_1 - k_2) : 2$

$$b_2 + b_3 + b_4 \equiv -\frac{3i\gamma}{1+i},\ a_2 + a_3 + a_4 \equiv +\frac{3\gamma i}{1+i},\ ib_i + a_i \equiv \gamma (i = 1, 2, 3).$$

Les points $b_2a_2\,b_3a_3\,b_4a_4$ sont donc toujours dans une conique, comme on le sait par un théorème de M. Bertini *) sur les tangentes à une courbe menées d'un point multiple.

Soit d_1 le rebroussement de C_3^3. En appliquant $(aa_1d_1)^2$, on déduit une caractéristique de la même espèce, où $b_2a_2\,b_3a_3\,b_4a_4$ sont contenues dans une conique, qui est tangente à aa_1 dans a_1 et à la seconde droite double dans un point double. Un faisceau anallagmatique de C_3 ne peut donc pas exister.

En transposant la Q^3 au moyen de $(aa_2d_2)^2$, où d_2 le point double, dans lequel C_h touche ad_1d_2, on obtient une Q^3 de la même espèce à C_h anallagmatique. Mais celle-ci donne suivant le calcul des paramètres toujours lieu à un faisceau anallagmatique de C_3. De là il s'ensuit, qu'en même temps avec la C_h anallagmatique existe un faisceau anallagmatique de C_4 qui passent par $a_2a_1^2$ et touchent dans d_2 la droite ad_2.

*) Voir aussi Caporali, Rendiconto dell'Accad. di Napoli, 1881.

3. (ab), (a_1b_1), (a_2b_2), b_3 en a_2, b_4 en a_4. Indice 4. Les couples involutives remplissent ici une cubique, qui a $a(b_3a_3b_4a_4)$ pour tangentes dans b_3, a_3, b_4, a_4. L'involution doit être dépourvue de point double et donc de l'espèce $u' - u \equiv \gamma$. En exprimant les conditions de la caractéristique on ne trouve rien d'autre que par $a_1 + u_1 + u_2 \equiv 0$ et $a + b_2 + b_3 + b_4 + u'_1 + u'_2 \equiv 0$, qui donnent $2\gamma + a + b_2 - a_1 + b_3 + b_4 \equiv 0$. Comme les droites aa_1, aa_2 contiennent des paires de l'involution, on a $b_2 - a_1 \equiv \frac{C}{2}$ ou $\frac{C}{2}\gamma$. Donc $a + b_3 + b_4 \equiv \frac{C}{2}$, étant $2\gamma \equiv 0$. De même $a + a_3 + a_4 \equiv \frac{C}{2}$. Voilà une condition pour les points fondamentaux. On choisit donc a arbitrairement et une certaine involution $\frac{C}{2}$, puis on tire les deux droites par a, qui contiennent une couple et choisit arbitrairement sur elles les points $a_1 a_2$ (dans C_3), puis on tire les quatre tangentes de a et prend deux points de contact équidistantes avec $a_1 a_2$ *) pour $a_3 a_4$ et on aura puis $b_3 b_4$.

Les C_3, qui sont tangentes à aa_1, aa_2 dans $a_1 a_2$ forment *nécessairement* un faisceau et les deux courbes anallagmatiques ne pourront être que C_h, tandis que l'indice du faisceau est 2. Ces deux C_h coupent en deux couples $i_1 i_2, j_1 j_2$, alignés avec un certain point s et il n'y a nulle autre couple dans $u' - u \equiv \gamma$, qui forme avec la caractéristique la base d'un faisceau. Ces 4 points se déterminent comme il suit: La somme de la caractéristique se trouve égale à $\Sigma \equiv -2a + \frac{C}{2}$, où $a_1 + a_2 + a \equiv \frac{C}{2}$ et pour $i_1 i_2, j_1 j_2$ existe $u' - u \equiv \gamma$, $u' + u \equiv 2a - \frac{C}{2}$, donc $2u' \equiv \gamma - \frac{C}{2} + 2a$. Or $a + \gamma - \frac{C}{2}$ est le point équidistant de a avec a_1 et a_2, donc:

On tire du point contangentiel avec a et dans la distance $a_1 a_2$ de celui-ci les quatre tangentes. Les points de contact se sépareront en les deux couples $i_1 i_2, j_1 j_2$.

Ces deux couples déterminent nouvellement deux faisceaux, dont l'indice est 2, puisque leurs courbes coupent la seconde C_h relativement dans le point d'intersection de celle-ci avec $a_1 a_2$.

Paramètres sur C_h. $a \equiv \gamma(i - 1)$, $a_1 \equiv \frac{\gamma}{1+i} \times \frac{k_1 - k_2}{2}$, $a_2 \equiv \frac{\gamma}{1-i}$, et par $a_1 + u_1 + u_2 \equiv 0$ et $a + u'_1 + u'_2 + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$ on calcule $b_3 + b_4 \equiv -(2+i)\gamma + \frac{k_1 - k_2}{2}$, $a_3 + a_4 \equiv (2i+1)\gamma + \frac{k_1 - k_2}{2}$. On peut choisir a, γ et a_3 à l'arbitraire et en détermine b_3, b_4, a_4 univoquement, a_1, a_2 de deux manières.

4. (ab), (a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4), (a_4b_3). L'homographie a en a, a_1 en a_2 en a_1, a_3 en a_4 en a_3 demande, que a soit aligné avec deux points simples, et que donc la transformation est impossible. Les paramètres pour $u' + iu \equiv \gamma$ donnent $a(1+i) + 2\gamma = 0$, $2(a_1 - a_2) \equiv k_1 - k_2$, $2(a_3 - a_4) \equiv k_1 - k_2$, $a_1 \equiv -\gamma i + \mu \frac{k_1 - k_2}{2}$, $a_2 \equiv -\gamma i + (\mu - 1) \frac{k_1 - k_2}{2}$, $a \equiv -\frac{k_1 - k_2}{2}$, $a \equiv d$, a est le point double, ce qui conduit en effet à un paradoxe.

5. (ab), (a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1). L'homographie adjointe P a l'indice 4 et a est

*) Je dis, que deux paires de points sur C_3 sont équidistants, lorsque existe une correspondance $u' - u \equiv \gamma$, qui contienne ces deux paires.

un des points doubles δ_1, δ_2 non alignés avec deux a_i. Les droites par a sont en homographie à l'indice 4, c'est la même, qui apparaît dans P. Soit $\delta_3 = (a_1 a_3, a_2 a_4)$. L'homographie sur $a\delta_1$ est la même que dans P, et l'homographie sur $\delta_1 \delta_2$ est une involution qui a les deux points doubles dans $a_1 a_3$ et $a_2 a_4$ et contient la couple $\delta_1 \delta_2$. La conique fondamentale A passe par δ_1, δ_2 et touche dans a la droite $a\delta_3$. Le faisceau de coniques par $a_1 a_2 a_3 a_4$ est anallagmatique, $a_1 a_3 + a_2 a_4$ et A sont les coniques invariables, les autres sont permutées à l'indice 2. Une C^3_3 anallagmatique ne peut pas exister, le rebroussement devant être aligné avec deux potnts a_i. Outre les cubiques décomposées existent des C_h. Dans une pareille courbe on aura par les paramètres $a(i+1) + 2\gamma \equiv 0$, 1), $a + ia_i - a_{i-1} + \Sigma a_i + 2\gamma \equiv 0$ 2), $-(a + a_{i-1}) + ia_i \equiv \gamma$ 3), $2a + 3\gamma + \Sigma a_i \equiv 0$ 4) et des 3) $a_i + a_{i-2} \equiv (1-i)\gamma$. Donc $a_1 a_3$ et $a_2 a_4$ se coupent dans C_h, C_h passe en δ_3.

Des 4 et 5 on tire $\Sigma a_i \equiv 2(1-i)\gamma$ 6) et $3\gamma \equiv 0$ donc le point δ_3 est d'inflexion dans C_h et en même temps le centre de convergence.

La courbe touche $a\delta_3$ en a, et coupe $\delta_1 \delta_2$ dans une couple involutive $i_1 i_2$. Comme par $a_1 a_2 a_3 a_4 a \delta_3 i_1 i_2$ passe la courbe décomposée $a_1 a_3 + a_2 a_4 + i_1 i_2$, il s'ensuit que $i_1 i_2$ détermine un faisceau de cubiques. C_h coupe les droites $a_i a_{i-1}$ en 4 points τ_i et il s'ensuit que $\tau_i \tau_{i+2}$ et $\tau_{i+1} \tau_{i+3}$ sont alignés avec δ_3. Donc: Les droites $a_i a_{i+1}$ sont transformées de manière, que la droite, qui joint un point à son deuxième transformé passe par δ_3.

Toutes les C_h *anallagmatiques par cette* Q^3 *forment un faisceau et touchent en* δ_3 *la droite* $\delta_3 \delta_i$ (*si* $\delta_{i+1} = (ab)$) *comme tangente d'inflexion* *) *et en a la droite* $a\delta_3$.

Le même faisceau est anallagmatique par l'homographie adjointe P_4, mais reçoit par celle-ci l'indice 2.

La transformation est équivalente à Q^2: (cc'), b' en a, a' en b et aussi à b en a, $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_1)$.

6. (ab), $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$. Indice 6. L'homographie adjointe a le triple $a_2 a_3 a_4$ et les deux points doubles a, a_1. Le 3ièms point double de l'homographie, d_1 est aussi double pour Q^3. La conique fondamentale A passe par $a_2 a_3 a_4$ et est tangente à ad_1 dans a. Les coniques par $a_1 a_2 a_3 a_4$ forment un faisceau anallagmatique où A et la conique passant par d_1 sont invariables. Le lieu des triples périodiques est une cubique, qui est tangente à $a(a_2 a_3 a_4 a_1)$ dans a_2, a_3, a_4, a_1, et passe par a. Les coniques sont transformées à l'indice 3, donc l'indice sur ad_1 est 3 et le lieu des triples doit passer par d_1 et toucher ad_1 dans a. La correspondance est $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ et la courbe touche $d_1 a_1$ dans d_1. Chaque triple détermine un faisceau, dont la seconde courbe anallagmatique est tangente dans d_1, a, a_1 à ad_1, $a_1 a, d_1 a_1$. Donc:

Il y a un faisceau de cubiques C_e *anallagmatiques avec* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ *qui ont un triple tangentiel* $a a_1 d_1$ *(dans cet ordre) commun et passent par* $a_2 a_3 a_4$.

7. (ab_1), (ba_2), $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_3)$, $(a_1 b_4)$. Indice 5. Pour déterminer les faisceaux anallagmatiques, on se servira de la transposition $(a a_2 a_4)^2$ et de I. p. § 4. *e)*.

8. (ab_1), $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b)$, $(a_4 b_4)$. Indice 8 est traduite par $(a a_2 a_3)^2$ en AB, $A_4 B_1$, $b_2 B_4$, B en B_2 en A_2, c'est II. § 25. n. 4 et la configuration des cubiques anallagmatiques est la même que pour celle-là.

9. (ab_1), $(a_1 b_2)$, $(a_2 b)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_3)$ ne peut pas exister, puisque l'homographie adjointe demanderait, que $a a_1 a_2$ soient alignés.

*) On a ainsi un nouveau faisceau panharmonique.

10. (ab_1), (a_1b_2), (a_2b), (a_3b_4), (a_4b_3) ne peut pas exister, puisque l'homographie adjointe demanderait, que $a_2a_3a_4$ soient alignés.

11. (ab_1), (a_1b_2), (a_2b), (a_3b_3), (a_4b_4). Indice 6 est traduite par $(aa_2a_3)^2$ en B_1B, BB_4, B_4B_1, B_3 en B_2 en B_3, savoir II. p. § 31, III. Les C_3 anallagmatiques de celle-ci, qui passent par la couple involutive sont traduites en les C_3 anallagmatiques de la caractéristique présente. Il y a un faisceau de cubiques anallagmatiques par d^2 et la caractéristique. Deux autres sont C_e et passent par le triple périodique, une courbe décomposée est $a_3a_4+b_1b_2+bb_3$.

12. (ab_1), (ba_1), (a_2b_3), (a_3b_2), (a_4b_4) Indice 4 est traduite par $(aba_2)^2$ en B_1B, B_4B_3, B_3B_4, B en B_2 en B_1 savoir (ab'), (ba'), c' en c'_1 en c. L'homographie adjointe est involutive avec a en b en a, a_2 en a_3 en a_2, a_4 en a_4. Le faisceau de coniques par aba_2a_3 est transformé involutivement en le faisceau de droites par a_4. Les deux droites par a_4, qui ont une seule conique correspondante séparent harmoniquement les couples $a_4(a_1b_1)$, $a_4(a_2, a_3)$, l'une contient les deux points doubles, l'autre la couple involutive i_1i_2. Le faisceau de droites par a_3 est transformé involutivement en le faisceau de coniques par abb_3b_4 et le faisceau de droites par a_2 en les coniques par abb_3b_4. Il y a donc 6 cubiques anallagmatiques décomposées et par conséquent un faisceau de C_3 anallagmatiques. Les points $d_1d_2i_1i_2$ fournissent par (d_1d_2, i_1i_2), (d_1i_2, d_2i_1), (d_1i_1, d_2i_2) les points a_4, a_2, a_3.

V. 1. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) ne peut pas exister. L'homographie adjointe demanderait, que a, b et un a_i soient alignés, ce qui est contradiction à la caractéristique. Quand on veut supposer, que les points a_2a_3 soient infiniment voisins on devrait encore admettre une alinéation aba_i. Et si $(a_2a_3a_4)$ avait lieu, on traduira par (aba_i) en une Q^2: (ab'), (ba'), c' en c'_1 en c, où $ac'c$ sont alignés. Enfin les points $a_2a_3a_4$ ne peuvent être en droite parceque aa_1 et donc ab seraient coincidents.

2. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en a_4. L'homographie adjointe est une homologie involutive et soit π le centre, $b_4a_4\pi$ sont alignés. La conique directive de a, b se partage en ab et en la droite par a_2a_3. La cubique directive de a_1 aura un point double dans a_1 et passera par a, mais comme les droites a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 correspondent aux coniques $a_1a_2+b_3b_4$, $a_1a_3+b_2b_4$, $a_1b_4+b_2b_3$ il s'ensuit, que la cubique se compose de deux droites a_1a_2, a_1a_3 et d'une droite passant par a et le point d'intersection a_1a_4, a_2a_3 mais en vertu de l'homographie elle est la droite ab_4.

Or prenons arbitrairement dans l'affinité la couple a_4b_4. Pour trouver le point, qui correspond à b_4, celui-ci pris comme point ordinaire, il faut prendre le point d'intersection de ab_4 et a_1b_4, c'est b_4 et construire la conique, qui passe par $a_1a_2a_3b_4$ et est tangente en b_4 à la droite ab_4. Soit σ le point d'intersection de ab_4 avec a_2a_3, σ' le point harmoniquement conjugué à σ par rapport à a_2a_3, soit τ le point d'intersection de $a_1a_4\sigma$ avec $b_4\sigma'$ et enfin τ' le point harmoniquement conjugué à a_1 par rapport à $\tau\sigma$, alors sera τ' le point d'intersection cherché, c'est-à-dire b'_4.

Afin que τ' coincide avec a_4, il faut prendre convenablement les points a_2a_3, tandisque aba_4b_4 et la droite par a_2a_3 soient donnés. On construit le point τ' de la sorte que $(a_1a_4\sigma\tau')=-1$, p. e. *en menant* aa_4, *joignant le point* $(aa_4, a_2a_3)=s$ *avec π et construisant le point* $(s\pi, ba_4)$. *On tire alors* $b_4\tau'\sigma'$ *et aura pour* a_2a_3 *encore toutes les couples d'une involution auxx points doubles $\sigma\sigma'$.*

3. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 en b'_4 en a_4. Le point b'_4 était construit générale-

ment dans ce qui précède. Menant $b'_4 a$ jusqu'au point d'intersection υ avec $a_2 a_3$, la droite $b\upsilon$ contiendra b'_4, et afin que b'_4 coincide avec a_4, il faut que b'_4 ou τ' coincide avec σ et il faudrait encore, que τ coincide avec σ. C'est-à-dire, que $\sigma\sigma'$ et σa_3 ou σa_2 coincident. Cela amenerait une alinéation $b b_4 b_3$ ou $b b_4 b_2$, laquelle est impossible. Donc pourvu que ni a_4 ni b_4 coincident avec un des deux points a, b, la caractéristique en question ne peut pas exister. Mais une telle coincidence changerait la caractéristique en une autre.

4. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4. Comme b'_4 est situé dans $a_1\sigma$, la conique $(a_1 a_2 a_3 b_4)^2$ correspondante passe en σ et est donc $a_2 a_3 + b_4 a_4$, soit υ le point $(b_4 a, a_2 a_3)$, le point υ sera b''_4. Le point b'''_4 sera donc contenu dans $b''_4 a_1$ et afin que cette droite coincide avec $b a_4$, il faut que b'''_4 coincide avec σ et avec b'_4 ce qui entraîne coincidence de σa_4 et alinéation de $a_2 a_3 a_4$ et coincidence de $b b_4$ ce qui changerait la caractéristique.

5. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 en a_3, b_4 en a_4. L'homographie adjointe conduit a en b en a, a_2 en a_2, a_3 en b_3, a_4 en b_4 et possède une droite double δ passant par a_2. La droite directive dans Q^3 pour a, b soit δ'. Elle passe également par a_2 et en outre par $(a a_3, b b_3)$, $(a a_4, b b_4)$, $(a b_4, b a_4)$, $(a b_3, b a_3)$. Les droites $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ passent donc par un point π' sur ab. Or les points qui avec leurs correspondants par l'homographie et avec π' sont alignés remplissent une droite par a_2, et il faudrait que $a_2 a_3 a_4$ soient alignés, quand π' ne serait pas double sur ab. Donc π' coincide avec le 2^d point double π de l'homographie sur ab et $a_3 b_3$, $a_4 b_4$ passant par π, l'homographie est une homologie involutive. En faisant usage de la conique directrice pour a_1 on vérifie l'impossibilité des deux enchaînements.

VI. 1. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4. Indice 6. La cubique $a_2 a_3 + a b_4 + b a_4$ est anallagmatique, puisqu'on a $a_2 a_3$ en $a b_4$ en $b a_4$. Il existe ∞^3 cubiques, transformées entre elles, une courbe anallagmatique est la dite cubique décomposée, dont les trois droites passent par le point double d_1 de Q^3 (Voir V. 2). Les directions dans d_1 se permutent à l'indice 3 et soient δ_{12}, δ_{13} les deux directions fixes. On a alors deux faisceaux de cubiques, qui s'osculent ou suivant δ_{12} ou δ_{13} et les secondes C_3 anallagmatiques sont forcément C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Chacune contient une couple involutive et il faut que ces deux couples soient identiques. Chaque triple périodique forme avec la caractéristique la base d'un faisceau et la correspondance dans la seconde ne peut pas être que $u' - u \equiv \gamma$, et par conséquent $\gamma \equiv \frac{C}{3}$.

C'est le premier type isolé, jouissant d'une correspondance $u' - u \equiv \gamma$, que nous rencontrons dans cette recherche. La ligne C_k des triples passe par $s = (a a_4, b b_4)$. a, b faisant parties d'un triple droit sont points d'inflexion de C_k. a_4, b_4, $(a a_4, b b_4)$ formant un triple, les droites $a_4 b_4$, ab se coupent sur C_k dans le point π. Cette courbe touche $a b_4$, $b a_4$, πs en b_4, a_4, s, suivant les propriétés connues des points d'inflexion de C_k. En s'appuyant sur le résultat obtenu dans V. 3., il est donc facile de déterminer une pareille caractéristique: *On construit les points conjugués* b_4, a_4 *à deux points d'inflexion* a, b *d'une* C_k *dans le même système et tire la droite* $(a b_4, b a_4)$ $(a a_4, b b_4)$ *qui coupe* C_k *dans les deux points* a_2, a_3.

Le point $\sigma = (a b_4, b a_4)$ étrange à C_k et son voisin déterminent alors un faisceau, dont la seconde C_3 anallagmatique est équianharmonique.

$u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $-\varepsilon^2 a_1 + a_2 + a_3 + b_4 + 2\gamma \equiv 0$, $\varepsilon a_2 + a_1 + a_3 + b_4 + a + 2\gamma \equiv 0$, $\varepsilon a_3 + a_1 + a_2 + b_4 + a + 2\gamma \equiv 0$, $\varepsilon a + a_1 + 2\gamma \equiv 0$, $a_2(\varepsilon - 1) \equiv b + \gamma$, $a_3(\varepsilon - 1) \equiv b + \gamma$, $a_4 + \varepsilon b_4 \equiv \gamma$, $\varepsilon a_4 - b_4 \equiv b + \gamma$.

Les deux dernières congruences donnent $b + a_4 - \gamma\varepsilon \equiv 0$, c'est-à-dire l'alinéation de b, a_4 et s, d'où ensuite $a + b_4 + s \equiv 0$ et $a_2 + a_3 + s \equiv 0$. Il s'ensuit $(2\varepsilon^2 - 1)\gamma \equiv 0$ et on exprime a, b par γ; b_4, a_4, a_2, a_3 par b et γ.

$u' - u \equiv \gamma$ donne $b - a \equiv -2\gamma$, $b + 2a_4 \equiv 0$, $a + 2b_4 \equiv 0$, $-a_2 + b + b_1 + b_3 + b_4 + 2\gamma \equiv 0$, $-a_3 + b + b_1 + b_2 + b_4 + 2\gamma \equiv 0$, d'où $b_1 + 2b_4 \equiv 0$, $4b_1 \equiv a$, $3a \equiv 0$, $3b \equiv 0$. Ensuite

$$a + (a + a_1) \equiv \gamma, \text{ ou } 2a + b \equiv \gamma,\ b - a \equiv \gamma,\ 3\gamma \equiv 0,\ 2b_2 \equiv 2b_3 \equiv -b - \gamma \equiv (a + b).$$

$$a \equiv \frac{mk_1 + nk_2}{3},\ b \equiv \frac{m'k_1 + n'k_2}{3},\ b_4 \equiv -\frac{mk_1 + nk_2}{6} + \frac{k}{2},\ a_4 \equiv -\frac{m'k_1 + n'k_2}{6} + \frac{k}{2},$$

$$b_2 \equiv -\frac{(m' - m)k_1 + (n' - n)k_2}{6} + \frac{k'}{2},\ b_3 \equiv -\frac{(m' + m)k_1 + (n' - n)k_2}{6} + \frac{k' - k}{2} - \frac{mk_1 + nk_2}{2}.$$

On a donc la suivante construction de la caractéristique : *On prend un quadrilatère et nomme* a b, $a_4 b_4$, sσ *les trois couples de sommets opposés, ainsi que* a s a_4, a b_4 σ *sont alignés, soit* π *le point* (a b, $a_4 b_4$) *et qu'on construit dans le faisceau de cubiques qui est constitué par* a s a_4 + b_4 s b + $a_4 b_4 \pi$ *et* a b π *ensemble à la conique tangente dans* s, b, a_4 *à* π s, a b_4, b a_4 *celle cubique, qui a des points d'inflexion propres dans* a, b, π. *Cette cubique coupera* sσ *dans les deux points* a_2, a_3.

2. $(a b_1)$ $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en a_4. Le tableau fait évident, qu'aucune alinéation ne peut exister et il existe une cubique anallagmatique non décomposée. Or les correspondances $u' + iu \equiv \gamma$, $u' \pm \varepsilon u \equiv \gamma$ sont impossibles à cause de l'indice.

Pour C_3^4, C_3^3 obtient-on chaque fois, que a_2, a_3 devraient coincider. Pour $u' - u \equiv \gamma$ on aurait $b - a \equiv -2\gamma$, $a_4 - b_4 \equiv 2\gamma$, $a_4 + a + b_4 \equiv \gamma$, d'où $2a_4 + a \equiv 3\gamma$, $2b_4 + a \equiv -\gamma$, ensuite $2a + b \equiv \gamma$, $2b + a \equiv -\gamma$, mais

$$\left.\begin{aligned} -a_2 + b + b_1 + b_3 + b_4 + 2\gamma &\equiv 0 \\ -a_3 + b + b_1 + b_2 + b_4 + 2\gamma &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \Delta)$$

donnent par addition $2\gamma \equiv 0$, et partant $b \equiv a$, contradiction à la caractéristique.

3. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4. Chaque alinéation est inadmissible. Il existe donc une cubique anallagmatique propre. C_3^4 et C_3^3 demanderaient la coincidence de a_2, a_3, qui ensuite se traduirait en une caractéristique du 17ième degré avec une alinéation. C_k avec $u' - iu \equiv \gamma$ est interdite par l'indice, $u' - u \equiv \gamma$ donne $b - a \equiv -2\gamma$, $a_4 - b_4 \equiv 3\gamma$, $a + a_4 + b_4 \equiv \gamma$, $2a_4 + a \equiv 4\gamma$, $2b_4 + a \equiv -2\gamma$, $2a + b \equiv \gamma$, $2b + a \equiv -\gamma$ et en sommant les deux congruences Δ) on obtient $3\gamma \equiv 0$, d'où $a_4 \equiv b_4$, contradictoire à la caractéristique. C_e avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ est interdite par la chaîne b_4 en b'_4 en b''_4 en a_4. C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $b \equiv \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2}\gamma + \frac{C}{2}$, $a \equiv \frac{2 - \varepsilon^2}{2}\gamma - \varepsilon^2 \frac{C}{2}$, $a_4 \equiv \frac{5\varepsilon^2 - 1}{2}\gamma - \varepsilon\frac{C}{2}$, $b_4 \equiv \frac{5 - \varepsilon^2}{2}\gamma + \varepsilon\frac{C}{2}$, $a_2 \equiv \frac{\varepsilon}{2}\gamma + \frac{C}{2(\varepsilon - 1)}$, $a_3 \equiv \frac{\varepsilon}{2}\gamma + \frac{C'}{2(\varepsilon - 1)}$, $b'_4 \equiv \frac{3 - 5\varepsilon}{2}\gamma - \varepsilon^2\frac{C}{2}$, $b''_4 \equiv \frac{\varepsilon(3\varepsilon - 5)}{2}\gamma + \frac{C}{2}$, ensuite par une propriété géométrique $a_2 + a_3 \equiv \varepsilon\gamma$

$$\varepsilon a_4 + b + a + b_2 + b_3 + 2\gamma \equiv 0$$

ou

$$\frac{9}{2}\gamma + \frac{C}{2} \equiv 0. \qquad 2)$$

On calcule $b'_4+b_4\equiv-2\varepsilon\gamma$, $b''_4+a_4\equiv-2\varepsilon\gamma$, $a_4+b_4\equiv-2\varepsilon\gamma$.

Du reste on pourrait aussi conclure de $\varepsilon a_4+b+a+b_2+b_3+2\gamma\equiv0$ et $-\varepsilon^2 a_1+b_2+b_3+b_4+2\gamma\equiv0$, sans faire usage de 1), que $\frac{C}{2}(\varepsilon-1)\equiv0$, ce qui demande $\frac{C}{2}\equiv0$ et de là directement $b'_4-a_4\equiv0$, $b''_4-b_4\equiv0$ et ensuite $a_2+a_3\equiv\varepsilon\gamma$.

La caractéristique est impossible.

4. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en a_4. On a trois points doubles impropres et par conséquent deux propres. Le tableau empêchant des alinéations démontre, qu'au moins une cubique propre anallagmatique doit exister, $u'+iu\equiv\gamma$ donne $a_3+ib_3\equiv\gamma$, $b_3-i(a+a_3)\equiv0$, donc $a\equiv0$, de la même manière $b\equiv0$, $Au'+Bu+C=0$ dans C^3_3 demande $Aa_3+Bb_3+C=0$, $Ab_3-B(a+a_3)-C=0$, et ensuite $b_3(A-B)-a_3(A+B)-Ba=0$ et de même $b_4(A-B)-a_4(A+B)-Ba=0$, d'où $b_3=b_4$, $a_3=a_4$. Mais une telle caractéristique pourrait être traduite en une autre avec alinéation, qui aurait de même une involution interne J_{17}. C_3^4 anallagmatique conduirait au même résultat.

5. (ab_1), (ba_1), b_3 en a_2, b_2 en a_3, b_4 en a_4, s'écarte par les mêmes raisonnements et à plus forte raison. Car $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ donne également $a_2+\varepsilon b_2\equiv\gamma$, $b_2-\varepsilon a_2-\varepsilon a\equiv0$ et par là $b_2+a\equiv-\varepsilon\gamma$, alinéation de a, b_2 et du point double de la correspondance, et de même pour b_3, b_4, ce qui fournit un paradoxe. $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$ donne $a_2-\varepsilon b_2\equiv\gamma$, $b_2+\varepsilon a_2+a\equiv\gamma$ et $b_2-a\equiv0$, par conséquent $b_2\equiv b_3\equiv b_4$. C_k avec $u'+iu\equiv\gamma$ demanderait $a_2+ib_2\equiv\gamma$, $b_2+i(a+a_2)\equiv\gamma$, $a\equiv\gamma'(1+i)$, et au moyen de $b-ia+2\gamma\equiv0$ s'ensuit $b\equiv-\gamma(i+1)\equiv a$, contradictoire à la caractéristique.

6. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 en a_3, b_4 en b'_4 en a_4 possède évidemment (ayant égard à la transformation interne involutive) une C_3 propre anallagmatique, qui à raison de l'indice et puisque une infinité de couples involutives est interdite par la caractéristique, ne pourra être que C_3^3 ou C_3^4 ou une C_k avec $u'-u=\gamma$. Mais alors la distribution des deux points doubles propres tombe en défaut.

7. (ab_1), (ba_1), b_2 en a_3, b_3 en a_4, b_4 en a_2. Indice 12. La transformation a trois points doubles propres. Par les 8 points passe un faisceau, dont le 9ième pivot soit d_1.

Excluons d'abord $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. Cela donne $\varepsilon a_3-b_3\equiv\varepsilon a_4-b_4\equiv\varepsilon a_2-b_2$ et $a_3+\varepsilon b_2\equiv\gamma$, $a_4+\varepsilon b_3\equiv\gamma$, $a_2+\varepsilon b_4\equiv\gamma$ et de là $b_2\equiv b_3\equiv b_4$, ce qui est incompatible avec la caractéristique. $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$ donne le même résultat.

$u'+iu\equiv\gamma$. Cela donne $ia_3-b_3\equiv ia_4-b_4\equiv ia_2-b_2$; $a_3+ib_2\equiv\gamma$, $a_4+ib_3\equiv\gamma$, $a_2+ib_4\equiv\gamma$, d'où $b_3-b_4\equiv b_4-b_2\equiv b_2-b_3\equiv-3i\gamma$, $a_2-a_3\equiv a_3-a_4\equiv a_4-a_2\equiv-3\gamma$. Partant $b_2-b_3\equiv-3i\gamma$, $b_3-b_2\equiv-6i\gamma$, d'où $9i\gamma\equiv0$. Mais $b_2+b_3+b_4\equiv3(i-1)\gamma$, et $3b_4\equiv3(i-1)\gamma$, $b_4\equiv(i-1)\gamma+\frac{C}{3}$, $b_3\equiv-(1+2i)\gamma+\frac{C}{3}$. On obtient tout de la même manière $a_2+a_3+a_4\equiv3(i-1)\gamma$, donc $a_2\,a_3\,a_4$ et $b_2\,b_3\,b_4$ devraient nécessairement former deux triples de la même série, il faudrait donc $3(i-1)\gamma\equiv0$ et ensuite $3(1+2i)\gamma\equiv0$, où a et b sont deux points d'inflexion. D'autre part on conclut, que le point $-(a+b)$ et les 6 points $a_i\,b_i$ appartiennent au même groupe neutral, ce qui demanderait que b_i et a_i soient tous des points d'inflexion et forment partant une configuration incompatible avec la caractéristique.

Ainsi il s'ensuit que la seule supposition admissible est celle, que les deux C_3 anallagmatiques sont C_3^3 et que toutes les cubiques sont équianharmoniques, l'indice du faisceau étant égal à 2. Une particularisation de cette caractéristique est la répétition de B_{24}.

8. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en a_4. Indice 10. Les nombres du tableau font toute alinéation impossible. Or suivant K. 1. la Q_3 ne possède que 3 couples involutives. Ici on en a 5 impropres b_1 en a en $(b b_1 \ldots)^2$, b en a_2 en bb_2, b_4 en a_4 en bb_4, a_1 en bb_1 en $(b^2 b_3 \ldots)^3$, a_3 en bb_3 en $(bb_2 \ldots)^2$. On aura parsuite une infinité de couples, qui remplissent une courbe anallagmatique, passant simplement par la caractéristique, savoir une cubique C_k avec $u' + u \equiv \gamma$. Un des 4 points doubles est le 9ième pivot, le 5ième point double de Q^3 est le rebroussement d'une C_3^3 anallagmatique. L'indice du faisceau est 5 et on a cette remarquable circonstance, que la courbe C_h à invariant absolu arbitraire doit absorber au moins 5 des courbes du faisceau, qui possèdent cet invariant absolu.

9. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$. Indice 6. L'homographie adjointe a le triple cyclique $a_2 a_3 a_4$ et conduit a en b, a_1 en b_1. La droite $a_1 b_1$ et la conique $a\ b\ a_2\ a_3\ a_4$ sont transformées involutivement entre elles. La transformation n'ayant pas de point double impropre, il est évident que chaque point d'intersection de droite et conique est double pour C_3.

C_e avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $b - \varepsilon a \equiv -2\gamma$, $a_1 - \varepsilon b \equiv \gamma$, $a - \varepsilon b_1 \equiv \gamma$, $-(b + b_1) + \varepsilon a_1 \equiv \gamma$, d'où $a \equiv \varepsilon a_1 + (2\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma$, $a \equiv \varepsilon b_1 + \gamma$, $a \equiv a_1 - \varepsilon^2 b_1 + \varepsilon^2 \gamma$, et $a_1 + b_1 \equiv (1 - \varepsilon^2)\gamma$, $(\varepsilon - \varepsilon^2) a_1 - b_1 \equiv (1 - \varepsilon^2)\gamma$, $2a_1 \equiv 2(1 - \varepsilon)\gamma$, $2b_1 \equiv 2(\varepsilon - \varepsilon^2)\gamma$, $2a \equiv 2\varepsilon^2 \gamma$, $2b \equiv -2\gamma$. Ensuite $-\varepsilon a_2 - a_4 \equiv -\varepsilon a_3 - a_2 \equiv -\varepsilon a_4 - a_3 \equiv b + \gamma$ donnent $2a_4 \equiv 2a_3 \equiv 2a_2 \equiv 2\varepsilon(b + \gamma) \equiv 0$. Mais la courbe devra évidemment couper $a_4\ b_1$ en un point double, donc $b_1 + a_2 \equiv (1 - \varepsilon^2)\gamma \equiv \frac{\gamma}{1 - \varepsilon}$ ou $2\gamma \equiv \mu \frac{k_1 - k_2}{3}$, $2a_1 \equiv 2b_1 \equiv 0$, ce qui demande la coincidence de deux points de la caractéristique.

C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $b + \varepsilon a \equiv -2\gamma$, $a_1 + \varepsilon b \equiv \gamma$, $a + \varepsilon b_1 \equiv \gamma$, d'où $a_1 + b_1 + d_1 \equiv 0$. Les congruences $\varepsilon a_2 - a_4 = \varepsilon a_3 - a_2 \equiv \varepsilon a_4 - a_3 \equiv b + \gamma$ ne sont pas indépendantes et fournissent les seules déterminations: $a_4 \equiv \varepsilon a_2 - b - \gamma$, $a_3 \equiv \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^2 b + \varepsilon^2 \gamma$, $a_1 \equiv -\varepsilon b + \gamma$, $a \equiv -\varepsilon^2 b - 2\varepsilon^2 \gamma$, $b_1 \equiv (\varepsilon - 1)\gamma + \varepsilon b$, donc une double infinité de caractéristiques pour la même correspondance.

C_3 avec $u' - u \equiv \gamma$ demande $b - a + 2\gamma \equiv 0$, $a_1 - b \equiv \gamma$, $a - b_1 \equiv \gamma$, $a_1 + (b + b_1) \equiv -\gamma$ et de là $a + a_1 + b \equiv 0$.

C_3^3 avec $u' + xuy + = 0$ donne $b + xa - 2y = 0 \ldots 1)$, $a_1 + xb + y = 0 \ldots 2)$, $a + xb_1 + y = 0 \ldots 3)$, $xa_1 - b_1 - b + y = 0 \ldots 4)$, d'où par combinaison de 2), 3), 4), $(x^2 + x)b - a + (x^2 - x - 1)y \equiv 0 \ldots 5)$ et par 5) et 1) $(x^4 + x^2 + 1)b + (x^3 - x^2 - x - 2)y = 0 \ldots 6)$. Mais $xa_2 - a_4 \equiv xa_3 - a_2 \equiv xa_4 - a_3 \equiv b - y$ demandent $x^3 = 1$, par quoi 6) est satisfaite identiquement. Donc ainsi les équations pour a, b, a_1, b_1 que celles pour a_2, a_3, a_4 ne fournissent pas une détermination parfaite et dans C_3^3 existe une double infinité de caractéristiques pour la même homographie donnée.

C_3 avec $u' + u \equiv \gamma$ demande $a_2 - a_4 \equiv a_3 - a_2 \equiv a_4 - a_3 \equiv b + \gamma$, $a + b + 2\gamma \equiv 0$, $b_1 + a \equiv \gamma$, $b + a_1 \equiv \gamma$, d'où $a_2 + a_3 + a_4 \equiv -3\gamma$, $3b \equiv -3\gamma$, $b - b_1 \equiv -3\gamma$. L'existence d'une infinité de couples involutives est à conclure aussi des couples impropres $b_1\ a$, $b\ a_1$, a_i en bb_i en $b a_1\ b_1 a_i b_{i+1}$. Les points correspondant à $(a_2 b_3)$ selon cette correspondance involutive sont les points d'intersection de C_k avec $aa_3\ bb_2$, donc: C_k contient les points (aa_3, bb_2), (aa_4, bb_3), (aa_2, bb_3) soit α_2, α_3, α_4 et les deux triangles $a_2\ a_3\ a_4$ et $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ ont triple homologie avec a, b, $-\gamma$ comme centres. Donc b_1, a_1 sont les points tangentiels de a, b.

Voici la configuration, quant aux courbes C_3 anallagmatiques. On a une cubique équianharmonique, une cubique C_k avec $u' + u \equiv \gamma$ et à invariant absolu arbitraire, et une cubique $C_1 + C_2$, dont les parties se touchent en d_1. Le point d_1 détermine un faisceau de cubiques, dont toutes les courbes sont anallagmatiques et partant équianharmoniques. C_e et C_k se coupent en une couple involutive et déterminent un faisceau, $C_1 + C_2$ et C_k se coupent également en une couple involutive et déterminent un 3ième faisceau. Ces deux derniers ont l'indice 3. Les courbes de F_1, qui passent par les 4 points doubles d_2, d_3, d_4, d_5 sur C_k, sont C_3^3.

10. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, Indice 6. L'homographie adjointe a les points doubles a_2, a_3, a_4 et conduit a en b, a_1 en b_1. Les coniques directives Δ pour Q^3 et pour l'homographie sont identiques, puisque toutes les deux passent par $a\, b\, a_2\, a_3\, a_4$. Les points a_1 et b_1 sont situés respectivement sur les tangentes de Δ dans b et a. D'autre part les points a_1 et b_1 se correspondent aussi suivant l'homographie. Donc: Si l'on cherche la droite, qui dans le second système de l'homographie correspond à la tangente de Δ dans b et qu'on construit le rencontre de cette droite avec la tangente de Δ dans a, on obtiendra le point b_1 et réciproquement le point a_1.

Jusqu'à présent l'homographie était arbitraire et les conditions établies ne suffiront point pour produire effectivement les enchaînements b_1 en a, b en a_1.

Remarquons, que les deux points doubles propres d_1 d_2 de Q_3 sont les intersections de Δ et de la droite $a_1 b_1$, parceque la cubique directive de a_1 passe par ces points et par $b\, b_2\, b_3 b_4\, a$.

Or d_i détermine un F anallagmatique de C_3, qui ont en d_i un contact, l'une C_3 anallagmatique est $a_1 b_1 + \Delta$, l'autre sera une courbe équianharmonique avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$. Les deux courbes C_e^1, C_e^2, qui de là sont à conclure se coupent évidemment en deux points d'une couple involutive et par suite les indices des deux faisceaux nommés sont 3.

Puisque toute cubique du réseau est invariable par la T_8 involutive interne, l'indice du faisceau $C_e^1 + C_e^2$ sera également 3.

$u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $b + \varepsilon a \equiv -2\gamma$, $a + \varepsilon b_1 \equiv \gamma$ et par conséquent $a_1 + b_1 + d_i \equiv 0$, $a + b + b_2 + b_3 + b_4 \equiv \varepsilon\gamma$.

$$\varepsilon a_1 + b + 2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad \varepsilon^2 b_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$
$$b_1 + b + 2\gamma + \varepsilon b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad a_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + \varepsilon^2 b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$
$$b_1 + b + 2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad a_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + b_2 + \varepsilon^2 b_3 + b_4 \equiv 0$$
$$b_1 + b + 2\gamma + b_2 + b_3 + \varepsilon b_4 \equiv 0 \qquad a_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + b_2 + b_3 + \varepsilon^2 b_4 \equiv 0$$

De là $(\varepsilon - 1)\, b_2 \equiv (\varepsilon - 1)\, b_3 \equiv (\varepsilon - 1)\, b_4$. Cela donne les conditions suivantes

$$\varepsilon a_1 + b + 2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad \varepsilon^2 b_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$
$$b_1 + b + 2\gamma + \varepsilon b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad a_1 + a + 2\varepsilon^2\gamma + \varepsilon^2 b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$

et en introduisant a, b au lieu de $b_1 a_1$

$$\varepsilon\gamma - \varepsilon^2 b + b + 2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad \varepsilon\gamma - \varepsilon a + a + 2\varepsilon^2\gamma + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$
$$\varepsilon^2\gamma - \varepsilon^2 a + b + 2\gamma + \varepsilon b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \qquad \gamma - \varepsilon b + a + 2\varepsilon^2\gamma + \varepsilon^2 b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0$$

qui sont équivalentes à

$$a+\varepsilon\gamma-\varepsilon^2 b_2-b_3+b_4\equiv 0$$
$$a+\varepsilon^2\gamma+\varepsilon b_2+b_3+b_4\equiv 0$$
$$a(1-\varepsilon)+\gamma(\varepsilon^2-1)+b_2+b_3+b_4\equiv 0$$

qui au fond sont identiques.

On a la règle suivante pour établir notre caractéristique : *Prenez un point arbitraire* d *sur* C_e *comme double d'une correspondance* $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$, *déterminez deux points* a, b *de manière à projeter homographiquement cette correspondance et puis un triple d'inflexion appartenant au triangle hessien et situé dans une conique avec* abd, *ces trois points seront* $b_2\, b_3\, b_4$.

11. b_1 en a, b en b' en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$. Bien que la transformation interne involutive ne soit pas typique, les 56 alinéations s'écartent au moyen des autres transformations successives et il faut donc qu'une cubique propre existe, qui soit anallagmatique.

$u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ donne les conditions $\varepsilon a+b+2\gamma\equiv 0$, afin que a, b soient accouplés, $a+\varepsilon b_1\equiv\gamma$: afin que b_1 en a, $\varepsilon^2 b-a_1\equiv\gamma(\varepsilon-1)$ afin que b en b' en a_1 et $b_1-\varepsilon a_1-\varepsilon a\equiv\gamma$ afin que l'accouplement de a_1, b_1 ait lieu. De là on tire $b\equiv-\varepsilon\gamma$, c'est-à-dire $b\,a\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ seraient dans une conique et $b\equiv a_1$, contradictoirement à la caractéristique.

$u'+iu\equiv\gamma$ donne les conditions $ia+b+2\gamma\equiv 0$, $a+ib_1\equiv\gamma$, $a_1+b\equiv\gamma(1-i)$, $b_1-i(a+a_1)\equiv\gamma$, qui par la combinaison fournissent $(i-1)\,a_2\equiv(i-1)a_3\equiv(i-1)a_4$, ce qui demande, que deux de ces points coincident.

Or la caractéristique est traduite en la même espèce par $(a\,a_2 a_4)^2$, donc cette caractéristique jouirait d'une alinéation, qui est contradictoire aux enchaînements. Lorsque la transformation existe, elle détermine un faisceau de C_3. Il y a deux points doubles propres. L'un d'eux est le 9ième pivot et si une des deux cubiques invariables était C_e avec $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$, on ne saurait disposer d'une manière satisfaisante de la seconde courbe. De là on peut conclure, que la transformation n'existe pas.

Remarque. Quoique le raisonnement précédent écarte cette caractéristique, elle donne origine à d'autres réflexions. Puisqu'on peut établir des courbes du 5ième ordre du genre 0, qui soient transformées en soi-même, p. e. $a\,b_1\,b^2\,b'^2\,a_1^2\,a_2^2\,a_2^2\,a_3^2\,a_4^2$, il s'ensuit, qu'en faisant usage d'une $(a^6 b_1^5 b^4 b'^4 a_1^4 a_2^3 a_3^5 a_4^5)^{13}$ qui possède la dite quintique comme courbe fondamentale, on traduirait Q^3 en une transformation à 7 points. Il faut donc, qu'une caractéristique inconstructible à l'indice 12 et à 7 points existe.

12. b_1 en a, b en b' en a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$. Indice 12. Les mêmes conclusions démontrent encore, que deux cubiques propres anallagmatiques existent et que $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ n'est pas contenue dans cette Q^3.

La caractéristique n'ayant aucun point double impropre, la transformation en possède cinq propres. Il faudrait donc qu'une C_3 invariable au moins soit C_e avec $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$. La condition pour que $a_i\, b_i$ soient accouplés, sera $b-\varepsilon a_i-b_i+\Sigma b_i+2\gamma\equiv 0$. De là il s'ensuit $\varepsilon a_1+b_1\equiv\varepsilon a_2+b_2\equiv\varepsilon a_3+b_3\equiv\varepsilon a_4+b_4$, et à raison des 3 coincidences $(\varepsilon-1)\,b_3+b_2\equiv 3b_4$ et $(\varepsilon-1)\,b_4+b_3\equiv\varepsilon b_2$ d'où $b_2\equiv b_3$ et ensuite $b_3\equiv b_4$. La caractéristique ne serait plus la même. C_h avec $u'+iu\equiv\gamma$ demanderait $ia_1-b_1\equiv ia_2-b_2\equiv ia_3-b_3\equiv ia_4-b_4$, d'où $b_2\equiv b_3\equiv b_4$. C_3^3 donne le même resultat.

13. b en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4. Indice 30. La transformation devrait posséder trois points doubles propres et n'avoir aucune couple involutive et deux courbes anallagmatiques C_3 propres. Le nombre des courbes rationnelles et l'indice n'admettent que 5 comme indice du faisceau. Toutes les cubiques sont nécessairement équianharmonique et une C_3^3 reste. Celle-ci donne $a_2 = a_3$ et comme la caractéristique par une transposition $(a a_2 a_3)^2$ est traduite en une autre avec J_{17}, on obtiendrait une pareille transformation avec une alinéation, chose impossible.

14. b en a_1, b_1 en a, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, b_2 en a_4. Indice 12.

C_e avec $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ fournit $-(b+b_2)+\varepsilon a_2 \equiv \gamma$, $-(b+b_3)+\varepsilon a_3 \equiv \gamma$, $-(b+b_4)+\varepsilon a_4 \equiv \gamma$, ou $\varepsilon a_2 - b_2 \equiv \gamma + b$, $\varepsilon a_3 - a_2 \equiv \gamma + b$, $\varepsilon a_4 - a_3 \equiv \gamma + b$, et de là il s'ensuit $b_2 \equiv a_4$.

C_e avec $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ fournit $b - \varepsilon a \equiv -2\gamma$, $a_1 - \varepsilon b \equiv \gamma$, $a - \varepsilon b_1 \equiv \gamma$, $-(b+b_1) - \varepsilon a_1 \equiv \gamma$, de là $a_1 - \varepsilon^2 a \equiv (1-2\varepsilon)\gamma$, $\varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^2 a + \varepsilon b_1 \equiv \varepsilon\gamma$, et $b_1 - a_1 \equiv (\varepsilon^2 - 1)\gamma$, d'autre part $a_1 - \varepsilon^2 a \equiv \gamma(1-2\varepsilon)$, $\varepsilon^2 a - b_1 \equiv \varepsilon^2\gamma$ et de là $b_1 - a_1 \equiv 3\varepsilon\gamma$, cela démontre, que $2(\varepsilon^2 - \varepsilon)\gamma = 0$, ou $2\varepsilon\gamma \equiv 2\varepsilon^2\gamma \equiv 2\gamma$. Donc

$$a \equiv \varepsilon^2 b + 2\varepsilon^2\gamma\,,\ a_1 \equiv \varepsilon b + \gamma\,,\ b_1 \equiv \varepsilon^2 a - \varepsilon^2\gamma \equiv \varepsilon b + 2\varepsilon\gamma - \varepsilon^2\gamma\,.$$

$-\varepsilon a_2 - b_2 \equiv b + \gamma$, $-\varepsilon a_3 - a_2 \equiv b + \gamma$, $-\varepsilon a_4 - a_3 \equiv b + \gamma$, d'où $a_4 + b_2 \equiv 2\varepsilon\gamma + 2\varepsilon b$, ce qui avec $a_4 - \varepsilon b_2 \equiv \gamma$ donne $b_2 \equiv -\varepsilon\gamma - 2\varepsilon^2 b$, $a_4 \equiv 3\gamma - 2b$, $a_3 \equiv \varepsilon\gamma + (2\varepsilon - 1 b$, $a_2 \equiv (1+\varepsilon^2)\gamma - (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\, b$. D'autre part

$$\varepsilon a_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b + 2\gamma \equiv 0\,,\ \varepsilon a_2 + b_3 + b_1 + b_1 + b + 2\gamma \equiv 0\,,$$

$$\varepsilon a_3 + b_1 + b_2 + b_4 + b + 2\gamma \equiv 0\,,\ \varepsilon a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b + 2\gamma \equiv 0$$

ce qui donne $2\, b(2\varepsilon - \varepsilon^2) + 4\gamma \equiv 0$, $2b(2\varepsilon - 1) - 4\varepsilon^2\gamma \equiv 0$ et partant $2b \equiv 0$. Avec cette valeur on calcule $a \equiv b_2 \equiv -\varepsilon\gamma$, contradictoirement à la caractéristique.

C_3^3 ou C_k avec $u' + u \equiv \gamma$ prises comme anallagmatiques ne suffisent point à l'indice du faisceau. J'en conclus, que la caractéristique est inconstructible.

La même conclusion est déjà indiquée par cela, que b en a_1, b_1 en a, a_2 en b b_2, a_3 en b_3 représentent 4 couples involutives, et que la caractéristique devrait en posséder une infinité, par conséquent, ce qui ne se comporte pas avec b_2 en a_4.

CONCLUSION

Les caractéristiques suivantes sont les seules irréductibles en degré auxquelles correspondent des transformations existantes dans le plan.

1. (ab_1), (ba_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_4.	Indice 6.	Γ_6^1.
2. (ab_1), (ba_1), b_3 en a_4, b_4 en a_2, b_2 en a_3.	Indice 12.	Γ_{12}.
3. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, b_4 en a_4.	Indice 10.	Γ_{10}.
4. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$.	Indice 6.	Γ_6^2.
5. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_2)$.	Indice 6.	Γ_6^3.

TRANSFORMATIONS PÉRIODIQUES BIQUADRATIQUES

A. Première forme

§ 1.—Généralités.

A. *Exposé du problème.* Les points fondamentaux doubles seront désignés par $d_1 d_2 d_3$, $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ et les simples par $e_1 e_2 e_3$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ dans les deux systèmes, et de la sorte que $d_i \varepsilon_i$, $\delta_i e_i$ soient accouplés. Ayant proposé de rechercher les formes irréductibles je distribuerai les cas à discuter sur les combinaisons suivantes.

1. Tous les points fondamentaux entrent en coincidence.
2. Il y a au moins une coincidence de deux points doubles.
3. Cinq coincidences de point double et de point simple.
4. Quatre de point double et de point simple.
6. Trois de point double et de point simple, une de points simples.
7. Deux de point double et de point simple, deux de points simples.
8. Trois de point double et de point simple.
9. Deux de point double et de point simple, une de points simples.
10. Une de point double et de point simple, deux de points simples.
11. Trois de points simples.
12. Deux de point double et de point simple.
13. Une de point double et de point simple, une de points simples.
14. Deux de points simples.
15. Une de point double et de point simple.
16. Une de points simples.
17. Il n'existe pas de coincidence.

B. *Les systèmes fondamentaux particuliers* (notations comme Tr. cub. § 1).

1. $(d_1 e_1)$.	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$
2. $(d_1 e_1)$, $(d_2 e_2)$	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \varepsilon_3 \varepsilon_1)^1$
3. $(d_1 e_1)$, $(d_2 e_2)$, $(d_3 e_3)$	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)^1$, $(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$
4. $(d_1 e_1)$, $(d_1 e_2 e_3)^1$	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_1 \varepsilon_1)$
5. $(d_1 e_1)$, $(d_2 e_1 e_3)^1$	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_1 \varepsilon_3)$
6. $(d_1 e_1)$, $(d_2 e_1 e_3)^1$, $(d_3 e_2 e_3)^1$	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \varepsilon_3)$, $(\delta_1 \varepsilon_3)$
7. $(d_1 e_1)$, $(d_2 e_2)$, $(d_1 e_1 e_3)^1$, $(d_2 e_2 e_3)^1$. . .	$(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \varepsilon_1)$, $(\delta_1 \varepsilon_2)$
8. $(d_1 e_1)$, $(d_1 e_2)$	$(\delta_1 \varepsilon_1)$, $(\delta_1 \varepsilon_2)$
9. $(d_1 e_1)$, $(d_1 e_2)$, $(d_2 e_3)$	$(\delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)^1$, $(\delta_3 \varepsilon_2)$, $(\delta_3 \varepsilon_3)$
10. $(d_1 d_2)$.	$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$

11. $(d_2\, d_3)\,,\ (d_1\, e_2\, e_3)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \varepsilon_1)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

12. $(d_1\, d_2)\,,\ (d_1\, e_2\, e_3)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)$

13. $(e_2\, e_3)\,,\ (e_2\, e_3\, d_1)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \varepsilon_1)\,,\ (\delta_2\, \delta_3)$

14. $(d_2\, d_3)\,,\ (d_3\, e_1)$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_1\, \delta_1)$

15. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

16. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \delta_1)$

17. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)^1,\ (d_1\, e_1\, e_2)^1$ . . $(\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \delta_1)\,,\ (\varepsilon_1\, \delta_3)$

18. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)^1$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_1\, \varepsilon_2)$

19. $(d_2\, d_3\, e_1)\,,\ (d_1\, e_2)$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \delta_2)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_1\, \delta_1)$

20. $(d_1\, d_2)\,,\ (d_3\, e_1\, e_2)\,,\ (d_2\, e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_3\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_3\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)^1$

21. $(d_1\, d_2)\,,\ (d_3\, e_1)\,,\ (d_2\, e_3)\,,\ (d_3\, e_1\, e_2)^1$ . . . $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)^1,\ (\delta_3\, \varepsilon_1\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_3\, \varepsilon_3)$

22. $(d_1\, e_1)\,,\ (e_2\, e_3)\,,\ (e_2\, e_3\, d_1)^1$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \delta_1)^1,\ (\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_1)$

23. $(d_1\, e_2\, e_3)\,,\ (d_2\, e_1\, e_2)^1$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_3\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)^1,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1$

24. $(d_2\, d_3)\,,\ (d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e_1\, e_2)^1$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_3\, \varepsilon_1)$

25. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e'_1)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_3)$

26. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e'_1)\,,\ (d_2\, e_2)$ . . . . . $(\delta_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_1\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_2 \cdot \delta_3)$

27. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e'_1)\,,\ (d_1\, e_1\, e_2)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \delta_3)\,,\ (\delta_2\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_1)$

28. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_3)$

29. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e_2\, e_3)\,,\ (e_2\, e_3\, d_1)^1$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_2)\,,\ (\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_1)$

30. $(d_1\, d_2\, d_3)$. . . . . $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

31. $(d_1\, e_1\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_1\, \delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1$

32. $(d_1\, e_1\, e_2\, e_3)\,,\ (d_1\, e_1\, e_2)^1$ . . . . . $(\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_1)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1$

33. $(d_1\, e_2\, e_3)\,,\ (e_1\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_1)$

34. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3)\,,\ (e_2\, e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_2\, \delta_3)$

35. $(d_1\, e_1\, e_2)\,,\ (d_2\, d_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_2\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)^1\,,\ (\varepsilon_1\, \varepsilon_2)$

36. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3)\,,\ (e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

37. $(d_2\, d_3)\,,\ (d_1\, e_1)\,,\ (e_2\, e_3)\,,\ (e_1\, e_2\, d_1)^1$ . . . $(\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\varepsilon_1\, \delta_3)$

38. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, e_2\, e_3)^1,\ (e_2\, e_3)\,,\ (d_2\, d_3)$. . . . $(\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

39. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3)\,,\ (e_2\, e_3\, d_2)^1,\ (e_2\, e_3)$ . . . $(\delta_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)^1,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \delta_1)\,,\ (\delta_2\, \delta_3)$

40. $(d_2\, d_3\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \delta_2)^1$

41. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \delta_1)^1,\ (\delta_2\, \delta_3)\,,\ (\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \delta_2)^1$

42. $(d_2\, d_3\, e_3)\,,\ (d_2\, e_1\, e_2)^1,\ (e_1\, e_2)$ . . . . . $(\delta_3\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)\,,\ (\delta_1\, \delta_2)\,,\ (\delta_3\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2)^1$

43. $(d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e'_1)$. . . . . $(\delta_1\, \varepsilon_1)\,,\ (\delta_1\, \varepsilon'_1)$

44. $(d_2\, d_3)\,,\ (d_1\, e_1)\,,\ (d_1\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

45. $(d_2\, d_3\, e_1)\,,\ (d_2\, d_3\, e_2\, e_3)$ . . . . . $(\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_1)\,,\ (\delta_2\, \delta_3\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$

46. $(d_1 e_1)$, $(d_1 e'_1)$, $(d_2 d_3 e_3)$ . . . . . $(\delta_2 \delta_3)$, $(\delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $(\delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3)^1$

47. $(d_2 d_3 e_2 e_3)$, $(d_1 e_1)$ . . . . . $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_1)^1$, $(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

48. $(d_1 e_1)$, $(d_2 d_3)$, $(e_2 e_3 d_1)^1$, $(e_2 e_3)$. . . . $(\delta_2 \delta_3)$, $(\delta_1 \varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_1)^1$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$

49. $(d_1 d_2 d_3)$, $(e_1 e_2)$ . . . . . $(e_1 e_2 e_2)$, $(\delta_1 \delta_2)$

50. $(d_1 d_2 d_3)$, $(d_1 e_1 e_2)^1$, $(e_1 e_2)$. . . . . $(\delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\delta_2 \delta_3)$

51. $(d_1 d_2 d_3 e_1)$, $(e_2 e_3)$ . . . . . $(\delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1)^1$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

52. $(d_1 d_2 d_3 e_1)$, $(d_1 e_2 e_3)^1$, $(e_2 e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_1)$, $(\delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1)^1$

53. $(d_2 d_3 e_1 e_2 e_3)$ . . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$, $(\delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2)^1$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$

54. $(d_2 d_3)$, $(d_1 e_1 e_2)$, $(d_1 e'_1)$ . . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_1)$, $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon'_1)$

55. $(d_2 d_3 e_1 e_2)$, $(d_2 d_3 e'_1)$ . . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_1)$, $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

56. $(d_1 d_2)$, $(d_1 e_1 e_2)^1$, $(e_1 e_2 e_3)$. . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)$

57. $(d_1 d_2 d_3)$, $(e_1 e_2 e_3)$ . . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

58. $(d_1 d_2 d_3 e_1 e_2 e_3)$ . . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$, $(\delta_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$

59. $(d_1 d_2 d_3 e_1 e_2)$, $(d_1 d_2 d_3 e'_1 e_2)$. . . . . $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon'_1)$

60. $(e_1 e_2 e_3)^1$. . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$

61. $(e_1 e_2 e_3)^1$, $(e_2 e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \delta_3)$

62. $(e_1 e_2 e_3)^1$, $(e_1 e_2 e_3)$. . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$

63. $(e_1 e_2 e_3)^1$, $(e_2 e_3)$, $(d_2 d_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$

64. $(e_1 e_2 e_3)^1$, $(e_2 e_3)$, $(d_1 d_2 d_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

65. $(e_1 e_2 e_3)^1$, $(d_1 d_2 d_3)$, $(e_1 e_2 e_3)$ . . . . . $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^1$, $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$

2. — Dénombrement de toutes les T_4, qui sont répétitions de caractéristiques quadratiques ou cubiques périodiques.

Par deux répétitions:

II. p. § 10. II. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, $(e_1 \varepsilon_2)$, $(e_3 \varepsilon_3)$ Indice 6.

III. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, ε_2 en d_2, δ_3 en d_3, δ_2 en e_2, $(e_3 \varepsilon_3)$ Indice 9.

IV. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, δ_2 en δ'_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_2 en e_2, $(e_3 \varepsilon_3)$ Indice 15.

§ 11. I. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_2)$, $(e_2 \delta_1)$, ε_3 en $\ldots \varepsilon_3^{\frac{m}{2}} = e_3$, δ_3 en $\ldots \delta_3^{\frac{m-2}{2}} = d_3$ m pair Indice $m+2$.

$(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_2)$, $(e_2 \delta_3)$, ε_3 en $\ldots \varepsilon_3^{\frac{m-1}{2}} = d_3$, δ_3 en $\ldots \delta_3^{\frac{m-1}{2}} = e_3$ m impair Indice $2(m+2)$.

II. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_1 \delta_1)$, $(e_2 \delta_3)$, δ_2 en d_3. Indice 9.

III. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, ε_2 en d_3, $(e_1 \delta_1)$, $(e_2 \delta_3)$, δ_2 en e_3. Indice 6.

IV. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, δ_2 en δ'_2 en d_3, $(e_1 \delta_1)$, $(e_2 \delta_3)$, ε_2 en e_3. Indice 6.

V. δ_1 en d_1, $(e_1 \varepsilon_1)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_2 \delta_3)$, $(e_3 \varepsilon_3)$, δ_2 en d_3. Indice 7.

VI. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en d_3, ε_2 en d_2, $(e_2 \varepsilon_3)$. Indice 10.

VII. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, δ_2 en δ'_2 en d_2, $(e_2 \delta_3)$, $(d_3 \varepsilon_2)$, ε_3 en e_3. Indice 12.

VIII. δ_1 en e_1, δ_2 en d_2, $(e_2 \delta_3)$, ε_1 en d_1, $(d_3 \varepsilon_2)$, $(e_3 \varepsilon_3)$. Indice 12.

*

§ 12. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\delta_3)$. Indice 3.
§ 13. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_1\delta_2)$, δ_3 en d_2, δ_1 en d_3, $(e_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$. Indice 15.
§ 14. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, ε_1 en d_3, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en e_1. Indice 9.
$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en d_3, $(e_1\varepsilon_1)$. Indice 15.
§ 27. $(d_1\delta_1)$, $(d_2\delta_2)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_1\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_2)$. Indice 12.
III. p. § 8. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\delta_3)$. Indice 3.
δ_1 en d_1, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\varepsilon_1)$. Indice 4.
δ_1 en d_1, δ_2 en d_2, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_3)$, $(e_2\varepsilon_2)$, $(e_3\varepsilon_3)$. Indice 7.
$(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(d_3\varepsilon_3)$, $(e_1\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en e_2. Indice 5.
$(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(d_3\varepsilon_3)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_2. Indice 9.

et par les caractéristiques permutées:

$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_3\delta_3)$. Indice 3.
$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, $(e_2\delta_2)$, $(e_3\delta_3)$. Indice 3.
$(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_2)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_3\delta_3)$, δ_3 en e_1. Indice 5.
$(d_1 e_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en e_2. Indice 5.
$(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_2. Indice 9.
$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_2. Indice 9.

Par trois répétitions:

§ 16. III. $(d_1\delta_1)$, $(d_2\delta_2)$, $(d_3\delta_3)$, $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_1^{\frac{m}{3}-1}=e_3$, $\varepsilon_3\ldots\varepsilon_3^{\frac{m}{3}-1}=e_2$, $\varepsilon_2\ldots\varepsilon_2^{\frac{m}{3}}=e_1$

$$\varepsilon_1\ldots\varepsilon_1^{\frac{m-4}{3}}=e_2,\ \varepsilon_2\ldots\varepsilon_2^{\frac{m-1}{3}}=e_3,\ \varepsilon_3\ldots\varepsilon_3^{\frac{m-1}{3}}=e_1$$

$$\varepsilon_1\ldots\varepsilon_1^{\frac{m-2}{3}}=e_1,\ \varepsilon_2\ldots\varepsilon_2^{\frac{m-2}{3}}=e_2,\ \varepsilon_3\ldots\varepsilon_3^{\frac{m-2}{3}}=e_3$$

selon que $m\equiv 0, 1, 2$, mod. 3. L'indice est relativement $m+4$, $m+4$, $\frac{m+4}{3}$.

§ 16. IV. $m=3$. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\delta_2)$, $(d_3\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_3)$. Indice 8.
§ 18. I. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en d_2, $(d_3\varepsilon_3)$, $(e_3\delta_3)$, $(e_2\varepsilon_2)$. Indice 4.
II. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, $(e_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_2)$. Indice 6.
III. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, δ_2 en d_2, ε_2 en d_3, δ_3 en e_2, $(e_3\varepsilon_3)$. Indice 10.
§ 19. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\delta_3)$. Indice 3.
§ 21. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 en d_2, $(e_3\varepsilon_1)$, $(d_3\varepsilon_3)$. Indice 14.
§ 23. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_2\varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en e_1. Indice 8.

Par quatre répétitions:

§ 27. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_1)$, $(d_3\delta_3)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_3)$. Indice 3.
§ 28. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_3 en d_3, $(d_3\varepsilon_2)$, $(e_3\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_2)$. Indice 9.
§ 29. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, $(e_1\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$. Indice 15.

Une autre série de Q^4 provient de la répétition des transformations Q^2: $(a\,b_1)$, $b_2 a)$, $(a_i\,b_k)$.

§ 3. — Discussion des caractéristiques.

I. 1. Le cas $(d\delta)$ sera écarté sous n. II. Lorsque $d_1\varepsilon_1$ existe, on appliquera $(d_1^2 d_2 d_3 e_1 e_2)^3$ pour obtenir β_2 $(\varepsilon_1\delta_1\delta_2)$ en γ au plus, parcequ'un point δ au moins est coincident

avec un des points $e_1 e_2$. On aura réduit à Q^3. Des alinéations entre les points translateurs la seule $d_1 e_1 e_2$ pourrait se comporter avec la caractéristique. Toutefois on appliquerait alors $(d_1^2 d_2 d_3 e_1 e_3)^3$, l'alinéation $d_1 e_1 e_2 e_3$ étant impossible. $\mathfrak{C}^3$ ne devient impossible non plus par une approche infinie de points fondamentaux puisque Q^4 déjà n'admet point une approche de trois points fondamentaux sous un angle fini.

2. Reste le cas $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, $(e_1 \delta_3)$ qui est réductible.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$	C_4	$d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1 e_2 e_3$.

II. $(d_1 \delta_i)$. $(d_1 d_2 d_3)^2$ toujours applicable, réduit à une transformation cubique.

III. 1. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(d_2 \varepsilon_i)$, $(d_3 \varepsilon_j)$, $(e_k \delta_1)$, $(e_l \delta_2)$ est réductible au moins à des Q^2 par $(d_1 \delta_1 \delta_2)^2$.

L'alinéation $d_1 \delta_1 \delta_2$ entraînerait une approche infinie de $\delta_1 \varepsilon_1$ et par là une coincidence $(d\delta)$. On obtient pour $k = 1$, $l = 2$, $D_i D_2$, $D_j D_3$, $D_1 \Delta_3$, savoir une forme du § 30, pour $k = 1$, $l = 3$ $D_1^2 \Delta_3^2$, $D_j D_2$, $D_i D_3$, $\Delta_1 D_1$, $E_2 \Delta_1$, pour $k = 2$, $l = 1$ $D_i D_2$, $D_j D_3$, $D_1 \Delta_3$. Δ_1 en Δ_2 en Δ_1, pour $k = 2$, $l = 3$ $D_1^2 \Delta_3^2$, $E_2 D_1$, $D_2 D_j$, $E_1 \Delta_2$, $D_3 D_i$.

2. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_1 \delta_1)$, $(e_1 \delta_2)$ est réduite par $(\delta_1 d_2 d_3)^2$ à $D_1^2 \Delta_1^2$, $\Delta_1 D_2$, $D_3 D_1$, $E_3 \Delta_2$, $E_2 \Delta_3$ et de là à Q^2. Voilà III p., § 6. Le § 1. B n. 12 permet de conclure, que $\delta_1 d_2 d_3$ ne peuvent former un triangle infiniment petit à angle fini.

3. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_1 \delta_2)$ est réduite par $(\delta_1 \delta_2 d_3)$ à $\Delta_1 E_2$, $\Delta_2 E_1$, $D_2 \Delta_3$, $D_3 D_1$, $D_1^2 D_2^2$, D_3 en E_3 c'est $(a b_1)$, $(b a_2)$, b_2 en b'_2, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ III p. A. § 6.

L'alinéation de $\delta_1 \delta_2 d_3$ entraînerait l'approche infinie $d_2 e_1$ et ensuite une $(d\delta)$.

4. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, δ_3 en e_1 — Indice 6.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$	C_4	$d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1 e_2 e_3$
C_6	$d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1^2 e_2 e_3^3 \delta_3^3$	C_6	$d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1^3 e_2^3 e_3^2 \delta_3$

C_6 $d_1^2 d_2^2 d_3^2 e_1^3 e_2^2 e_3^2 \delta_3^3$

5. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, δ_3 en δ'_3 en e_1 — Indice 12.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$	C_4	$\delta_1 \delta_2 \quad e_1 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2$
C_6	$\delta_1 \delta_2^3 \delta_3^3 \delta'^2_3 \quad \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2$	C_6	$\delta_1^3 \delta_2^2 \quad \delta'_3 e_1^3 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2^3 \varepsilon_3^2$
C_8	$\delta_1^2 \delta_2^3 \delta_3^5 \delta'^3_3 e_1^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2$	C_8	$\delta_1^3 \delta_2 \delta_3 \delta'^3_3 e_1^4 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^3$
C_{13}	$\delta_1^5 \delta_2^5 \delta_3^6 \delta'^5_3 e_1^3 \varepsilon_1^4 \varepsilon_2^4 \varepsilon_3^4$	C_{13}	$\delta_1^4 \delta_2^4 \delta_3^3 \delta'^4_3 e_1^6 \varepsilon_1^5 \varepsilon_2^5 \varepsilon_3^5$
C_{15}	$\delta_1^4 \delta_2^5 \delta_3^6 \delta'^6_3 e_1^5 \varepsilon_1^6 \varepsilon_2^5 \varepsilon_3^5$	C_{15}	$\delta_1^6 \delta_2^5 \delta_3^4 \delta'^6_3 e_1^6 \varepsilon_1^5 \varepsilon_2^5 \varepsilon_3^5$

C_{15} $\delta_1^5 \delta_2^4 \delta_3^6 \delta'^6_3 e_1^6 \varepsilon_1^5 \varepsilon_2^5 \varepsilon_3^5$

6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en δ'_3 en δ''_3 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	1	2	2	2			
C_6	2	2	2	1	3	3	2		
C_8	2	2	2	3	3	5	2	3	
C_{15}	4	4	4	5	7	8	5	3	2
C_{22}	7	7	7	6	9	11	8	5	3
C_{28}	8	8	8	8	11	14	11	8	5
C_{40}	12	12	12	13	16	19	14	11	8
C_{51}	16	16	16	15	20	23	19	14	11
C_{62}	19	19	19	19	23	28	23	19	14
C_{78}	24	24	24	25	30	34	28	23	19
C_{94}	30	30	30	29	35	40	34	28	23
C_{109}	34	34	34	34	40	46	40	34	28
C_{130}	41	41	41	42	48	54	46	40	34
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres successifs donnent les dernières différences:

$$0, -1, 2, 1, -2, 3, 0, -1, 2, 1, -2, 3, 0, -1, 2, 1, -2, 3, \ldots$$

IV. 1. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_i)$, $(e_1\delta_1)$, $(e_k\delta_2)$, $(e_l\varepsilon_m)$ est toujours réductible moyennant $(d_1 d_2 \delta_1)^2$ au moins à une Q^3. Les particularisations ne font pas exception.

2. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_1)$, $(e_i\delta_1)$, $(e_j\delta_2)$, $(e_k\varepsilon_j)$ est toujours réductible moyennant $(d_1 d_2 \delta_1^2)$. Même remarque.

3. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\varepsilon_1)$ est réductible par $(d^2_1 d_2 e_1 e_2 e_3)^3$ suivant $\gamma_2(\varepsilon_1^2\varepsilon_3 \delta_1\delta_2\delta_3)$ en $\gamma'_2(D_2^2\Delta_2\Delta_3\Delta_1 D_1)$ et δ_1 $(d_1 d_3 d_2^2\ e_1^2 e_2^2 e_3)$ en $\gamma'_1(E_3^2 D_3 D_2 E_1 E_2)$ à $E_3^2 D_2^2$, $E_2\Delta_1$, $E_1\Delta_2$, $D_3\Delta_3$, $D_2 D_1$.

V. En retranchant à III. 1. 2. 3. la troisième et à III. et IV. 1. 2. la 5ième coincidence on peut pourtant effectuer les mêmes réductions. Il reste

1. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 en d_3 réductible par $(d_3^2\delta_3\delta_1\delta_2 d_2)^3$ à ε_1 $(\delta_3^2 e_1 e_2 e_3 d_1^2 d_2^2 d_3^3)$ en γ'_1 $(D_1^2\Delta_1\Delta_2 E_1 D_3)$ et δ_2 $(d_3 d_1 d_2^2\delta_3^2\delta_1\delta_2^2)$ en γ'_2 $(\Delta_1^2 D_1 D_3\Delta_2 D_2)$, $D_3 D_1$, $\Delta_1\Delta_3$, $\Delta_2\Delta_2$, $E_1 D_2$, D_2 en E_1, Δ_3 en D_3, III. p., § 6, I.

2. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$ δ_3 en δ'_3 en d_3, ε_1 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	2	2	2			1	
C_8	3	2	2	4	4	2		3	1
C_{15}	5	3	5	6	8	4	2	6	3
C_{26}	8	7	9	11	12	8	4	10	6
C_{40}	14	11	13	16	18	12	8	15	10
C_{55}	18	15	18	21	24	18	12	21	15
C_{76}	25	22	26	29	32	24	18	28	21
C_{98}	33	29	32	37	40	32	24	36	28
C_{123}	41	36	41	45	50	40	32	45	36
C_{152}	50	46	51	56	60	50	40	55	45
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les ordres successifs donnent les dernières différences suivantes:

1, 3, 4, 3, 1, 6, 1, 3, 4, 3, 1, 8, 1, . . .

3. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, ε_1 en d_3, δ_3 en e_1 Indice 9.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2\ \varepsilon_3$	C_4	$\delta_1\ \delta_2 \quad e_1 \quad d_3^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2$
C_8	$\delta_1^2\delta_2^4\delta_3^4 e_1^2\varepsilon_1^3 d_3\ \varepsilon_2^3\varepsilon_3^2$	C_8	$\delta_1^3\delta_2^2\delta_3\ e_1^3\varepsilon_1^2 d_3^4\varepsilon_2^2\varepsilon_3^4$
C_{12}	$\delta_1^4\delta_2^4\delta_3^6 e_1^4\varepsilon_1^5 d_3^3\varepsilon_2^4\varepsilon_3^3$	C_{12}	$\delta_1^4\delta_2^3\delta_3^3 e_1^5\varepsilon_4^4 d_3^6\varepsilon_2^4\varepsilon_3^4$
C_{16}	$\delta_1^6\delta_2^6\delta_3^6 e_1^6\varepsilon_1^6 d_3^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5$	C_{16}	$\delta_1^5\delta_2^5\delta_3^5 e_1^6\varepsilon_1^6 d_3^6\varepsilon_2^6\varepsilon_3^6$

Cette caractéristique naît par la répétition de la caractéristique illusoire de II. p., § 14. à l'indice 18.

4. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, ε_1 en ε'_1 en d_3, δ_3 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	2	2	1			2	
C_8	3	2	2	4	3	1		4	2
C_{14}	5	3	5	5	6	3	1	7	4
C_{24}	8	6	9	10	10	6	3	10	7
C_{36}	13	10	12	14	15	10	6	15	10
C_{50}	17	13	17	19	20	15	10	21	15
C_{69}	23	20	24	26	27	20	15	28	21
C_{85}	31	26	30	34	34	27	20	35	28
C_{101}	38	32	38	40	43	34	27	43	35
C_{137}	46	41	47	50	62	43	34	52	43
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans δ_3 sont

$$0, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 2, \ldots$$

5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$; $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, ε_1 en d_3, δ_3 en δ'_3 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	2	2	1		2		
C_8	3	2	2	4	3	1	4	2.	
C_{14}	4	3	4	6	5	3	8	4	2
C_{24}	7	7	8	10	8	5	12	8	4
C_{36}	12	10	11	15	12	8	17	12	8
C_{50}	16	14	16	19	18	12	23	17	12
C_{69}	22	20	23	27	24	18	30	23	17
C_{89}	29	27	28	34	31	24	38	30	23
C_{111}	36	33	36	41	38	31	47	38	30
C_{137}	44	42	45	51	47	38	56	47	38
C_{166}	55	51	54	61	57	47	67	56	47
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans ε_1 donnent les dernières différences

$$1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

6. $(d_1\varepsilon_2)$ $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, δ_3 en e_2, δ_1 en e_3. Indice 9.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2 \quad \delta_2^2\delta_3^2 \quad \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$	C_4	$e_3\ \delta_2 \quad e_2\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2^2\varepsilon_3^2$
C_8	$\delta_1^5 e_3^2\delta_2^3\delta_3^3 e_2^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2$	C_8	$\delta_1\ e_3^3\delta_2^3\delta_3\ e_2^4\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4\varepsilon_3^3$
C_{13}	$\delta_1^6 e_3^5\delta_2^5\delta_3^5\ e_2^3\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\varepsilon_3^4$	C_{13}	$\delta_1^3 e_3^4\delta_2^4\delta_3^4 e_2^6\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5$
C_{15}	$\delta_1^6 e_3^6\delta_2^4\delta_3^6\ e_2^5\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5$	C_{15}	$\delta_1^4 e_3^6\delta_2^5\delta_3^6 e_2^6\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5$

7. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, δ_1 en e_2 réductible au moyen de $(\delta_2^2 e_2^2\delta_1^2 d_1 d_2 d_3)^4$ à $\eta(\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\varepsilon_1^2 e_2^2\delta_1^3\delta_3^3\delta_3)$ en $\beta'_2(\Delta_3\Delta_1\Delta_2)$ et ε_1 $(e_1^2 e_2^2\delta_1^2 d_1^2 d_2^2 d_3^2)$ en $\beta'_1(\Delta_1\Delta_2\Delta_2)$. $\Delta_1\Delta_3$, $\Delta_2\Delta_1$, $E_2\Delta_2$, $\Delta_3 \ldots E_3$ en E_2, savoir II. p., § 25. La transposition ne tombe en défaut que par $(\delta_2\delta_1 d_i)^1, \ldots, (\delta_3 e_2 d_i)_1 \ldots$ Mais ces alinéations sont incompatibles avec la caractéristique.

8. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, δ_3 en δ'_3 en e_2, δ_1 en e_3, $(e_1\delta_2)$

Droite en									
C_4	1	1	1	2			2		2
C_8	2	2	2	3	2		5	2	3
C_{15}	4	4	4	7	3	2	8	5	5
C_{24}	7	7	7	11	7	3	11	8	8
C_{35}	10	10	10	16	11	7	16	11	11
C_{51}	15	15	15	22	16	11	22	16	18
C_{69}	21	21	21	28	22	16	30	22	23
C_{89}	27	27	27	36	28	22	37	30	30
C_{112}	35	35	35	45	36	28	45	37	37
C_{136}	42	42	42	54	45	36	54	45	45
C_{166}	52	52	52	65	54	45	65	54	56
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont:

1, 3, 2, 2, 5, 2, 2, 3, 1, 6, 1, 3, 2, 2, 5, 2, 2, 3, 1, 7, . . .

9. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, δ_3 en e_3, δ_1 en δ'_1 en e_2, est réductible au moyen de $(d_3\delta_1\delta_2)^2$ à V. 2.

VI. 1. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(e_k\delta_j)$ sont réductibles en degré au moyen de $(d_1 d_2 e_k)^2$.

2. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_j\delta_j)$ par $(d_1 d_2\delta_j)^2$.

3. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_k\delta_j)$, $(e_j\varepsilon_2)$ par $(d_1 e_k e_j)^2$.

4. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_k\delta_j)$, $(e_l\varepsilon_2)$ par $(d_1^2 d_2 e_k d_3 e_j)^3$.

5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_1)$, $(\delta_1 e_j)$ par $(d_1 d_2 e_j)^2$.

6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\delta_1)$ par $(d_1 d_2 e_1)^2$.

7. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_1)$ par $(d_1 e_1 e_2)^2$.

8. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_2)$, δ_2 en d_3 par $(d_3^2\delta_2 d_1 d_2\delta_1)^3$ en III, p., A., § 5.

9. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en e_1 par $(d_1 e_2 e_3)^2$ en n. 8.

Je supprime la discussion, du reste très nécessaire, que toutes ces transpositions ne tombent jamais complètement en défaut.

10. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_2 en δ'_2 en d_3, δ_3 en δ'_3 en e_1

Droite en										
C_3	1	1	2	1	2			2		
C_9	3	2	3	3	5	2		4	2	
C_{20}	6	4	7	7	10	5	2	10	4	2
C_{40}	12	10	14	14	19	10	5	19	10	4
C_{74}	23	18	25	25	35	19	10	35	19	10
C_{134}	41	33	47	46	62	35	19	62	35	19
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans d_1 sont 1, 3, 5, 7, 9, . . .

11. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en e_1 Indice 8.

Droite en		Droite	
C_4	$\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$	C_4	$\delta_1\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 d_3^2 e_1$
C_9	$\delta_1^3\delta_2^5\delta_3^4\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\varepsilon_3^2 d_3^2 e_1^2$	C_9	$\delta_1^3\delta_2\ \delta_3^2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\varepsilon_3^4 d_3^4 e_1^4$
C_{14}	$\delta_1^5\delta_2^6\delta_3^6\varepsilon_1^5\varepsilon_2^4\varepsilon_3^4 d_3^4 e_1^5$	C_{14}	$\delta_1^4\delta_2^4\delta_3^4\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5 d_3^6 e_1^6$
C_{17}	$\delta_1^6\delta_2^6\delta_3^6\varepsilon_1^6\varepsilon_2^6\varepsilon_3^6 d_3^6 e_1^6$		

12. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en δ'_3 en d_3, δ_2 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	2	1	2			2	
C_9	3	2	3	3	4	2		3	2
C_{18}	6	4	7	7	8	4	2	8	3
C_{30}	10	8	10	12	14	8	4	14	8
C_{50}	17	13	18	19	22	14	8	20	14
C_{73}	25	20	25	29	30	22	14	29	20
C_{100}	34	28	33	39	42	30	22	38	29
C_{131}	44	38	44	50	54	42	30	48	38
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans δ_2 donnent les différences

1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 3, . . .

13. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en δ'_2 en e_1

Droite en									
C_4	1	1	2	1	2		2		
C_9	3	2	3	3	4	2	5	2	
C_{16}	4	4	5	5	8	4	8	5	2
C_{28}	8	8	10	8	13	8	13	8	5
C_{41}	12	12	14	12	17	13	19	13	8
C_{56}	16	17	17	16	23	17	25	19	13
C_{73}	23	23	27	22	30	23	33	25	19
C_{98}	30	30	34	30	37	30	42	33	25
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans δ_2 donnent les différences:

2, 3, 3, 5, 6, 6, 8, 9, 9, . . .

VII. 1. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_2)$, $(e_3\varepsilon_3)$ réductible par $(d_1\delta_1 e_1)^2$ à $(\delta_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1^2\delta_2^2\delta_3)$ en $\gamma'_2(\Delta_2^2\Delta_3 D_1 E_2 E_3)$ et $\delta_1(d_1^2 d_2^2 d_3 e_1^2 e_2 e_3)$ en $\gamma'_1(D_2^2 D_1 D_3 E_3 E_1)$. $D_3\Delta_3$, $D_1 E_3$, $E_1 D_1$, $E_3 E_2$ accouplés et E_2 en Δ_2.

L'alinéation $d_1\delta_2 e_2$ demanderait $(e_2 d_2)$ et par conséquent $(d\delta)$. Une approche entre $d_1\delta_2 e_2$ est contradictoire à la caractéristique.

2. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_2)$ réductible par $(d_1\delta_2 e_2)^2$ à $\delta_2(\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1^2\delta_2^2\delta_3)$ en $\gamma'_2(E_3\Delta_3 D_1\Delta_2\Delta_1^2)$ et $\delta_1(e_2^2 e_1 e_3 d_2 d_1^2 d_3^2)$ en $\gamma'_2(E_3 D_2 D_2\Delta_1 D_3^2)$, $E_3\Delta_2$, $\Delta_2 E_2$, $D_2\Delta_3$, $D_1 E_3$ accouplés. et E_2 en E_2. $(d_1\delta_2 e_2)^1$ demanderait $(e_1 d_2)$ et par suite $(d\delta)$.

3. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_1)$, $(e_3\varepsilon_3)$ par $(d_1\delta_1 e_1)$ à $\delta_2(\delta_1^2\delta_2^2\delta_3\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3)^2$ en $\gamma'_2(E_1\Delta_1 E_3\Delta_3\Delta_2^2)$ et $\delta_1(d_1^2 d_2^2 d_3 e_1^2 e_2 e_3)$ en $\gamma'_1(D_1 E_1 D_3 E_3 D_2^2)$, $E_1 E_1$, $E_3\Delta_1$, $D_1 E_3$, $D_3\Delta_3$ sont accouplés, Δ_1 en D_1

4. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en d_2, δ_2 en d_3, $(e_1\varepsilon_3)$ Indice 15.

	Droite en		Droite
C_4	$\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$	C_4	$\delta_1\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2^2\varepsilon_3\ d_3^2 d_2^2$
C_{10}	$\delta_1^4\delta_2^5\delta_3^4\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3\varepsilon_3^3 d_3^2 d_2^2$	C_{10}	$\delta_1^3\delta_2^2\delta_3^2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4\varepsilon_3^4 d_3^4 d_2^5$
C_{15}	$\delta_1^5\delta_2^6\delta_3^6\varepsilon_1^6\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5 d_3^5 d_2^4$	C_{15}	$\delta_1^5\delta_2^4\delta_3^5\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\varepsilon_3^6 d_3^6 d_2^6$
C_{16}	$\delta_1^5\delta_2^5\delta_3^6\varepsilon_1^6\varepsilon_2^5\varepsilon_3^6 d_3^6 d_2^6$	C_{16}	$\delta_1^5\delta_2^6\delta_3^6\varepsilon_1^6\varepsilon_2^5\varepsilon_3^6 d_3^6 d_2^5$
C_{13}	$\delta_1^4\delta_2^3\delta_3^4\varepsilon_1^4\varepsilon_2^5\varepsilon_3^5 d_3^5 d_2^6$	C_{13}	$\delta_1^5\delta_2^6\delta_3^5\varepsilon_1^5\varepsilon_2^4\varepsilon_3^4 d_3^4 d_2^3$
C_7	$\delta_1^2\delta_2\ \delta_3\ \varepsilon_1^2\varepsilon_2^3\varepsilon_3^2 d_3^3 d_2^4$	C_7	$\delta_1^3\delta_2^4\delta_3^3\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 d_3\ d_2$
C_2	$\varepsilon_2\ \ d_3\ d_2$	C_2	$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$

Comme § 2. n. 12 le fait voir, la caractéristique résulte par répétition de II. p. § 13. Toutefois elle est réductible par $(d_1 e_2 e_1)^2$ à VI. 4. et de là le degré s'abaisse à 2. On a $\delta_2(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1^4\delta_1^2\delta_2^2\delta_3)$ en $\delta'_2(\Delta_2^2 E_3^2 E_2^2 D_1 E_1\Delta_3)$ et $\delta'_1(e_2, e_3 e_1^2 d_1 d_2^2 d_3^2)$ en $\delta'_1(E_1^2 D_2^2 D_3^2 E_2 D_1 E_3)$. $E_2\Delta_2^2$, $E_3 E_3^2$, $D_1 E_2^2$, $D_2^2 D_1$, $D_3^2 E_1$, $E_1^2\Delta_3$ accouplés, Δ_2 en D_3, Δ_3 en D_2, savoir $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_3)$, d_3 en δ_2, δ_1 en e_3, ce qui donne par $(d_1^2 d_2 e_2 e_3 d_3)^3$, $\beta_2(\varepsilon_1\delta_2\delta_3)$ en $\gamma'_2(\Delta_2 D_2 E_3 D_3 D_1^2)$ et $(d_1^4 d_2^2 d_3^3\delta_2\delta_1 e_3^3 e_1^2 e_2^2)$ en $\gamma'_1(D_2 E_2\Delta_2\Delta_1 E_1^2)$. D_3 en E_1, D_1 en Δ_1, E_3 en E_2, $\Delta_2 D_3$, $\Delta_1 E_3$, $D_2 D_2$, $E_2\Delta_2$, savoir $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_3)$, b_2 en a_4, b_4 en a, b en a_3, III. p. A. § 7.

5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en δ'_3 en d_2, δ_2 en d_3

Droite									
C_4	1	2	1	1	2			2	
C_{10}	3	4	3	4	4	2		5	2
C_{19}	5	7	7	8	8	4	2	8	5
C_{30}	9	11	12	12	12	8	4	11	8
C_{43}	13	16	17	18	16	12	8	19	15
C_{57}	19	20	22	24	21	16	12	15	11
C_{70}	23	24	26	30	26	21	16	22	19
C_{84}	28	28	31	35	32	26	21	26	22
C_{100}	35	31	35	41	38	32	26	28	26

Les dernières différences des multiplicités dans δ_3 sont

2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2,...

6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en d_2, δ_2 en δ'_2 en d_3

Droite en									
C_4	1	2	1	1	2		2		
C_{10}	3	4	3	4	4	2	5	2	
C_{19}	7	7	5	8	8	4	8	5	2
C_{30}	10	10	8	13	13	8	12	8	5
C_{43}	15	14	12	17	19	13	16	12	8
C_{57}	20	19	15	22	24	19	21	16	12
C_{70}	25	22	18	26	29	24	26	21	16
C_{84}	29	27	21	30	35	29	31	26	21
C_{100}	34	32	26	34	41	35	38	31	26
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans δ_2 sont:

1, 3, 3, 7, 7, 5, 5, 5, 7, 7,...

VIII. 1. $(d_1\varepsilon_i)$, $(d_2\varepsilon_j)$, $(d_3\varepsilon_k)$, δ_i en e_1, δ_j en e_2, δ_k en e_3.

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{10}	2	2	2	5	2	5	2	5	2
C_{22}	6	6	6	10	5	10	5	10	5
C_{37}	10	10	10	16	10	16	10	16	10
C_{58}	17	17	17	24	16	24	16	24	16
C_{82}	24	24	24	33	24	33	24	33	24
C_{112}	34	34	34	44	33	44	33	44	33
C_{145}	44	44	44	56	44	56	44	56	44
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres sont

3, 6, 3, 6, 3, 6, ...

2. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\delta_2)$ réductible par $(d_1 d_2 e_1)^2$ dans tous les cas à Q^3.
3. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_2)$ de même à Q^3.
4. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\delta_1)$ de même à Q^3.
5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en d_3 réductible par $(\delta_2^2 d_3 d_1 d_2 e_2)^3$ à Q^3.

6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en e_1, d_3 en δ_3, ε_1 en e_3

Droite en									
C_4	1	1	2	2		1		1	
C_{10}	3	2	4	6	2	4	1	3	1
C_{19}	5	5	8	10	6	7	4	6	3
C_{31}	10	9	13	15	10	10	7	10	6
C_{43}	14	12	17	20	15	13	10	15	10
C_{58}	19	17	23	25	20	18	13	21	15
C_{76}	26	22	29	32	25	24	18	28	21
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont:

3, 3, 3, 0, 3, 3, 3, 0, 3, 3, 3, 0,...

7. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en e_1, δ_3 en e_3, ε_1 en d_3 est traduite par $(d_1e_2d_3)^2$ à $\gamma_2(\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1\delta_3\delta_2^2)$ en δ'_2 $(D_2^2\Delta_1^2\Delta_2^2D_3\Delta_3D_1)$ et à $\varepsilon_1(e_1^2d_1^2d_2^2\varepsilon_1e_2e_3d_3^3)$ en d_1^1 $(D_1^2D_3^2E_1^2E_3D_2E_1$ où $E_3D_2^2$, $D_2\Delta_1^2$, $E_1\Delta_2^2$, $D_1^2D_3$, $D_3^2\Delta_3$, $E_1^2D_1$ accouplés Δ'_2 en E_1, donc $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_1 en d_3, $(e\delta_2)$, δ_3 en e_2, ε_1 en e_3, ce qui est traduisible en une autre à 4 coincidences et de là en Q^3.

9. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, ε_1 en d_3, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_1

Droite en									
C_4	1	2	1		2	2		2	
C_{18}	3	2	3	1	4	6	2	4	2
C_{20}	6	5	7	3	8	10	6	8	4
C_{34}	11	9	12	7	12	16	10	14	18
C_{52}	16	14	18	12	19	23	16	21	14
C_{79}	24	22	26	18	27	32	23	29	21
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les premières différences pour les multiplicités de d_3 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,..., les secondes différences des ordres sont égales à 4.

10. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_2 en δ'_2 en d_3, ε_1 en e_3, δ_3 en e_1, $(e_2\delta_1)$

Droite en										
C_4	1	1	2			1		2		2
C_{10}	3	2	6	2		3	1	4	2	4
C_{23}	7	5	12	6	2	8	3	9	4	10
C_{47}	14	11	25	12	6	16	8	18	9	19
C_{86}	27	22	46	25	12	30	16	35	18	36
C_{152}	47	37	86	46	25	52	30	66	35	59
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

11. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_3 en d_3, ε_1 en e_1, δ_2 en e_3, $(e_2\delta_1)$ est réductible par $(\delta_1 d_1 d_2 \delta_3 d_3^2$ à $D_3\, D_2$, $D_2\, \Delta_3^2$, $E_1\, \Delta_1^2$, $E^2\, \Delta_2^2$, $E_3^2\, D_1$, $D_1^2\, D_3$, savoir $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(\varepsilon_1 e_3)$, δ_2 en d_3, δ_3 en δ'_3 en... e_1, c'est VI. 8. et donc réductible à Q^3.

12. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_3 en e_3, ε_1 en e_1, δ_2 en δ'_2 en d_3, $(e_2\delta_1)$

Droite en										
C_4	1	1	2		1		2			2
C_{10}	3	2	4	2	3	1	6	2		4
C_{23}	7	5	10	4	8	3	12	6	2	9
C_{48}	14	11	20	10	16	8	25	12	6	19
C_{93}	30	25	42	20	31	16	51	25	12	36
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans δ_1 sont 1, 3, 5, 7, ...

14. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_3 en δ'_3 en d_3, ε_1 en e_1, δ_2 en e_3, $(e_2\delta_1)$ est apériodique, parce qu'elle est plus défavorable que V. 2.

IX. 1. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(e_1\varepsilon_3)$, δ_1 en d_3, δ_2 en e_2, δ_3 en e_3 *)

C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{13}	3	3	2	6	2	5	2	5	2
C_{30}	8	8	7	14	6	14	5	14	5
C_{59}	16	16	14	28	14	26	14	26	14
C_{102}	29	29	31	44	28	44	26	44	26
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...

*) (ou δ_2 en e_3, δ_3 en e_2)

2. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(e_1\varepsilon_3)$, δ_2 en d_3, δ_1 en e_2, δ_3 en e_3

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	3	2	5	2	6	2	5	2
C_{22}	6	6	5	10	5	10	6	10	5
C_{38}	11	11	10	17	10	16	10	16	10
C_{58}	17	17	16	24	17	24	16	24	16
C_{82}	24	24	24	33	24	33	24	33	24
C_{112}	34	34	34	44	33	44	33	44	33
C_{146}	45	45	44	56	44	57	44	56	44
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des multiplicités dans e_3 sont

1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, . . .

3. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_2)$, $(e_1\varepsilon_3)$, δ_2 en d_3, δ_3 en e_2, δ_1 en e_3

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	3	2	5	2	5	2	6	2
C_2	6	6	5	10	5	10	5	10	6
C_{46}	13	13	12	20	10	21	10	20	10
C_{80}	23	23	20	34	20	34	21	36	20
C_{127}	37	37	34	54	34	53	34	53	36
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des multiplicités dans δ_3 sont

2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, . . .

4. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_2)$, δ_1 en d_3, δ_2 en e_2, δ_3 en e_3 *).

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	2	3	4	2	3	2	3	2
C_{23}	7	6	6	11	4	10	3	10	3
C_{46}	13	10	12	23	11	20	10	20	10
C_{84}	25	23	22	38	23	36	20	36	20
C_{132}	38	36	36	57	38	55	36	55	36
C_{196}	58	58	56	80	57	80	55	80	55
C_{272}	81	80	81	109	80	108	80	108	80
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans δ_3 ont les différences

6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, . . .

*) (ou δ_2 en e_3, δ_3 en e_2).

5. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_2)$, δ_2 en d_3, δ_1 en e_2, δ_3 en e_3.

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	2	3	5	2	6	2	5	2
C_{23}	7	6	6	10	5	11	6	10	5
C_{39}	12	10	11	17	10	17	11	16	10
C_{60}	19	17	17	25	17	25	17	24	16
C_{84}	26	24	24	34	25	34	25	33	24
C_{113}	35	34	33	45	34	46	34	46	33
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans d_2 ont les différences

1, 1, 4, 4, 7, 7, 10, 10, 13, 13, . . .

6. $(d_1\varepsilon_1)$, $(d_2\varepsilon_3)$, δ_2 en d_3, δ_3 en e_2, δ_1 en e_3, $(e_1\varepsilon_2)$

Droite en									
C_4	1	1	2		2		2		1
C_{11}	3	2	5	2	5	2	6	2	3
C_{23}	7	6	10	5	10	5	11	6	6
C_{39}	12	10	17	10	16	10	17	11	11
C_{60}	19	17	25	17	24	25	25	25	17
C_{85}	26	24	34	25	33	34	34	34	25
C_{115}	35	34	45	34	46	45	46	46	34
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

7. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_1)$, δ_2 en e_2, δ_2 en d_3, δ_3 en e_3

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	2	3	6	2	5	2	5	2
C_{23}	6	6	7	11	6	10	5	10	5
C_{40}	12	11	12	18	11	17	10	16	10
C_{61}	18	17	19	26	18	25	17	24	16
C_{87}	26	26	27	36	26	35	25	33	24
C_{117}	36	35	36	47	36	46	35	44	33
C_{151}	46	46	47	59	47	59	46	56	44
C_{190}	59	59	59	73	59	73	59	70	56
C_{232}	72	72	72	88	73	88	73	85	70
C_{279}	87	88	87	104	88	105	88	102	85
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les multiplicités dans d_2 ont les différences

3, 1, 1, 3, 0, 2, 2, 0, 3, 1, 1, 3, 0, . . .

8. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_1)$, δ_1 en d_3, δ_2 en e_2, δ_3 en e_3

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	2	3	6	2	5	2	5	2
C_{23}	6	6	7	11	6	10	5	10	5
C_{39}	11	11	11	18	11	16	10	16	10
C_{59}	17	17	17	25	18	24	16	24	16
C_{83}	24	25	24	34	25	33	24	33	24
C_{112}	34	34	33	44	34	44	33	44	33
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les secondes différences des ordres sont 4, 5, 4, 4, 4, 4, 5, 4, 4, 4, . . .

9. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_1\varepsilon_1)$, δ en e_3, δ_3 en e_2, δ_2 en d_3

Droite en									
C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{11}	3	2	3	6	2	5	2	5	2
C_{23}	6	6	7	11	6	10	5	10	5
C_{40}	12	11	12	18	11	17	10	16	10
C_{61}	18	17	19	26	18	25	17	24	16
C_{88}	27	26	28	36	26	35	25	34	24
C_{119}	37	35	38	48	36	46	35	45	34
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Il faut remarquer, que par $(d_1\delta_1 d_3)^2$, $(d_1\delta_2 d_3)^2$, $(d_1\delta_2 d_3)^2$, $(d_2\delta_1 d_3)^2$, $(d_2 d_2 d_3)^2$, $(d_2\delta_2 d_3)^2$, $(d_2\delta_2 d_3)^2$, $(d_2\delta_1 d_3)^2$, $(d_2\delta_2 d_3)^2$ les caractéristiques 1 . . . 9 sont traduisibles en des formes à quatre coincidences.

10. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_1)$, $(e_2\varepsilon_2)$ / $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_2)$ / $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_1)$ sont traduites par $(d_1 e_1 e_2)^2$ en une Q^3 et lorsque ces caractéristiques n'ont nulle autre coincidence la Q^3 a au plus une de deux points simples et devient donc apériodique.

11. $(d_1\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_i\varepsilon_k)$ est traduite par $(d_1 e_2 e_1)^2$ à $\delta_2(\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1^2\delta_2^2\delta_3)$ en $\delta'_2(D_1^2 D_2^2 \Delta_2^2 E_2 E_3 \Delta_3)$ et à $\varepsilon_1(d_1^3 d_2^2 d_3^2 e_1^2 e_2 e_3 e_1)$ en $\delta'_1(D_1^2 D_2^2 D_3^2 E_1 E_3 E^1)$, pour i (=) 1; c'est une forme avec $(d\delta)$.

12. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_1 en e_3, $(e_1\varepsilon_3)$.

Droite en									
C_4	1	2	2		2		1		1
C_{11}	3	5	6	2	4	2	4	1	3
C_{21}	6	9	11	6	7	4	7	4	6
C_{23}	11	13	16	11	11	7	11	7	9
C_{45}	15	17	21	16	15	11	15	11	11
C_{57}	19	20	26	21	20	15	18	15	14
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des multiplicités dans δ_1 donnent 3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, . . .

13. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_3)$, ε_1 en d_3, δ_2 en d_2, δ_3 en e_3

Droite en									
C_4	1	2	1	1		2		2	
C_{11}	3	1	3	4	1	6	2	4	2
C_{26}	7	13	6	8	4	11	6	12	4
C_{45}	15	18	13	16	8	15	11	16	12
C_{69}	22	26	19	26	16	31	15	25	16
C_{109}	31	33	22	38	26	40	31	30	25
C_{180}	52	32	27	52	38	38	40	35	30
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

14. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_1\varepsilon_3)$, ε_1 en d_2, δ_3 en d_3, δ_2 en e_3 ou ε_1 en d_2, δ_2 en d_3, δ_3 en e_3 sont encore plus défavorables à la périodicité. La seconde est réductible par $(d_1\delta_2 d_3)^2$.

15. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_3)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_1 en e_2 est réductible à une caractéristique $(d\delta)$ au moyen de $(d_1\delta_2 d_2)^2$.

16. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_3)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_1 en ε'_1 en e_1.

Droite en										
C_4	1	2	1	2		2		1		
C_{11}	3	4	3	6	2	5	2	4	1	
C_{23}	6	8	6	12	6	11	5	7	4	1
C_{43}	12	15	11	22	12	20	11	12	7	4
C_{72}	20	25	19	36	22	32	20	20	12	7
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres donnent 1, 3, 1, 3, 1, 3. . . .

Toutes les autres caractéristiques renforcent l'apériodicité.

17. $(d_1\varepsilon_2), (e_2\delta_1), (e_3\varepsilon_3), \delta_3$ en d_3, δ_2 en d_3, ε_1 en e_1 est traduite par $(d_1\delta_3 d_2)^2$ à $\delta_2(d_2\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2)$ en $\delta'_2(E_1\Delta_3^2 D_2 D_1 \Delta_2^2 \Delta_1^2)$ et $\varepsilon_1(\delta_3\delta_2^3 d_3^2 d_1^2 e_3^2 e_1 e_2)$ en $\delta'_1(E_3^2 E_1 E_2 E_3^2 D_2^2 D_1), D_1\Delta_3^2$, $E_1\Delta_1^2, E_2\Delta_2^2, E_3^2 E_1, D_3^2 D_1, D_2^2 D_2$, E_1 en E_1, Δ_2 en D_3, Δ_3 en E_3, savoir $(d_1\varepsilon_1), (e_2\varepsilon_2), (e_3\delta_1)$, δ_1 en d_2, ε_3 en e_1, δ_1 en d_3 et celle-ci est traduite par $(d_1 e_1 e_3)^2$ en $(d\delta)$.

18. $(d_1\varepsilon_2), (e_2\delta_1), (e_3\varepsilon_3), \delta_3$ en d_3, δ_2 en e_1, ε_1 en d_2

Droite en

C_4	1	2	1	2		2		1	
C_{11}	3	4	3	5	2	6	2	4	1
C_{23}	6	9	7	10	5	11	6	8	4
C_{40}	12	15	13	16	10	18	11	14	8
C_{61}	18	22	20	24	16	26	18	22	14
C_{88}	27	32	29	34	24	36	26	31	22
C_{119}	37	43	39	45	34	48	36	42	31
C_{154}	48	54	51	57	45	61	48	54	42
C_{193}	61	68	64	71	57	74	61	67	54
C_{235}	75	82	78	85	71	89	74	82	67
C_{280}	89	97	93	101	85	105	89	97	82
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des multiplicités dans δ_3 deviennent

2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, ...

19. $(d_1\varepsilon_2)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_3)$, ε_1 en d_2, δ_2 en d_3, δ_3 en e_1 est traduite par $(d_1\delta_2 d_3)^2$ à $\delta_2(d_3\varepsilon_1\varepsilon_8\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2)$ en $\delta'_2(\Delta_2^2 E_3^2 \Delta_3^2 \Delta_1 \Delta_1 E_1)$ et à $\gamma_1(d_3^2 d_2^2 d_1^2 e_1 e_2 \delta_2)$ en $\delta'_1(D_3^2 D_1^2 D_1 \Delta_2 E_2)$, où $E_2\Delta_2^2$, $E_1 E_3^2$, $\Delta_2\Delta_3^2$, $D_3^2\Delta_1$, $D_2^2 D_1$, $D_1^2 E_1$ sont accouplés, Δ_3 en E_1, E_1 en D_2, E_3 en D_3, savoir $(d_1\varepsilon_2), (e_2\delta_1), (e_3\varepsilon_1)$, δ_2 en e_1, ε_3 en d_3, δ_3 en d_3, c'est n. 14.

X. $(d_1\varepsilon_i), (e_1\varepsilon_j), (e_2\varepsilon_k)$ est toujours réductible à IX avec deux coincidences $(d\varepsilon)$ par $(d_1 d_2 e_1)^2$.

XI. $(e_1\varepsilon_i), (e_2\varepsilon_j), (e_3\varepsilon_k), \delta_i$ en d_1, δ_j en d_2, δ_k en d_3

Droite en

C_4	1	1	1	2		2		2	
C_{13}	4	4	4	6	2	6	2	6	2
C_{28}	9	9	9	12	6	12	6	12	6
C_{49}	16	16	16	20	12	20	12	20	12
C_{76}	25	25	25	30	20	30	20	30	20
C_{109}	36	36	36	42	30	72	30	72	30
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les différences des ordres sont 6, 6, 6, 6, 6, ...

XII. En retranchant à IX 1...9 la 3ième coincidence, l'apériodicité est renforcée, et en défalquant de IX. 10 . . . 15 la 3ième coincidence, on ne doit plus considérer que les cas, où une transposition était appliquée, au lieu d'exécuter le tableau, c'est-à-dire.

$(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_2 en e_1, ε_3 en e_3

Droite en										
C_4	1	2	2		2		1		1	
C_{13}	4	5	7	2	5	2	3	1	3	1
C_{29}	9	12	16	7	12	5	7	3	7	3
C_{56}	17	22	31	16	22	12	15	7	13	7
C_{93}	28	38	53	31	38	22	27	15	23	13
C_{164}	45	64	87	53	62	38	48	27	49	23
C_{290}	73	105	142	87	101	62	81	48	66	49
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les autres enchaînements sont évidemment plus défavorables.

XIII. 1. $(d_1 \varepsilon_1)$, $(e_1 \varepsilon_2)$
2. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(e_1 \varepsilon_1)$
3. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(e_1 \varepsilon_3)$
} sont apériodiques, car elles proviennent de la dissolution d'une coincidence dans XI ou IX.

XIV. sont écartées comme apériodiques en même temps que XI.

XV. 1. $(d_1 \varepsilon_k)$, δ_i en d_2, δ_j en d_3, ε_j en e_2, ε_k en e_3 proviennent de la dissolution d'une coincidence dans X et sont donc apériodiques.

2. $(d_1 \varepsilon_k)$, ε_l en d_2, ε_j en d_3, δ_i en e_1, δ_j en e_2, δ_k en e_3 sont produites par une dissolution de VIII.

XVI.
$(d_1 \varepsilon_{k'})$, $\varepsilon_{l'}$ en d_2, $\delta_{i'}$ en d_3, $\varepsilon_{i'}$ en e_1, $\delta_{j'}$ en e_2, δ_k en e_3 de IX.
$(e_1 \varepsilon_i)$, ε_j en d_1, ε_k en d_2, $\delta_{i'}$ en d_3, $\delta_{j'}$ en e_2, $\delta_{k'}$ en e_3 de IX.
$(e_1 \varepsilon_i)$, $\delta_{i'}$ en d_1, $\delta_{k'}$ en d_2, $\delta_{l'}$ en d_3, $\varepsilon_{j'}$ en e_2, $\varepsilon_{k'}$ en e_3 de XI.
$(e_1 \varepsilon_i)$, ε_j en e_2, ε_k en d_1, $\delta_{i'}$ en d_2, $\delta_{k'}$ en d_3, $\delta_{l'}$ en e_3 de X.

XVII. δ_1 en d_1, δ_2 en d_2, δ_3 en d_3, ε_1 en e_1, ε_2 en e_2, ε_3 en e_3

Droite en												
C_4	2		2		2		1		1		1	
C_{16}	8	2	8	2	8	2	4	1	4	1	4	1
C_{40}	24	8	24	8	24	8	12	4	12	4	12	4
C_{136}	66	24	66	24	66	24	32	12	32	12	32	12
C_{364}	136	66	136	66	136	66	88	32	88	32	88	32
C_{964}	466	136	466	136	466	136	232	88	232	88	232	88
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tous les autres enchaînements sont encore plus défavorables.

SECONDE FORME

§ 4.—Les deux points triples coincident.

1. Toute caractéristique, où deux points $a_{i1}\, b_{k1}$, i_1 $(=)$ k_1 sont enchaînés, est changeable en une transformation d'un moindre degré. En effet $(a_{i1}\, a'_{i1}\, b)$ donne

$$\delta_2\,(b^3\, a_{i_1}\, b_{i_2}\, b_{i_3}\, b_{i_4}\, b_{i_5}\, b_{i_6}) \quad , \quad \varepsilon_1\,(b^4\, a'_{i_1}\, a_{i_1}\, a_{i_2}\, a_{i_3}\, a_{i_4}\, a_{i_5}\, a_{i_6}\, a''_{i_1})$$

$$\delta'_2\,(B^3\, A_{i_1}\, B_{i_2}\, B_{i_3}\, B_{i_4}\, B_{i_5}\, B_{i_6}) \quad , \quad \delta'_1\,(A^3\, A''_{i_1}\, A_{i_2}\, A_{i_3}\, A_{i_4}\, A_{i_5}\, A_{i_6})$$

Deux points simples du même ordre dans ces suites sont accouplés. Si $a_{i1}^{(p_1)} = b_{k1}$, le $(p_1 - 2)^{\text{ième}}$ transformé de A''_i sera B_{k1} ; A'_{i1} donne $a\, a'_{i1}$ dans Σ' celle-ci $a\, a_{i1}$, celle-ci b_1 et après une série de transformations un point a_{i2}. Donc: A_{i1} en A'_{i1} en B_{i1} en...A_{i2}.

Voilà donc une caractéristique (ab), où le nombre des intercalés entre A_{i_1}, B_{k_1} a diminué de 2, et au contraire celui entre A_{i_1} et A_{i_2} a augmenté de 2. En appliquant la transposition dans le même sens, on arrivera donc ou à un enchaînement direct a_{i_1} en b_{k_1} ou à $(a_{i_1}\, b_{k_1})$.

Ces deux cas sont traduits en des Q^3 par $(b\, a_{i_1}\, b_{k_1})^2$ ou $(b\, a_{i_1}\, a_{i_2})^2$. Si T_4 possédait 4 enchaînements de points accouplés, la Q^3 sera irréductible. Si T_4 en possédait 2 ou 3, on pourra réduire jusqu'à Q^2 et si elle avait 1 ou 0, on réduit jusqu'à l'homographie.

2. Les enchaînements sont caractérisés par une substitution quelconque entre 1, 2,...6. Soient p_1, p_2,...p_6 les nombres des points, qui sont intercalés dans les enchaînements et σ_1, σ_2, ... les cycles, dans lesquels les nombres 1, ... 6 se partagent, le tableau des transformations successives se termine pour des valeurs quelconques de p et σ. Mais afin que cette caractéristique soit constructible, il faut évidemment $p_1 + \ldots + p_{\omega_1} = p_{\omega_1+1} + \ldots + p_{\omega_2} = p_{\omega_2+1} + \ldots + p_{\omega_3} = \ldots\ldots$ Lorsque un seul enchaînement $b_i \ldots a_k$ existe, l'indice du tableau est 2 N, N étant le plus petit multiple des nombres d'intercalations dans ces enchaînements, dans tous les autres cas égal à ce dernier indice.

3. Reste $b_i^{m_i} = a_i$, m_i signifiant des valeurs quelconques. La transposition $(ab\, b'^2_i$ donne alors $\delta_1\,(a^3 b_i a_{i+1} \ldots)$ en $\delta'_1\,(a^3 b_i a_{i+2} \ldots)$, et $\varepsilon_2(a^4 b'_i\, b''_i\, b_1 \ldots b_6)$ en $\delta'_2\,(a^3 b''_i\, b_1 \ldots b_{i-1}\, b_{i+1} \ldots b_6)$, $b'_i \ldots a_i$ en b_i, donc aucun changement. L'indice dans ce tableau est 2 N, si N est le plus petit multiple des nombres $m_i + 1$. Afin que ces caracteristiques soien constructibles, il faut que m_i soit indépendants de i. Les transformations possibles cor-

respondent à $b_i^{(m)} = a_i$ $(i = 1, \ldots 6)$; $(a_1 b_1)$, $b_i^{(m)} = a_i (i = 2, \ldots 6)$; $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $b_i^{(m)} = a_i$ $(i = 3, \ldots 6)$. En voici les tableaux:

$$i = 2, \ldots 6, \varepsilon_\mu = \frac{1 + (-1)^{\mu+1}}{2}$$

Droite en	Droite en
. . . . .	. . . . .
$C_{3\mu+1}$ $b^{3\mu} b_i b'_i \ldots b_i^{\mu-1}$	$C_{\frac{5\mu}{2}+1+\varepsilon_\mu}$ $b^{\frac{5\mu}{2}+\varepsilon_\mu} b_i b'_i \ldots b_i^{\mu-1} b_1^{2\varepsilon\mu+1}$
. . . . .	. . . . .
C_{3m+4} $b^{3m+3} b_i b'_i \ldots b_i^{m-1} a_i$	$C_{\frac{5m}{2}+1+\varepsilon_m}$ $b^{\frac{5m}{2}+\varepsilon_\mu} b_i b'_i \ldots b_i^{m-1} a_i b_i^{2\varepsilon_m+1}$
. . . . .	. . . . .
$C_{3\mu+1}$ $b^{3\mu} b_i^{m-\mu+1} \ldots b_i^{(m-1)} a_i$	$C_{\frac{5\mu}{2}+1+\varepsilon_\mu}$ $b^{\frac{5\mu}{2}+\varepsilon_\mu} b_i^{m-\mu+1} \ldots b_i^{(m-1)} a_i$
. . . . .	. . . . .
Droite	Droite

$$i = 3, \ldots 6, \varepsilon_\mu = \frac{1 + (-1)^\mu}{2}$$

Droite en

. . . . . .

$C_{2(\mu+1)+\varepsilon_m}$ $b^{2\mu+1+\varepsilon_\mu} b_i b'_i \ldots b_i^{\mu-1} b_1^{\varepsilon_\mu+1} b_2^{\varepsilon_\mu+1}$

. . . . . .

$C_{2(m+1)+\varepsilon_\mu}$ $b^{2m+1+\varepsilon_\mu} b_i b'_i \ldots b_i^{m-1} a_i b_1^{\varepsilon_m+1} b_2^{\varepsilon_m-1}$

. . . . . .

$C_{2(\mu+1)+\varepsilon_\mu}$ $b^{2\mu+1+\varepsilon_\mu} b_i^{m-\mu+1} \ldots b_i^{m-1} a_i b_1^{\varepsilon_\mu+1} b_2^{\varepsilon_\mu+1}$

. . . . . .

Droite

L'indice de ces 3 tableaux est $2(m+1)$. Chaque droite par a porte une involution quadratique et le lieu des cycles $(m+1)$ ponctuels est une courbe resp. de l'ordre $3m+4$, $\frac{5m}{2} + 1 + \varepsilon_m$, $2m + 2 + \varepsilon_\mu$, passant deux fois de moins par a. Elle est tangente aux droites $ab_i, ab'_i, \ldots aa_i$ dans $b_i, b'_i, \ldots a_i$ et dans $(a_1 b_1)$ à aa_1 seulement.

§ 5. — Discussion des autres caractéristiques.

I. 1. b en a. $(aba_1)^2$, qui est toujours appliquable réduit à une transformation cubique, aussitôt que l'on a $(a_1 b_2)$, par $\delta_2(b^3 a b_2 b_3 b_4 b_5 b_6)$ en $\gamma'_2(B^2 B_3 B_5 B_4 B_6)$ et $\delta_1(a^3 a_1 a^2 a_4 a_5 a_6 b)$ en $\gamma'_1(A^2 A_3 A_4 A_5 A_6)$, $A^i B^i$ accouplés.

2. b en a, $(a_i b_i)$, $i = 1, \ldots 6$

Droite en		Droite	
C_4	$b^3\, b_i$	C_4	$b_i\, a^3$
C_{10}	$b^6\, b_i^3\, a^3$	C_{10}	$b^6\, b_i^3\, a^3$

C_{13} $b^6\, b_i^4\, a^6$

3. b en a, $(a_i b_i)$, b_6 en a_6 $i = 1, \ldots 5$.

Droite en		Droite	
C_4	$b^3\ b_i\ b_6$	C_4	$b_i\ a^3\ a_6$
C_{11}	$b^7\ b^4_6\, b_i^3\, a^3\ a_6$	C_{11}	$b^3\ b_6\ b_i^3\, a^7\ a^4_6$
C_{19}	$b^{11}\, b^7_6\, b_i^5\, a^7\ a^4_6$	C_{19}	$b^7\ b^4_6\, b_i^5\, a^{11}\, a^7_6$
C_{26}	$b^{14}\, b^8_6\, b_i^7\, a^{11}\, a^7_6$	C_{26}	$b^{11}\, b^7_6\, b_i^7\, a^{14}\, a_6^8$

C_{29} $b^{14}\, b^8_6\, b_i^8\, a^{14}\, a^8_6$

Ces deux caractéristiques sont toujours réductibles à $(a b_1)$, $(b a_1)$ au moyen de $(a\, b\, a_i)^2$.

4. b en a, $(a_i b_i)$, b_5 en a_5, b_6 en a_6 $i = 1, 2, 3, 4$.

Droite en							
C_4	3		1	1		1	
C_{12}	8	3	3	4	1	4	1
C_{25}	16	8	6	8	4	8	4
C_{44}	27	16	11	13	8	13	8
C_{63}	40	27	17	20	13	20	13
C_{97}	56	40	24	28	20	28	20
C_{132}	75	56	31	37	28	37	28
.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 5, . . .

5. b en a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 en a_i, b_5 en a_j, b_6 en a_h est apériodique à plus forte raison.

6. b en b' en a, $(a_1 b_i)$, $(a_2 b_j)$, $(a_3 b_k)$, $(a_4 b_l)$, $(a_5 b_m)$, $(a_6 b_n)$

Droite en									
C_4	3			1	1	1	1	1	1
C_{10}	6	3		3	3	3	3	3	3
C_{22}	12	6	3	7	7	7	7	7	7
C_{37}	18	12	6	12	12	12	12	12	12
C_{58}	27	18	12	19	19	19	19	19	19
C_{82}	36	27	18	27	27	27	27	27	27
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6. . . .

II. 1. $(a b_1)$, $(a_2 b_3)$ est toujours réductible par $(a a_2 b)^2$ à δ_2 $(b^3 b_1 b' b_3 b_4 b_5 b_6)$ en γ'_2 $(B^2 B_1 B_4 B_5 B_6)$ et à γ_1 $(a^2 a_2 a_4 a_5 a_6)$ en γ'_1 $(A^2 A_2 A_4 A_5 A_6)$, si b n'entre pas en coincidence. Pour $(a_1 b)$ on aura III. 1. et pour $(b a_4)$ réduction à Q^2.

2. $(a b_1)$, b en a_2 est réductible par $(a b a_2)^2$ à δ_2 $(b^3 a_2 b_1 b_3 b_4 b_5 b_6)$ en γ'_2 $(B^2 B_3 B_4 B_5 B_6)$ et à δ_1 $(a^3 b a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ en γ'_1 $(A^2 A_3 A_4 A_5 A_6)$, B en B_2, A_2 en A.

3. $(a b_1)$, b en a_1, $(a_2 b_i)$, $(a_3 b_j)$, $(a_4 b_k)$, $(a_5 b_l)$, $(a_6 b_m)$. Indice 10.

Droite en		Droite	
C_4	$b^3 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$	C_4	$b^3_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 a_1$
C_8	$b^5 b^3_1 b^2_2 b^2_3 b^2_4 b^2_5 b^2_6 a^3_1$	C_8	$b b^4_1 b^3_2 b^3_3 b^3_4 b^3_5 b^3_6 a_1$
C_{10}	$b^5 b^2_1 b^3_2 b^3_3 b^3_4 b^3_5 b^3_6 a^5_1$	C_{10}	$b b^3_1 b^4_2 b^4_3 b^4_4 b^4_5 b^4_6 a^3_1$
C_{14}	$b^6 b^3_1 b^5_2 b^5_3 b^5_4 b^5_5 b^5_6 a^5_1$	C_{14}	$b^3 b^5_1 b^5_2 b^5_3 b^5_4 b^5_5 b^5_6 a_1^6$

C_{17} $b^6 b^6_1 b^6_2 b^6_3 b^6_4 b^6_5 b^6_6 a^6_1$

4. Les caractéristiques, qui proviennent de 3. par la dissolution d'une coincidence sont toutes apériodiques.

5. $(a b_1)$, b en b' en a_2, $(a_1 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$

Droite en									
C_4	1	3			1	1	1	1	1
C_8	2	5	3		3	2	2	2	2
C_{15}	3	9	5	3	6	4	4	4	4
C_{26}	6	14	9	5	9	8	8	8	8
C_{40}	11	20	14	9	15	12	12	12	12
C_{55}	14	26	20	14	20	17	17	17	17
C_{76}	21	35	26	20	24	21	21	21	21
C_{113}	31	58	35	26	34	34	34	34	34
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

6. $(a b_1)$, b en b' en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$ est réductible par $(a a_3 b)^2$ à une Q^3 avec la caractéristique b_1 en b'_1 en a, b en b' en a_1, $(a_2 b_i)$, $(a_3 b_k)$, $(a_4 b_l)$, qui a un tableau illimité d'après Tr. c. § 7.

III. 1. $(a b_1)$, $(b a_2)$ est toujours réductible par $(a a_2 a_3)^2$ à γ_2 $(b^2 b_1 b_4 b_5 b_6)$ en γ'_2 $(B^2 B_1 B_4 B_5 B_6)$ et à δ_1 $(a^3 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a'_3)$ en γ'_1 $(A^2 A_4 A_5 A_6 A'_3)$, si a_3 n'entre pas en coincidence.

2. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$. Indice 6.

Droite en		Droite	
C_4	$b^3 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$	C_4	$b b_1^3 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$
C_5	$b^2 b^2_2 b^2_3 b^2_4 b^2_5 b^2_6$	C_5	$b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_6^2$

C_8 $b^3 b^3_1 b^3_2 b^3_3 b^3_4 b^3_5 b^3_6$

3. $(a\,b_1)$, $(b\,a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, b_6 en a_6 Indice 10.

Droite en								Droite							
C_4	b^3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	C_4	b	b^3_1	b_2	b_3	b_4	b_5	a_6
C_6	b^3		b^2_2	b^2_3	b^2_4	b^2_5	b^3_6 a_6	C_6		b^3_1	b^2_2	b^2_3	b^2_4	b^2_5	b_6 a^3_6
C_{12}	b^6	b^3_1	b^4_2	b^4_3	b^4_4	b^4_5	b^5_6 a^3_6	C_{12}	b^3	b^6_1	b^4_2	b^4_3	b^4_4	b^4_5	b^3_6 a^5_6
C_{14}	b^5	b^3_1	b^5_2	b^5_3	b^5_4	b^5_5	b^6_6 a^5_6	C_{14}	b^3	b^5_1	b^5_2	b^5_3	b^5_4	b^5_5	b^5_6 a^6_6

C_{17} b^6 b^6_1 b^6_2 b^6_3 b^6_4 b^6_5 b^6_6 a^6_6

4. $(a\,b_1)$, $(b\,a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, b_6 en b'_6 en a_6

Droite en

C_4	1	3	1	1	1	1	1		
C_6		3	2	2	2	2	3	1	
C_{13}	3	7	4	4	4	4	6	3	1
C_{19}	3	9	6	6	6	6	9	6	3
C_{31}	7	15	10	10	10	10	13	9	6
C_{42}	9	18	14	14	14	14	18	13	9
C_{58}	15	25	19	19	19	19	24	18	13
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

5 , 1 , 6 , 1 , 5 , 1 , 6 , 1 , . . .

5. $(a\,b_1)$, $(b\,a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, b_5 en a_5, b_6 en a_6

Droite en

C_4	1	3	1	1	1	1		1	
C_7		4	2	2	2	3	1	3	1
C_{16}	3	9	5	5	5	6	3	6	3
C_{25}	4	12	8	8	8	10	6	10	6
C_{40}	9	19	13	13	13	15	10	15	10
C_{55}	12	24	18	18	18	21	15	21	15
C_{76}	19	33	25	25	25	28	21	28	21
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

6 , 0 , 6 , 0 , 6 , 0 , 6 , . . .

IV. 1. b_1 en a, b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$

Droite en

C_4	1		3		1	1	1	1	1
C_{11}	4	1	7	3	3	3	3	3	3
C_{23}	7	4	13	7	7	7	7	7	7
C_{38}	12	7	19	13	12	12	12	12	12
C_{68}	18	12	27	19	19	19	19	19	19
C_{82}	27	18	36	27	27	27	27	27	27
C_{112}	37	27	48	36	37	37	37	37	38
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Les dernières différences des ordres sont

4, 5, 3, 5, 4, 6, 4, 5, 3, 5, 4, 7, 4, 5, 3, ...

2. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$

Droite en

C_4	1		3		1	1	1	1	1
C_{11}	3	1	7	3	3	3	3	3	3
C_{22}	6	3	12	7	7	7	7	7	7
C_{37}	12	6	18	12	12	12	12	12	12
C_{58}	19	12	27	18	19	19	19	19	19
C_{83}	27	19	37	27	27	27	27	27	27
C_{112}	36	27	48	37	37	37	37	37	37
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$

Droite en

C_4	1		3		1	1	1	1	1
C_{11}	3	1	7	3	3	4	3	3	3
C_{22}	7	3	12	7	6	7	7	7	7
C_{38}	13	7	19	12	12	12	12	12	12
C_{59}	19	13	28	19	19	19	19	19	19
C_{83}	27	19	37	28	27	27	27	27	27
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

4. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_2), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$

Droite en									
C_4	1		3	1	1	1	1	1	1
C_{11}	3	1	7	3	3	3	4	3	3
C_{22}	7	3	12	7	7	6	7	7	7
C_{38}	12	7	19	12	13	12	12	12	12
C_{58}	18	12	27	19	19	19	19	19	19
C_{32}	27	18	36	27	27	27	27	27	27
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

5. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_5)$, $(a_5 b_2)$, $(a_6 b_6)$ et

6. b_1 en a, b en a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_4)$, $(a_4 b_5)$, $(a_5 b_6)$, $(a_6 b_2)$ donnent de même des tableaux apériodiques.

CONCLUSION

Les seules caractéristiques biquadratiques, non réductibles à des Q^3, Q^2 ou à des homographies, sont

1. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, $(e_1 \delta_3)$ — Indice 3.
2. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, δ_3 en e_1 — Indice 6.
3. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, δ_3 en δ'_3 en e_1 — Indice 12.
4. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, ε_1 en d_3, δ_3 en e_1 — Indice 9.
5. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_1 — Indice 9.
6. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_2 d_1)$, $(e_3 \varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en e_1 — Indice 8.
7. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$ — Indice 6.
8. $(a b_1)$, $(b a_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, b_6 en a_6 — Indice 10.

§ 6. Construction des caractéristiques biquadratiques.

I. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_3)$, $(e_3 \delta_1)$, $(e_1 \delta_2)$, Indice 3. Un ∞^3 système linéaire anallagmatique de cubiques doit exister. Il n'y a pas d'alinéation entre les points d et δ. Les six points doubles impropres demandent, que T_4 n'en possède nul autre ou une infinité. Les triples de droites $d_1 e_2$, $d_3 e_1$, $d_2 e_3$; $d_1 e_3$, $d_3 e_2$, $d_2 e_1$; $d_1 e_1$, $d_2 e_2$, $d_3 e_3$ sont des courbes anallagmatiques et il y a donc une quatrième, qui ne pouvant pas être décomposée, est propre. Or on démontrera plus tard, que $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ anallagmatique est impossible, donc il faut, qu'elle possède un point invariable. La correspondance doit donc être de l'espèce $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ et il sera démontré plus tard qu'aucun des 3 points

doubles ne pourra coincider avec un point de la caractéristique. Il s'ensuit, qu'une infinité de points doubles doit exister, remplissant une cubique C_k et en outre, que:

Les trois triples $d_1 e_i$, $d_2 e_{i+1}$ $d_3 e_{i+2}$ *se coupent en trois points doubles de la transformation, qui appartiennent à* C_k. *Les triangles* $d_1 d_2 d_3$, $e_1 e_2 e_3$ *sont trois fois homologiques.*

La courbe C_k est tout arbitraire. Comme C_k est remplie de points doubles il s'ensuit que $e_1 e_2$, $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \varepsilon_1$ sont tangentes à C_k resp. dans e_1, e_2, e_3, ε_1, ε_2, ε_3. Elles forment sur C_k deux triples tangentiels. En outre: Les coniques $d_1 d_2 d_3 e_1 e_2$, $d_1 d_2 d_3 e_2 e_3$, $d_1 d_2 d_3 e_3 e_1$ touchent C_k en e_2, e_3, e_1. Cela donne aussi le théorème:

Etant proposés deux triples tangentiels de la même série sur une C_k, *les droites qui vont d'un de ces points aux points du second triple forment avec la tangente dans ce point un quadruple équianharmonique* *).

La transformation possède un réseau de cubiques équianharmoniques anallagmatiques C_e, qui contient aussi les trois triples mentionnés de droites. Car chaque paire de points dans C_k détermine un faisceau anallagmatique, dont la seconde courbe anallagmatique doit avoir $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$.

$u' - u \equiv \gamma$ donne $d_1 + u_1 + u_2 \equiv 0$, $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + d_1 + d_2 + u'_1 + u'_2 \equiv 0$ et de la $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + d_2 + 2\gamma \equiv 0$, et ensuite $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3$ et de même $\delta_1 \equiv \delta_2 \equiv \delta_3$. Une transposition produirait la même caractéristique avec des alinéations, chose inadmissible.

$u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ donne $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + d_3 - \varepsilon d_1 + 2\gamma \equiv 0$ et de là $d_3 - \varepsilon d_1 \equiv d_2 - \varepsilon d_3 \equiv d_1 - \varepsilon d_2$ ou $d_2 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_3 \equiv 0$ et de même $\delta_2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_3 \equiv 0$. Ensuite $\varepsilon d_3 + \varepsilon (d_1 + d_2) \equiv \gamma$ ou $-\varepsilon^2 d_2 + \varepsilon d_1 \equiv \gamma$ et $-\varepsilon^2 d_3 + \varepsilon d_2 \equiv \gamma$, $-\varepsilon^2 d_3 + \varepsilon d_3 \equiv \gamma$; un point d et la valeur de γ sont arbitraires, de là on détermine les autres points d et les δ_i. La condition existe $d_1 - \delta_1 \equiv \varepsilon (d_2 - \delta_2) \equiv \varepsilon^2 (d_3 - \delta_3)$.

Déjà dans le § 12. II. p. se trouve démontré, que la seule condition, pour que les triples $d_1 d_2 d_3$, $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ composent notre caractéristique est que $d_1 d_2 d_3$, $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ soient trois fois homologiques.

Deux triples dans C_e, qui satisfont à la condition $d_1 + \varepsilon d_2 + \varepsilon^2 d_3 \equiv 0$ et de manière que $d_1 - \delta_1 \equiv \varepsilon (d_2 - \delta_2) \equiv \varepsilon^2 (d_3 - \delta_3)$, sont trois fois homologiques. Les trois centres et les six points $d_i \delta_i$ déterminent une courbe C_3, qui coupe C_e dans un triple, qui est conjugué à soi-même par rapport au triangle Hessien de C_e.

2. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_3)$, $(e_3 \delta_1)$, δ_2 en e_1.

Une énumération au tableau démontre d'abord, qu'une alinéation ne peut point avoir lieu. Les cubiques anallagmatiques ne peuvent être droite et conique non plus. Mais on démontre, comme au n. 1, $u' - u \equiv \gamma$ imcompatible avec $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$ et *que* $(e_2 \delta_3)$, $(e_3 \delta_2)$ *entraîne dans* $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ *ou dans* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ *ou dans* $A u' + B u + C \equiv 0$ *d'une* C_3^3 *la troisième coincidence* $(e_1 \delta_3)$.

3. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, δ_3 en δ'_3 en e_1 s'écarte tout d'un coup avec 2.

4. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, δ_2 en e_3, δ_3 en e_1. En premier lieu le tableau démon-

*) Prenant une conique par $d_1 d_2 d_3$ et un point e_1 dans elle, et faisant varier e_2 sur la tangente de la conique dans e_1, le point e_3 qui doit achever le triple $e_1 e_2 e_3$ trois fois homologiques à $d_1 d_2 d_3$ est lié à e_2 par une affinité quadratique de l'espèce II. § 31. III. qui a e_1 comme point double et varie donc dans une conique par $d_1 d_2 d_3 e_1$. Pour la position exigée par la caractéristique n. 1 il est donc nécessaire, que les deux coniques coincident, savoir que la direction de $e_1 e_2$ dans e_1 soit une des deux directions doubles pour le triple projectif $e_1 (d_1 d_2 d_3)$, ce qui est exprimé par notre théorème.

tre qu'une alinéation n'aura pas lieu ici. Ensuite la transformation posséderait deux points doubles propres, dont l'un le 9ième pivot du faisceau. Si l'indice du faisceau était 3, il aurait toutes les courbes équianharmoniques et partant 6 C_3^3. Si une C_3^3 reste invariable, ni les points doubles, ni les autres C_3^3 permettent une distribution satisfaisante. Si l'indice 9, les courbes rationnelles, que le faisceau devrait posséder outre la C_3^3 invariable, feraient une contradiction. Il faut conclure, que la caractéristique n'existe pas en réalité.

5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, ε_1 en d_3, δ_3 en e_1.

Il y a deux points doubles propres, il n'y a pas d'alinéation et comme précédemment on observe, que ni l'indice 3, ni l'indice 9 n'est compatible avec la nature des cubiques anallagmatiques. La caractéristique n'existe pas.

6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en e_1. Indice 8. La transformation interne involutive étant du degré 17 et irréductible, on en conclut de suite, que l'indice du faisceau ne pouvait être que 4 ou 2. Pour 2 les cubiques seraient harmoniques. Par une discussion pénible on conclut, que les courbes rationnelles nécessaires à la réduction du faisceau jusqu'à ce caractère sont incompatibles avec la caractéristique.

Donc l'indice est 4. Puisque le nombre des points doubles propres est 3, les seules suppositions encore à discuter seront deux C_3^3 ou deux C_k anallagmatiques avec $u'+iu\equiv\gamma$. Ce dernier cas demanderait $\delta_1+\delta_2+\delta_3+id_1+d_3+2\gamma\equiv 0$, et de là $id_1+d_3 \equiv id_2+d_1\equiv id_3+d_2$, d'où l'on tire $d_1\equiv d_2\equiv d_3$.

Reste donc le cas de deux C_3^3 anallagmatiques. Mais alors une question est suggérée qui est difficile á décider. Faut-il que toutes les cubiques du faisceau soient équianharmoniques? Les deux C_3^3 absorbent deux C_e et les deux autres C_e sont incompatibles avec l'indice 4. Il faudrait donc, ou que les cubiques soient toutes équianharmoniques, ou que les deux C_e restantes se confondent encore avec les deux C_3^3 invariables. Si aucun de ces cas n'est pas un cas particulier de l'autre, la transformation qui est répétition de B_{24} décidera la question dans le premier sens.

Toutefois on pourra se servir de la conclusion suivante, pour évaluer le nombre des quadruples impropres fourni par la caractéristique. On peut assérir, qu'il est le même pour tous les arrangements géométriques. Or nous en connaissons un, où ce nombre est si grand qu'un seul quadruple propre reste encore. Cela doit valoir toujours. Les courbes rationnelles composent par leurs points doubles des quadruples. S'il y en avait 8, on aurait deux quadruples, donc leur nombre ne peut pas surpasser 4 et il faut, qu'elles soient 4 C_3^3. Leurs rebroussements établissent le quadruple et *toutes les courbes sont équianharmoniques.*

Le quadruple doit forcément exister et la supposition, que les courbes rationnelles coincident toutes avec les deux C_3^3 fixes, s'écarte.

7. b en a, $(a_i b_i)$ est impossible, parceque la conique directive des deux faisceaux a, b devrait se partager en ab et une droite par tous les points a_i qui rencontrerait la courbe fondamentale de a, b en 6 points.

8. (ab_1), (ba_1), $(a_i b_i)$ $i=2, \ldots 6$. La conique directive de a, b devrait se partager en ab et une droite par les a_i. Donc 5 points simples seraient alignés.

9. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), b_6 en a_6. La conique directive devrait se partager en ab et une droite par a_2, a_3, a_4, a_5, qui de sa part entraînerait l'ap-

proche infinie de $a_1 a_6$ à a et de $b_1 b_6$ à b. Cela donne contradiction à la caractéristique.

10. (ab_1), b en a_1, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$, s'écarte comme auparavant.

CONCLUSION

Les seules caractéristiques, biquadratiques irréductibles, auxquelles des transformations du plan correspondent, sont

1. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(d_3 \varepsilon_1)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \delta_2)$, $(e_1 \delta_3)$	Indice 3.	Δ_3.
2. $(d_1 \varepsilon_2)$, $(d_2 \varepsilon_3)$, $(e_2 \delta_1)$, $(e_3 \varepsilon_1)$, δ_3 en d_3, δ_2 en e_1	Indice 8.	Δ_8.

LA QUATRIÈME PARTIE DE CE MÉMOIRE PARAÎTRA PROCHAINEMENT.

Table des Matières

Ière Partie: *Homographies périodiques.*

§ 1. Caractères. Espèces . . . . . *page* 1
§ 2. Courbes, qui sont transformées en soi-mêmes par une transformation linéaire . . » 3
§ 3. Homographies, qui peuvent transformer une cubique en soi-même . . . . . » 5
§ 4. Faisceaux de courbes transformés en soi-mêmes. . . . . » 9
§ 5. Une classe remarquable de transformations un-multivoques. . . . . » 11

IIème Partie: *Transformations quadratiques périodiques.*

§ 1. Caractères généraux. Premier principe pour la discussion . . . . . » 13
§ 2. Le cas a' en a, b' en b, c' en c. . . . . » 15
§ 3. Application du principe de l'enchaînement des points fondamentaux et du principe des transformations successives . . . . . » 30
§ 4. Recherche complète des transformations quadratiques, qui transforment une cubique du genre 1 en soi-même . . . . . » 43
§ 5. Transformations quadratiques, qui reproduisent une cubique rationnelle . . . . » 54
§ 6. Transformations quadratiques, qui reproduisent une conique . . . . . » 56
§ 7. Sur une classe de transformations quadratiques (apériodiques) avec des points principaux enchaînés . . . . . » 57
§ 8. Faisceaux anallagmatiques de cubiques dans une transformation quadratique . . . » 61
§ 9. Sur la construction des caractéristiques 1, 2, 3, 4 du § 3 . . . . . » 65
§ 10. Dépendance des caractéristiques 1, 2, 3, 4 des courbes du 3ième degré . . . . . » 68
§ 11. Les caractéristiques qui sont dérivées de a' en a, b' en c, c' en b par des intercalations. . . . . » 79
§ 12. La caractéristique a' en b, b' en c, c' en a . . . . . » 87
§ 13. La caractéristique a' en b, b' en b'_1 en c, c' en c'_1 en a. . . . . » 92
§ 14. La caractéristique illusoire a' en b, b' en c, c' en c'_1 en c'_2 en a. . . . . » 93
§ 15. La transposition. Application aux transformations des §§ 10 à 13. . . . . » 94
§ 16. Quatre classes de transformations périodiques . . . . . » 96
§ 17. Application des principes de l'enchaînement des points fondamentaux et des transformations successives . . . . . » 105
§ 18. Les transformations périodiques isolées, douées de (ab'), c' en c'_1 . . . en c. . . . » 111
§ 19. La transformation (ab'), a' en c, c' en c'_1 en b . . . . . » 118
§ 20. La transformation (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en b . . . . . » 122
§ 21. La transformation (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en b . . . . . » 125
§ 22. La transformation (ab'), a' en a'_1 en c, c' en c'_1 en c'_2 en b . . . . . » 126
§ 23. La transformation (ab'), a' en c, c' en c'_1 en c'_2 en c_3 en b. . . . . » 127
§ 24. Les transformations (cc'), (ab'), a' en a'_1 en a'_2 . . . en $a'_m = b$. . . . . » 128
§ 25. Les caractéristiques (ab'), (bc'), a' en a'_1 en . . . $a'_m = c$ . . . . . » 133

§ 26. La transformation (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en c. . . . . *page* 139
§ 27. La transformation (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en c. . . . . » 146
§ 28. La transformation (ab'), (bc'), a' en a'_1 en a'_2 en a'_3 en a'_4 en c . . . . . » 148
§ 29. Construction des transformations (ab'), (bc'), a' en a'_1 en . . . $a'_m = c$ moyennant les réseaux de transformations quadratiques . . . . . » 150
§ 30. Les transformations (aa'), (bb'), c' en c'_1 . . . en $c'_m = c$ et (ab'), (ba'), c' en c'_1 . . . . . en $c'_m = c$ . . . . . » 153
§ 31. Les transformations à trois coincidences de points principaux . . . . . » 156
§ 32. Transformations périodiques avec des incidences entre des points principaux et des droites principales. . . . . » 159
§ 33. Transformations périodiques aux triples principaux 2 ou 1 ponctuels . . . . . » 162
§ 34. Détermination des transformations, qui possèdent une C_3^3 anallagmatique. . . . » 164
§ 35. Les types. Résumés comparatifs . . . . . » 171

IIIième Partie: *Transformations périodiques cubiques et biquadratiques.*
A) Transformations cubiques . . . . . » 177
§ 1. Généralités . . . . . » ivi
§ 2. Dénombrement des transformations cubiques, qui sont répétitions d'une transformation quadratique . . . . . » 179
§ 3. Les deux points doubles coincident . . . . . » 182
§ 4. Les deux points doubles sont enchaînés . . . . . » 185
§ 5. Un point double et un point simple coincident . . . . . » 193
§ 6. Tous les deux points doubles sont coincidents avec des points simples . . . . . » 203
§ 7. Tous les deux points doubles sont enchaînés avec des points simples. . . . . » 207
§ 8. Les classes équivalentes des formes non réductibles à des Q^2 . . . . . » 217
§ 9. Construction et étude des transformations périodiques cubiques . . . . . » 219
B) Transformations périodiques biquadratiques. . . . . » 233
§ 1. Généralités . . . . . » ivi
§ 2. Dénombrement de toutes les T_4, qui sort répétitions de caractéristiques quadratiques ou cubiques périodiques . . . . . » 235
§ 3. Discussion des caractéristiques . . . . . » 236
§ 4. Seconde Forme. Les deux points triples coincident. . . . . » 253
§ 5. Discussion des autres caractéristiques . . . . . » 254

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NUOVE RICERCHE SULLE FORME CRISTALLINE DEI PARATARTRATI ACIDI DI AMMONIO E DI POTASSIO

MEMORIA

del Socio Ordinario ARCANGELO SCACCHI

Letta nell'Adunanza del dì 8 Marzo 1884

Nel 1864 ho presentato a quest'Accademia una memoria sul polimorfismo, e sull'altro fenomeno che sin dal 1862 ho distinto col nome di polisimmetria dei cristalli [1]). Tra gli altri esperimenti che vi si trovano esposti in sostegno della mia tesi sono notevoli quelli eseguiti con i paratartrati acidi sia di ammonio sia di potassio, e con i levo e destro tartrati acidi delle medesime basi. Descritte le forme cristalline dei paratartrati acidi, che sono riferibili al sistema monoclino, e quelle dei tartrati acidi che sono trimetriche ortogonali, per gli esperimenti eseguiti si giunge a questo risultamento, che immergendo nelle soluzioni *sature* dei tartrati un cristallo di paratartrato che ha la stessa base, le sue parti esterne si disciolgono, e su di esso vanno a depositarsi minuti cristalli del tartrato, discosti gli uni dagli altri, e tutti allogati con le faccette della medesima specie tra loro parallele, e con i loro piani di sfaldatura paralleli ai piani di sfaldatura del cristallo di paratartrato immerso, come se si fossero depositati sopra un cristallo d'identica forma e della stessa composizione chimica. Progredendo l'ingrandimento dei cristallini del tartrato, ed il continuo disciogliersi del cristallo di paratartrato immerso, succede, per il parallelismo delle faccette della medesima specie dei cristallini del tartrato, che questi si congiungono sino a comporre un solo cristallo, nell'interno del quale è racchiuso un rudero del cristallo del paratartrato, se questo era tanto grande da non disciogliersi completamente nel tempo richiesto alla completa unione dei cristallini del tartrato. Per converso se nelle soluzioni *sature* dei paratartrati acidi s'immerge un cristallo di tartrato acido della medesima base, succede, che con gli stessi particolari i cristallini del paratartrato disciolto si depositano sul cristallo del tartrato immerso mentre questo si discioglie. Altrettanto avviene tra i cristalli dei levotartrati e quelli dei destrotartrati [2]).

[1]) *Atti della R. Accademia delle Scienze Fis. e Matem. di Napoli.* Vol. II, 1865.—*Rendiconto della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli.* Fasc. I, Maggio 1862.

[2]) Oltre questi fatti principali che ho qui compendiati sulle relazioni tra i cristalli dei tartrati acidi alcalini e quelli dei paratartrati acidi delle medesime basi, si trovano nella citata memoria molti altri particolari degni di nota riguardanti lo stesso argomento e che non occorre qui ricordare. Nondimeno a chi non potrà riscontrare la medesima memoria interesserà conoscere la legge maravigliosa con la quale i cristallini monoclini dei paratartrati acidi sono dispo-

Egli è poi manifesto che non avrei potuto eseguire i riferiti esperimenti se con le accortezze suggerite da una ben diretta pratica non fossi riuscito ad ottenere i cristalli dei paratartrati acidi alcalini di notevole grandezza, e son lieto potervi presentare non pochi splendidi cristalli di paratartrato acido ammonico come quelli che hanno servito alle mie ricerche.

Intanto nelle più recenti opere di chimica che sono a mia notizia, discorrendosi dei paratartrati acidi alcalini, non si dice altro se non che essi si hanno in forma di polvere cristallina; ed è pure notevole che nella recente ed accurata opera di Rammelsberg sulla Chimica cristallografica e fisica [1]), ove sono riportate non poche specie di tartrati e paratartrati da me per la prima volta descritte, non sono menzionati i cristalli dei paratartrati acidi alcalini; probabilmente perchè l' Illustre Autore non ha creduto poter trovare la descrizione di novelle specie cristalline in una memoria che aveva lo scopo di esporre una teoria cristallografica.

Ma l'oggetto della presente memoria non è di far rivivere la conoscenza dei cristalli dei paratartrati acidi alcalini minutamente descritti sin dal 1864. Mi ha dato occasione di ritornare su questo argomento una recentissima comunicazione dell' amico G. Wyrouboff fatta alla Società mineralogica di Francia sulle forme cristalline di alquanti tartrati [2]) nella quale si descrivono i paratartrati acidi di ammonio e di potassio riportandosi i loro cristalli al sistema triclino, mentre io li aveva trovati monoclini. Il

sti sopra i cristalli ortogonali dei tartrati acidi. Facendo attenzione alle figure 1ª e 4ª, la prima delle quali rappresenta un cristallo ortotrimetrico di destrotartrato e la seconda un cristallo monoclino di paratartrato, si scorge che mentre nella prima, per i caratteri geometrici del sistema al quale appartiene il cristallo figurato, la metà inferiore è del tutto simile alla superiore, nella seconda, per la stessa ragione, avviene il contrario. Quindi quando i cristallini della figura 4ª s' impiantano sul cristallo della figura 1ª con le loro faccette *A* e *C* parallele alle facce *A* e *C* del tartrato non vi può essere alcuna ragione perchè i medesimi cristallini si dovessero disporre tutti con le faccette *h* allogate sia superiormente, sia al contrario inferiormente. E quando il costante allogarsi delle faccette *h* venisse a mancare, non riuscirebbero più tra loro parallele le faccette d' identica specie dei cristallini del paratartrato. Il fatto mi ha mostrato risoluta la quistione in modo inaspettato; dappoichè nei novelli cristallini vi sono due condizioni che non era possibile prevedere. La prima è che essi sono senza eccezione tutti gemini col piano di geminazione parallelo ad *A*, la seconda che nei cristallini geminati per *A* le faccette *h*, facendo da una parte angolo diedro rientrante, e dalla parte opposta angolo prominente, essi sono sempre impiantati con la parte che corrisponde all' angolo rientrante, che per conseguenza è rivolto verso il centro del cristallo immerso. In guisa che quando tutti i cristallini, progredendo il loro ingrandimento finiscono col congiungersi insieme assumendo l' aspetto di un solo cristallo, questo risulta costituito da quattro cristalli monoclini con i caratteri di un cristallo ortotrimetrico, siccome si scorge nella figura 7ª *a*, *b* che in due posizioni diverse rappresenta il risultamento finale dei cristalli gemini del paratartrato acido potassico depositati sulle facce del tartrato acido, quando essi col progressivo ingrandimento si sono riuniti sino a formare un solo cristallo apparentemente semplice. Nella figura 7ª *b* le facce *h'* ed *h''*, che corrispondono alle facce *h* e *h'* della figura 6ª, si toccano, mentre nella figura 6ª sono separate interponendosi l'angolo diedro rientrante formato dalle facce *B'*, *B''*; e di questo congiungimento delle facce *h* si farà parola in seguito discorrendo dei cristalli trigemini di paratartrato acido ammonico.

Apparisce per sè evidente la importanza di questo fatto il quale ci dimostra la sorprendente azione dei cristalli ortogonali dei tartrati sul primo congiungersi delle molecole dei cristallini monoclini dei paratartrati, azione tale che li costringe a divenire gemini e ad impiantarsi con la parte ove le faccette *h* s'incontrano con angolo rientrante rivolta verso il centro del cristallo. Succede quindi come dovrebbe succedere se i cristalli ortogonali, o meglio ogni particella dei cristalli ortogonali fosse costituita da quattro cristallini elementari monoclini allogati con gli angoli diedri rientranti formati dalle faccette *h* verso il centro. La medesima cosa ho dimostrato avvenire per i cristallini triclini di albite che s'impiantano sopra i cristalli monoclini di ortoclasia: che cioè il cristallo monoclino di ortoclasia obbliga i cristallini triclini di albite a prendere una determinata posizione rispetto alla sua forma monoclina, *come se esso fosse formato da un gruppo quadrigemino di cristalli triclini* (o per dir meglio come se ogni sua particella fosse costituita da un gruppo quadrigemino di quattro cristallini elementari triclini) *al quale vanno a congiungersi per geminazione con l' asse di rivoluzione perpendicolare alla faccia* C *i cristallini di albite* (Note mineralogiche, Memoria 1ª Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Vol. V, Marzo 1870).

[1]) *Handbuch der krystallographisch-physikalischen Chemie.* Leipzig, 1882.

[2]) *Recherches cristallographiques sur quelques nouveaux tartrates, par* M. G. Wyrouboff. *Bulletin de la Société minéralogique de France.* Décembre 1883.

Wyrouboff consultando un' altra mia memoria sulla efficacia delle soluzioni dei tartrati a rendere emiedrici i cristalli dei paratartrati che in esse s'ingrandiscono, presentata a questa Accademia nel 1866 [1]) ha trovato la notizia che erano stati da me descritti i cristalli dei medesimi paratartrati acidi riferiti al sistema monoclino diversamente da ciò che egli aveva osservato. Quindi sul punto di pubblicare la comunicazione da lui fatta alla Società mineralogica di Francia mi ha scritto (30 Dicembre 1883) facendomi premura di avere la mia precedente memoria non trovata nella sua raccolta delle mie pubblicazioni. Come meglio ho potuto ho soddisfatto al desiderio dell' amico; ma credo la mia memoria gli sia giunta un po' tardi, e non so quale sia stato il suo giudizio nel leggerla.

Da parte mia ho creduto che nessuno di noi si sia ingannato nel definire il sistema al quale abbiamo riferito i cristalli esaminati. Lo stesso Wyrouboff ha fatto notare che l' aspetto dei suoi cristalli è tale che di leggieri si reputerebbero monoclini, e che nondimeno egli ha ritenuto essere triclini per diverse ragioni, tra le quali avvene una, al certo decisiva, derivante dai cristalli gemini che hanno le facce parallele ai piani di sfaldatura congiunte con angolo rientrante. Questi cristalli gemini sono rappresentati dalla figura 13 nella quale il piano di geminazione corrisponde alla faccia h^1, e se i cristalli fossero monoclini, le faccette g^1 farebbero angolo retto col piano di geminazione e si troverebbero unite per dritto, mentre al contrario formano angolo rientrante di 173° 46′ nel sale potassico. Ancor io avendo avuto alcuni dei miei cristalli uniti per geminazione, come quello rappresentato dalla figura 6, non ho mai trovato in essi le facce C parallele al piano di più nitida sfaldatura che dovrebbero troncare gli spigoli $r''r$. Quindi avuto conoscenza della memoria del lodato Autore, ho esaminato con maggior cura i miei cristalli gemini, e spezzati alcuni di essi nel senso della medesima sfaldatura, ho trovato coincidere esattamente nel medesimo piano le nitidissime superficie di sfaldatura dei due cristalli.

Per queste ragioni non potendosi dubitare che vanno riferiti a diversi sistemi i cristalli da ciascuno di noi ottenuti, resta ad investigare la cagione di tale differenza.

I paratartrati acidi alcalini sono poco solubili nell' acqua, e non dubito essere stata questa la ragione per la quale non si è facilmente riuscito ad averli cristallizzati. Secondo gli esperimenti che si trovano descritti nella citata memoria il paratartrato acido potassico alla temperatura di 15° è solubile in 236 parti di acqua, ed alla temperatura di 28° in 142 parti; la specie ammoniacale a 15° si solve in 154 parti di acqua ed a 28° in 92 parti. Egli è però che le loro soluzioni abbandonate alla spontanea evaporazione non possono cominciare a dare minuti cristalli se non trascorsi alquanti giorni, e l' ingrandimento dei primi cristallini non può procedere che con molta lentezza. Conseguenza di questa lentezza è poi che le soluzioni, specialmente nella stagione estiva, si corrompono, ed in luogo dei cristalli germogliano le muffe. Quindi non credo fare cosa inopportuna se mi trattengo alquanto ad esporre il metodo usato per avere nitidi e grandi cristalli sia dei medesimi paratartrati acidi, sia in generale delle sostanze poco solubili.

Fatta abbondante soluzione bollente dei paratartrati acidi, sarà agevole dopo qualche saggio portarla a tale stato di concentrazione che col raffreddamento si ottengano

[1]) *Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli.* Vol. III, 1866-68.

piccoli cristalli di circa un millimetro di diametro. Quando la soluzione sarà rimasta almeno per un giorno alla temperatura dell'ambiente, essa si troverà in tale stato di saturazione che alla medesima temperatura non potrà depositare novelli cristalli se non è maggiormente concentrata, nè potrà disciogliere i cristalli che in essa si trovassero immersi. Allora si decanta in ampio cristallizzatoio e si concentra riscaldandola a circa 60°. Spesso succede che le soluzioni bollenti col raffreddarsi si ricuoprono di polvere cristallina ch'è difficile impedire che sia trasportata nel cristallizzatoio quando esse sono decantate; e volendo evitare questo inconveniente, il quale potrebbe impedire che nelle seguenti operazioni si avessero cristalli isolati, si farà il tramutamento del liquore puro aspirandolo con cannello di vetro. Nella soluzione decantata ed ancor calda s'immergeranno alquanti dei cristalli depositati col precedente raffreddamento, e si cuoprirà il cristallizzatoio con carta sugante a più doppii alla quale si sovrapporrà una lastra di vetro. In tal guisa si otterrà che la soluzione non si cuoprirà di polvere cristallina per la evaporazione e per il raffreddamento cagionato dall'aria ambiente, nè sarà disturbata dalle goccioline di acqua che si addensano sotto la lastra di vetro e che cadrebbero nella stessa soluzione se non vi fosse interposta la carta sugante. Il dì seguente nei cristallini immersi l'ingrandimento non sarà riconoscibile, e per promuovere l'ulteriore ingrandimento, occorrerà agevolare l'evaporazione tenendo il cristallizzatoio chiuso. Ciò si ottiene riscaldando a brevi intervalli di tempo la soluzione a circa 60°, curando di togliere dalla lastra l'acqua sotto di essa raccolta per il raffreddamento precedente. Così operando, l'evaporazione ed il conseguente ingrandimento dei cristalli avviene più sollecito di quel che si otterrebbe con la evaporazione spontanea in cristallizzatoio aperto, e la temperatura spesso rinnovata a 60° non permetterà che si generino le muffe. L'esperienza insegnerà qual sia, secondo i diversi casi, lo spazio di tempo più conveniente che dovrà intercedere tra un riscaldamento della soluzione e l'altro seguente. Esposto il metodo che convien seguire per ottenere nitidi cristalli di grandezza più che sufficiente a definire la loro forma, trattandosi di sostanze poco solubili, seguendo le stesse norme, e variando il tempo interposto tra due riscaldamenti successivi, e la temperatura dello stesso riscaldamento, si potranno avere cristallizzazioni più o meno rapide. La qual cosa tornerà vantaggiosa quando si vogliono esaminare le diverse varietà di forme, che prendono i cristalli, in condizioni diverse.

Prima di occuparmi ad investigare la cagione del perchè i cristalli dei paratartrati acidi alcalini riescono nei diversi casi ora monoclini ed ora triclini, ho voluto esaminare se qualche relazione vi fosse tra le forme cristalline descritte nella memoria di Wyrouboff e quelle riportate nella mia memoria; e dopo breve esame ho potuto persuadermi che tra di esse vi è la stessa relazione che intercede tra i cristalli eterosimmetrici [1]), non diversa da quella che, tra gli esempii comunemente noti, si riscontra tra i cristalli monoclini di ortoclasia ed i triclini di albite, e quale ho dimostrato intercedere tra i cristalli monoclini dei paratartrati acidi alcalini ed i cristalli ortotrimetrici dei levo e destro tartrati acidi delle medesime basi. Ciò apparirà manifesto dai seguenti quadri delle misure goniometriche riferibili ai destro tartrati che sono ortogonali, ai paratartrati monoclini ed ai paratartrati triclini.

[1]) Val quanto dire diversi per polisimmetria. Trovo regolare il diverso modo come gli accurati Scrittori usano le parole polimorfismo ed eteromorfismo; dicendosi che il carbonato di calcio è dimorfo; la calcite e l'aragonite sono eteromorfe. Seguendo questo esempio ho usato ora per la prima volta la parola *eterosimmetrico*.

Levo e destro tartrato acido potassico ortotrimetrico, misure del 1864, fig. 2.	Paratartrato acido potassico monoclino, misure del 1864, fig. 4 a 6.	Paratartrato acido potassico triclino, misure di Wyrouboff, fig. 11.
. . . . .	A sopra $d = 148°18'$	. . . . .
A sopra $e = 145°06'$	. . . . .	. . . . .
	A » $f = 140°10'$	h^{I} sopra $o^{\frac{1}{2}} = 140°54'$
A » $g = 125°38'$	. . . . .	. . . . .
. . . . .	A » $B = 116°18'$	. . . . .
. . . . .	A » $h = 101°52'$	$*h^{I}$ » $p = 102°26'$
. . . . .	h post. » $f = 117°58'$	p inf. » $o^{\frac{1}{2}} = 116°40'$ [1])
. . . . .	h » $C = 90°00'$	p » $g^{I} = 87°56'$
A » $C = 90°00'$	A » $C = 90°00'$	h^{I} » $g^{I} = 86°53'$
. . . . .	f » $C = 90°00'$	$o^{\frac{1}{2}}$ » $g^{I} = 88°28'$
. . . . .	q' » $C' = 125°47'$	$f^{\frac{1}{2}}$ » $g^{I} = 123°03'$
. . . . .	q » $C = 125°47'$	$d^{\frac{1}{2}}$ » $g^{I} = 127°18'$
. . . . .	r' » $C' = 131°13'$	$*b^{\frac{1}{2}}$ » $g^{I} = 130°55'$
. . . . .	r » $C = 131°13'$	$c^{\frac{1}{2}}$ » $g^{I} = 131°05'$
A » $i = 155°40'$	A » $i = 155°11'$	. . . . .
A » $k = 145°51'$	A » $k = 145°16'$	. . . . .
A » $l = 126°24'$	A » $l = 125°48'$	. . . . .
. . . . .	A » $l' = 125°48'$	. . . . .
. . . . .	A » $o = 109°50'$	. . . . .
A » $m = 135°47'$	. . . . .	. . . . .
. . . . .	A » $p = 130°37'$	. . . . .
. . . . .	$*A$ » $q = 123°12'$	. . . . .
A » $n = 117°12'$	. . . . .	. . . . .
	$*A$ » $r = 109°28'$	$*h$ » $c^{\frac{1}{2}} = 112°00'$
	A » $s = 98°33'$	. . . . .
A » $u = 90°00'$	. . . . .	. . . . .
. . . . .	h » $q' = 134°17'$	p sopra $d^{\frac{1}{2}} = 134°16'$
. . . . .	h » $q' = 134°17'$	p » $f^{\frac{1}{2}} = 134°20'$
. . . . .	h » $r = 126°15'$	p » $c^{\frac{1}{2}} = 124°04'$
. . . . .	p » $p' = 115°55'$	. . . . .
. . . . .	q » $q' = 108°26'$	$f^{\frac{1}{2}}$ » $d^{\frac{1}{2}} = 109°39'$

[1]) Nella memoria si trova $o^{\frac{1}{2}}p = 141°31'$; ma essendo $hp = 102°26'$, ed $h'o^{\frac{1}{2}} = 140°54'$, si deduce $o^{\frac{1}{2}}p = 116°40'$.

Levo e destro tartrato acido potassico ortotrimetrico, misure del 1864, fig. 2.	Paratartrato acido potassico monoclino, misure del 1864, fig. 4 a 6.	Paratartrato acido potassico triclino, misure di Wyrouboff, fig. 11.
. . . . .	*r sopra $r' = 97°34'$	*$c^{\frac{1}{2}}$ sopra $b^{\frac{1}{2}} = 98°00'$
. . . . .	s » $s' = 92°34'$	. . . . .
(An'') sopra $(An''') = 91°36'$	(Ar) » $(Ar') = 91°20'$	. . . . .
	Cristalli gemini, fig. 6.	**Cristalli gemini, fig. 13.**
	B' sopra $B'' = 127°24'$	. . . . .
	h » $h' = 156°16'$	p sopra $p = 155°08'$
	C » $C' = 180°00'$	*g^1 » $g^1 = 173°46'$
$a:b:c = 1:0,7168:0,7373$	$a:b:c = 1:0,6156:0,6455$	$a:b:c = 0,7053:1:0,7252$
A 100; C 001; e 210; g 110;	A 100; B 010; C 001; d $3\bar{1}0$;	h' 100; g 010; p 001;
u 011; m 211; n 111;	h $1\bar{1}0$; f 110; i 301; k 201;	$f^{\frac{1}{2}}$ $\bar{1}11$; $d^{\frac{1}{2}}$ $11\bar{1}$; $b^{\frac{1}{2}}$ $1\bar{1}1$;
i 301; k 201; l 101	l 101; o 102; p 111; s $1\bar{1}1$;	$o^{\frac{1}{2}}$ $\bar{2}01$
	q 211; r 011	

Levo e destro tartrato acido ammonico ortotrimetrico, misure del 1864, fig. 1.	Paratartrato acido ammonico monoclino, misure del 1864, fig. 3.	Paratartrato acido ammonico triclino misure di Wyrouboff, fig. 12.
. . . . .	*A sopra $d = 147°31'$	
A sopra $e = 144°15'$	. . . . .	
. . . . .	A » $f = 138°35'$	
A » $g = 124°47'$	. . . . .	
. . . . .	A » $B = 114°33'$	
	*A » $h = 102°21'$	*h' sopra $p = 102°42'$
	h » $C = 90°00'$	*p » $g' = 88°40'$
	A » $C = 90°00'$	*h' » $g' = 86°57'$
	q » $C = 126°09'$	
	r' » $C' = 131°44'$	*$b^{\frac{1}{2}}$ » $g' = 130°20'$
	r » $C = 131°44'$	$c^{\frac{1}{2}}$ » $g' = 130°55'$
A » $i = 155°48'$	A » $i = 154°12'$	. . . . .
A » $k = 144°47'$	A » $k = 144°06'$	h' » $h^3 = 148°03'$
. . . . .	A » $k' = 144°06'$	k' » $h^3 = 146°12'$
A » $l = 125°19'$	A » $l = 124°34'$	. . . . .
	A » $o = 109°01'$	. . . . .
A » $m = 134°46'$	. . . . .	
	A » $p = 129°22'$	
	A » $q = 122°36'$	

Levo e destro tartrato acido ammonico ortotrimetrico, misure del 1864, fig. 1.	Paratartrato acido ammonico monoclino, misure del 1864, fig. 3.	Paratartrato acido ammonico triclino misure di Wyrouboff, fig. 12.
A sopra $n = 116°23'$	. . . . .	. . . . .
. . . . .	A sopra $r = 108°41'$	. . . . .
. . . . .	A » $s = 98°53'$	. . . . .
A » $u = 90°00'$	. . . . .	. . . . .
	p » $p' = 114°28'$	. . . . .
	q » $q' = 107°42'$	. . . . .
	r » $r' = 96°32'$	$c^{\frac{1}{2}}$ sopra $b^{\frac{1}{2}} = 98°45'$
	r' » $C' = 131°44'$	$c^{\frac{1}{2}}$ » $g' = 130°55'$
	r » $C = 131°44'$	$b^{\frac{1}{2}}$ » $g' = 130°20'$
	$^{*}s$ » $s' = 92°28'$	. . . . .
	h » $r = 126°38'$	p » $b^{\frac{1}{2}} = 127°20'$
	h » $r' = 126°38'$	p » $c^{\frac{1}{2}} = 124°19'$
(An'') » $(An'') = 91°06'$	(Ap) » $(Ap') = 91°08'$	
$a:b:c = 1:0,6946:0,7085$	$a:b:c = 1:0,6156:0,6267$	$a:b:c = 0,7231:1:0,7543$
Simboli delle facce come nel tartrato acido potassico.	Simboli delle facce come nel paratartrato acido potassico.	$h'100$; $g'010$; $p\,001$; $^{3}h210$; $h^{3}\bar{2}10$; $b^{\frac{1}{2}}1\bar{1}1$; $c^{\frac{1}{2}}111$

Sia nel paratartrato acido potassico, sia nella specie ammoniacale vi è una direzione di sfaldatura assai facile a scuoprirsi e nitidissima parallela alla faccia C, fig. 3 a 6, ed altra direzione di sfaldatura poco meno distinta parallela alla faccia A. Con un rapido riscaldamento dei grossi cristalli, per esempio da 16° a 35° essi si spezzano nelle direzioni delle loro sfaldature mandando i frammenti distanti gli uni dagli altri; e, secondo gli esperimenti fatti, questo violento separarsi dei frammenti avviene più manifesto per la sfaldatura parallela ad A.

Il piano degli assi ottici è parallelo alla faccia C; la bisettrice ottusa è inclinata alla faccia f, fig. 8, di circa 37° ed alla faccia h di 81°; uno degli assi ottici è perpendicolare o quasi perpendicolare alla faccia f e per conseguenza inclinato alla stessa bisettrice di 53°, l'altro asse ottico passa per una faccia che tronca lo spigolo Ah'.

Dai precedenti quadri apparisce manifesto che tra i cristalli monoclini dei paratartrati acidi alcalini da me ottenuti nel 1863, e quelli triclini di recente preparati dal Wyrouboff intercedono esattamente le medesime relazioni che si ammirano tra i cristalli eterosimmetrici. Quindi ho conchiuso doversi ammettere nei tartrati acidi alcalini che oltre le due forme cristalline eterosimmetriche già note, ve ne sia pure una terza. La qualcosa se da una parte apre più vasto campo alla teoria della polisimmetria, rende altresì più meravigliosi i fenomeni che ci offrono i diversi acidi tartarici. Non dubito che i cristalli triclini posti alla pruova, col medesimo criterio che ha diretto gli esperimenti per ottenere la scambievole trasformazione tra i cristalli monoclini dei paratartrati e gli ortogonali dei levo e destro tartrati, daranno gli stessi risultamenti.

D' altra parte facendo attenzione alle misure goniometriche riportate nei medesimi quadri si scorge che non si verificano in tutto le condizioni che controdistinguono i cristalli eterosimmetrici ragguagliando tra loro i cristalli ortotrimetrici dei levo o destro tartrati acidi alcalini con i cristalli monoclini dei paratartrati acidi delle medesime basi. Ed interessato allo studio di queste relazioni assai più che a scuoprire forme cristalline per lo innanzi non conosciute, non so astenermi dal trattenermi alquanto ad esaminare tale quistione più di quanto è strettamente richiesto dall' argomento di questa memoria.

I cristalli ortotrimetrici dei tartrati acidi, tranne quel che si scorge per le facce *i*, *k*, *l*, *o* allogate nella zona *AC*, fig. 1 e 2, che per le loro inclinazioni sopra *A* si corrispondono con quelle indicate con le medesime lettere nei cristalli monoclini dei paratartrati, fig. 3 e 4, non sembra che abbiano con questi notevole analogia. Paragonando le inclinazioni sopra *A* delle facce comprese nella zona *Aeg* dei tartrati, fig. 1 e 2, con le inclinazioni delle facce allogate nella corrispondente zona *AdfBh* dei paratartrati, fig. 3 a 5, non si trova più alcuna rassomiglianza; come pure non sono comparabili le inclinazioni delle faccette delle altre zone *Am'n'u'* ed *Anu*, fig. 2, dei tartrati con quelle di *sqAp'r'* ed *s'q'Apr*, fig. 3, dei paratartrati. Non di meno la maniera già descritta come i cristallini dei tartrati e dei paratartrati scambievolmente si dispongono gli uni sugli altri quando gli uni si formano mentre gli altri si disciolgono, è assai valido argomento che dimostra le loro forme cristalline non essere altrimenti tra loro diverse che per polisimmetria. Ed anche come ho fatto notare nella memoria pubblicata nel 1864 un più accurato esame delle medesime forme ci scuopre tra di esse assai maggiore somiglianza di quella che a prima giunta si manifesta. Avendo calcolato le inclinazioni dello spigolo (*An''*) sopra (*An'''*), fig. 1 e 2, dei tartrati e dello spigolo (*Ap*) sopra (*Ap'*), fig. 3, dei paratartrati, queste inclinazioni sono assai prossimamente eguali, come può riscontrarsi nei precedenti quadri. Quindi ne conseguita che i piani delle quattro zone *Aeg*, *Ai'kl'C*, *An'''u*, *Am'n'u'* fig. 2, le quali comprendono tutte le facce dei cristalli ortogonali dei tartrati, hanno tra loro le medesime inclinazioni dei piani delle quattro zone *AdfBh*, *AikloC*, *s'q'Apr*, *sqAp'r'* fig. 3 e 4, nelle quali si comprendono tutte le facce dei cristalli monoclini dei paratartrati.

Confrontando dunque l' uno con l' altro i due tipi di forme si deduce che nel tipo monoclino dei paratartrati si conservano tra gli assi *c* e *b* le medesime condizioni per i rapporti delle loro lunghezze e per le loro inclinazioni, quali si trovano nel tipo ortogonale più semplice dei tartrati; tra gli assi *a* e *c*, ancor essi ortogonali ci ha una differenza in lunghezza nel rapporto di 7 : 6 tra il tipo ortogonale ed il monoclino; tra gli assi *a* e *b* ci ha pure la stessa differenza nel rapporto di 7 : 6 per la loro lunghezza tra i due tipi di forme, e di più le loro inclinazioni sono ad angolo obbliquo nel tipo monoclino.

Per dar termine alla presente memoria mi resta a cercare la cagione della differenza tra le forme cristalline avute dal Wyrouboff e quelle che assai prima erano state da me ottenute. La differenza può provvenire o dai diversi mezzi tenuti nel produrre i cristalli, o dall'essere diversa la natura dell' acido in essi contenuto.

Avendo presente come negli acidi tartarici in particolari condizioni, conservando inalterata la loro composizione elementare restano profondamente mutate le loro proprietà, in guisa da doverli considerare come diverse specie di acidi tartarici, mi è sem-

brato più di ogni altra cosa probabile che nei cristalli preparati da uno di noi in luogo del vero acido paratartarico si contenesse l'acido tartarico inattivo, altrimenti chiamato mesotartarico. Quindi ho fatto soluzione dei miei cristalli di paratartrato acido ammonico preparati nel 1863, vi ho aggiunto acido solforico e l'ho concentrata, avendo cura che la sua temperatura non oltrepassasse i 90°. Risultamento di questo saggio è stato che col raffreddamento si sono depositati nitidi cristalli di acido paratartarico. Quindi non mi resta alcun dubbio che l'acido contenuto nei cristalli descritti nel 1864 sia realmente l'acido paratartarico.

Mi restava intanto ad investigare se indipendentemente dalla natura dell'acido un diverso metodo nella preparazione dei cristalli fosse cagione del diverso sistema al quale appartengono le forme cristalline che si producono. E con la speranza di avere cristalli triclini come quelli descritti dal Wyrouboff ho seguíto il suggerimento da lui dato per ottenere distinte le loro forme, facendo evaporare la soluzione a circa 50 gradi.

Il maggior numero degli esperimenti sono stati eseguiti con le soluzioni di schietto paratartrato acido di potassio; e dalle medesime mi è riuscito avere molti cristalli di ammirevole nitidezza, di grandezza talvolta maggiore di quattro millimetri. Nelle precedenti cristallizzazioni aveva osservato i cristalli di questa specie riuscire tra loro diversi per la presenza o mancanza di alcune faccette e per la variabile estensione delle facce che vi si rinvengono, per cui si ottengono forme molto tra loro disparate come si vede per le fig. 4 a 6, che sono le stesse di quelle pubblicate nel 1864. La forma quasi costante che ho avuto nelle recenti cristallizzazioni è quella che vedesi rappresentata nella fig. 8*a* con la faccia *C* perpendicolare al piano di proiezione e nella fig. 8*b*. con la faccia *C* parallela al medesimo piano.

A sopra $h = 101°52'$	r sopra $r' = 97°34'$	A sopra $r = 109°28'$
h » $f = 117°58'$	r » $h = 126°15'$	C » $r = 131°13'$
f » $A' = 140°10'$	r » $f = 132°56'$	A » $(rr') = 116°18'$

A 100 ; C 001 ; h 110 ; $f\,\bar{1}10$; r 011

Alle facce molto estese che si veggono nelle figure talvolta vanno unite, assai minute alcune delle faccette i 301, l 101, o 102, $q\,2\bar{1}1$, e le facce *C* si controdistinguono dalle altre per essere profondamente striate parallelamente allo spigolo *AC*. Per questa ragione riflettendosi dalle facce *C* molte immagini degli oggetti veduti per luce riflessa non ho potuto direttamente misurare le sue inclinazioni con le altre facce A, h, f. Nondimeno scoverta la nitidissima superficie di sfaldatura parallela alla stessa faccia *C*, l'ho trovato inclinata di 90° su ciascuna delle facce della zona Ahf. Quindi non si può mettere in dubio che anche i cristalli preparati col suddetto metodo siano monoclini.

Ho cercato con diligenza se tra i novelli cristalli ve ne fossero alcuni gemini, e ne ho trovato uno molto diverso da quello figurato sotto il numero 6 descritto nella memoria del 1864, e che con difficoltà si giunge a conoscere che sia geminato, non essendovi angoli rientranti. L'ho rappresentato colla figura 9, e mi sono accertato che sia cristallo gemino avendo misurato le inclinazioni di A sopra h, di A sopra f, di A sopra r e di A sopra q che sono rispettivamente eguali alle inclinazioni di A' sopra h', di A' sopra f', di A' sopra r' e di A' sopra q'. Di questa strana maniera di conformazione nei

cristalli gemini mi sarebbe riuscito assai difficile di rendermi ragione se altri cristalli, dei quali or ora farò parola, non mi avessero guidato ad una sicura interpretazione. Intanto importa notare che nel punto x vi è un cristallino assai minuto la cui faccetta esterna si confonde con la parte curvata della faccia f.

Nella raccolta dei cristalli artificiali del nostro Museo mineralogico vi sono alcuni cristalli di paratartrato acido potassico, i quali non saprei dire quando mi riuscì di prepararli, nè la maniera come li ottenni. Essi sono della grandezza di oltre dieci millimetri nel maggior diametro, terminati da facce curve e con angoli rientranti da sembrare piuttosto un aggregamento di cristalli diversi. Nell' eseguire le recenti cristallizzazioni ho immerso nelle soluzioni nelle quali s' ingrandivano gli altri cristalli alcuni di questi cristalli complessi, che trascorsi circa sei giorni hanno acquistato tale nitidezza di facce da riuscire accomodate alle misure goniometriche. La loro forma è quale vedesi rappresentata nella figura 10 ridotta ad una certa regolarità nella estensione delle facce, e mi sono assicurato delle specie di facce riportate nella figura avendo misurato le loro scambievoli inclinazioni. Si scorge chiaro trattarsi di un gruppo cristallino quadrigemino col piano che congiunge il cristallo gemino di sinistra a quello di dritta perpendicolare alle facce A. Questo piano non corrisponde ad una faccia possibile nei cristalli di paratartrato acido potassico; ma la legge per la quale si unisce il cristallo gemino di sinistra con quello di dritta è la rivoluzione intorno ad un asse perpendicolare alla faccia C; mentre ciascun cristallo superiore si gemina al corrispondente cristallo inferiore con l' asse di rivoluzione perpendicolare alla faccia A. Egli è però che i due assi di rivoluzione sono tra loro perpendicolari. Per altri cristalli gemini del paratartrato acido ammonico, che saranno di qui a poco descritti, si vedrà che i gruppi figurati sotto i numeri 9 e 10 si potrebbero anche considerare come trigemini. E nei medesimi ho sempre osservato che le facce h, e più di queste le facce f, si curvano alquanto prima d' incontrarsi.

Ritornando al cristallo figurato sotto il numero 9 son di avviso che esso rappresenta il cristallo gemino di dritta della figura 10 mentre dell' altro cristallo di sinistra non è rimasto che una piccola parte che si scorge nel cristallino x. Questo fatto sembrami analogo all' altro da Haüy per la prima volta avvertito [1]) nei cristalli di armotomo di Strontian che sono apparentemente semplici, ma che in realtà sono gemini come i cristalli crociformi di Andreasberg e di altre contrade, con la differenza che uno dei due cristalli è quasi occultato non essendovi di esso che una minutissima prominenza sull' altro cristallo di tanto più grande che si crederebbe esistere esso soltanto.

Prima di dar termine a ciò che un novello esame mi ha dato occasione di osservare nei cristalli dei paratartrati acidi di ammonio e di potassio, non voglio omettere di esporre ciò che mi ha presentato di ammirevole un nitidissimo cristallo geminato di paratartrato acido ammonico alquanto più di quattro millimetri grande nel suo maggior diametro. Le figure qui impresse, fedelmente copiate dal vero lo rappresentano molto ingrandito, stando nella figura 1ª le facce A parallele al piano di proiezione e nella figura 2ª la faccia A perpendicolare al medesimo piano. Esso è costituito da un gruppo trigemino nel quale è facile distinguere il cristallo maggiore $Afh'A'f'h$ che sta

[1]) Haüy. *Traité de minéralogie.* II ed. 1882, vol. 3°, p. 142. Veggasi pure *Sulla poliedria delle facce dei cristalli*, per A. Scacchi 1862 (nel tomo XXI, serie II, delle memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino) p. 29, fig. 28.

Fig. 1.

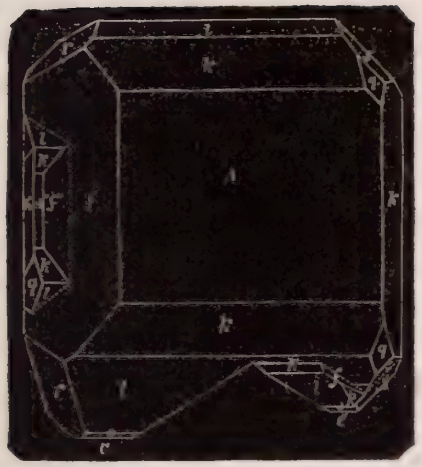
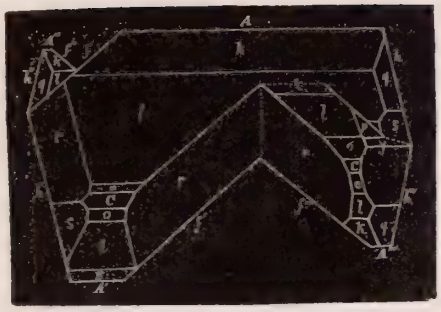


Fig. 2.



nel mezzo degli altri due minori $A''h''f''$ ed $f'''A'''h'''$ che stanno il primo a sinistra superiormente ed il secondo a destra inferiormente. La legge di geminazione con la quale sono uniti i tre cristalli è, o potrebb'essere, l'asse di rivoluzione perpendicolare alla faccia A; ma essi non si congiungono, come avviene nel cristallo rappresentato dalla figura 6, col piano di geminazione parallelo alla faccia A. La scambievole posizione dei tre cristalli è tale da non aversi un determinato piano di geminazione, e, senza che avvenga scambievole compenetrazione, i piani per i quali avviene la loro unione sono determinati da una condizione che non sembra dover contribuire alla loro geminazione, mentre è un fatto costante del quale importa conoscere la cagione. La condizione sta in ciò che una faccia h dei cristalli laterali si congiunge con angolo diedro molto ottuso con le facce h del cristallo situato nel mezzo. Ciò apparisce chiaro nella figura 2ª per l'incontro di h'' con h' e di h con h'''. Quindi abbiamo che il piano di unione del cristallo di sinistra $h''A''f''$ col cristallo di mezzo è parallelo alla faccia f di quest'ultimo, ed è tale che ad esso non corrisponde una faccia possibile nell'altro cristallo di sinistra. L'unione del cristallo inferiore $f'''A'''h'''$ col cristallo di mezzo avviene con diversi piani. Uno di questi piani, che passa per l'angolo diedro rientrante formato dalla faccia k del cristallo inferiore con la faccia l del cristallo di mezzo è parallelo alla faccia A comune ai due cristalli; un altro che passa per l'angolo diedro rientrante rr, fig. 2ª, è perpendicolare alla faccia A, ed in nessuno dei due cristalli può esservi una faccia ad esso parallela. Un terzo piano di unione è parallelo alla faccia f''' del cristallo inferiore, e parallelo a questo piano non può esservi una faccia nel cristallo maggiore $A\,h$. Finalmente continua l'unione degli stessi due cristalli per una superficie che non è perfettamente piana, passa per l'angolo diedro rientrante $s\,y$ e finisce ove la faccia h del cristallo di mezzo si congiunge con la faccia h''' del cristallo inferiore.

In questo gruppo trigemino si scorge chiara in tutti i suoi particolari la maniera come sono allogati i tre cristalli che compongono il gruppo; e le medesime condizioni di geminazione, quantunque meno distinte, dobbiamo riconoscere nei cristalli di paratartrato acido potassico rappresentati dalle figure 9 e 10. E quando si paragonano i cristalli in tal guisa geminati con l'altro gruppo gemino della figura 6, nel quale le facce h dei due cristalli mantenendosi discoste, si hanno gli angoli diedri rientranti intorno

al piano di geminazione, ed in fine si hanno le condizioni ordinarie dei cristalli gemini, non può rimanere alcun dubbio che una importante differenza intercede tra gli uni e gli altri. La differenza apparente sta nella esatta unione in un angolo diedro delle facce h di un cristallo con le facce h dell'altro cristallo; ma tale unione non avviene certamente per una singolare virtù, e quasi direi affinità delle facce h che le sollecita a congiungersi. Essa, son di avviso, è la conseguenza di una peculiare cagione che conviene investigare.

Se supponiamo che l'unione di tre cristalli in conseguenza delle leggi della geminazione, e con la condizione che due cristalli siano geminati su due facce parallele del terzo cristallo, si hanno risultamenti alquanto diversi in apparenza secondo che la geminazione avvenga nei primordii della cristallizzazione, ovvero quando uno o due dei tre cristalli abbiano raggiunta una notevole grandezza. Nel primo caso il cristallo che sta in mezzo non può ingrandirsi se non nel verso della sua larghezza intorno al piano di geminazione restando così più o meno occultato; e la geminazione è riconoscibile per le strie derivate dagli angoli diedri rientranti formati dalle faccette appartenenti ai diversi cristalli. Nel secondo caso il cristallo situato nel mezzo sarà tanto più distinto per quanto maggiormente abbia progredito il suo ingrandimento prima che avvenisse la geminazione. Avendo presenti queste ovvie considerazioni per proseguire alla ricerca della più naturale interpretazione del cristallo trigemino figurato, debbo soggiungere che quando due facce parallele di un cristallo, su ciascuna delle quali dovranno in seguito unirsi per geminazione le molecole di un altro cristallo, hanno acquistato una notevole ampiezza, possiamo ammettere che le novelle molecole vadano a geminarsi ricuoprendo integralmente le facce del cristallo primitivo, ovvero si depositino soltanto sopra una parte di queste facce, mentre sulla rimanente parte le novelle molecole continuino a depositarsi come nei cristalli semplici. La prima di queste due maniere di depositarsi le novelle molecole è il caso ordinario, come ne offrono chiari esempii i cristalli trigemini di rutile e di aragonite. Se supponiamo al contrario che le prime molecole dei cristalli minori $h''A''f''$ ed $f'''A'''h'''$ si siano unite per geminazione sulle facce A ed A' del cristallo maggiore soltanto presso gli spigoli Af ed $A'f'$, è manifesta la conseguenza che lo stesso cristallo maggiore abbia potuto continuare ad ingrandirsi, come si vede nella figura, dalla parte di Ah e di $h'A'$. Ma con questa supposizione non si spiega l'unione di h'' con h' e di h con h''', e resterebbe a trovare la ragione del depositarsi le molecole dei cristalli minori soltanto presso gli spigoli Af ed $A'f'$. Continuando a ritenere che la legge della geminazione sia l'asse di rivoluzione perpendicolare alle facce A, potremmo supporre che le prime molecole dei cristalli minori invece di unirsi per geminazione sulle facce A del cristallo maggiore già ingrandito, si siano unite sulle facce f, f' presso gli spigoli fh' ed hf'. Ciò ammesso, ne seguirebbe senz'altro l'incontro di h'' con h' e di h con h'''; ma tale supposizione è troppo arbitraria per poterla tenere in conto di una buona spiegazione del fatto. Ho esposto queste osservazioni per venire alla conclusione che il congiungersi le facce h dei tre cristalli non può derivare dalla legge dell'asse di rivoluzione perpendicolare alle facce A.

Ora importa considerare che nei tre cristalli del gruppo, tenendo conto semplicemente della loro scambievole posizione, questa si può ottenere sia supponendo l'asse di rivoluzione perpendicolare alle facce A, sia supponendo lo stesso asse parallelo agli spigoli fh', hf'; e ritenendo questa seconda legge si ha una più naturale interpretazione

Fig. 1.

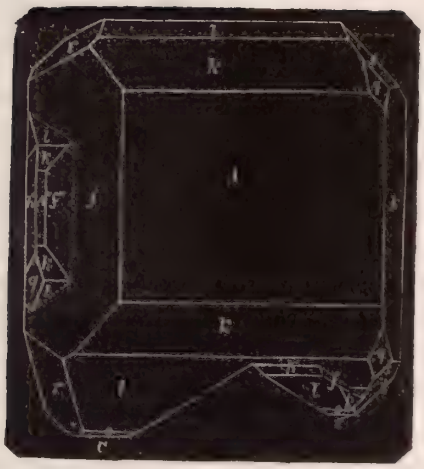
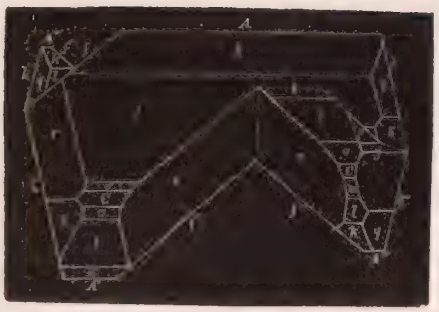


Fig. 2.



dell'incontrarsi h'' con h' ed h con h'''. Quindi son di avviso che la differenza tra il cristallo gemino rappresentato dalla figura 6, e gli altri cristalli rappresentati dalle figure 9 e 10 e dal cristallo figurato nel testo derivi da ciò che il primo è geminato con l'asse di rivoluzione perpendicolare ad A, e gli altri con l'asse di rivoluzione parallelo allo spigolo fh.

Si è veduto innanzi (pag. 2 in nota) che i cristalli monoclini dei paratartrati acidi alcalini che si depositano sopra i cristalli ortotrimetrici dei tartrati acidi delle medesime basi sono costantemente gemini; e quando essi giungono a congiungersi insieme sino a comporre un solo cristallo quadrigemino, quale si vede nella figura 7 a, b, in questo le facce h di due cristalli si toccano come nei cristalli delle figure 9 e 10 senza che s'interpongano le facce B che si trovano nella figura 6. Di ciò si può rendere ragione ammettendo che la legge di geminazione dei suddetti cristallini sia l'asse di rivoluzione parallelo allo spigolo hf.

Nello stesso cristallo trigemino finora descritto mi è avvenuto osservare un altro fatto che non può rimaner trascurato. Nel cristallo inferiore di dritta $f'''A'''h'''$ tra le faccette p ed s vi è la faccetta controdistinta con la lettera y compresa nella zona $A'''p$, o ciò che vale lo stesso nella zona Ap, inclinata alla faccia A di 103°45′. Negli ordinarii cristalli di paratartrato acido ammonico tra le facce p ed s vi è la faccia r che porta il simbolo 011, inclinata alla faccia A di 108°41′. Questa differenza di circa cinque gradi tra le facce y ed r potrebbe derivare o dall'essere la faccetta y una particolare specie di faccia non mai rinvenuta in altri cristalli, o dall'essere essa la stessa faccetta r spostata dalla sua regolare posizione per poliedria cagionata dalla geminazione. La faccetta y sia per essere piccolissima, sia per essere alquanto curva nella parte che fa angolo diedro rientrante con la faccia s, non riflette immagini nitide degli oggetti, e la sua inclinazione sopra A di 103°45′ è il risultato medio di tre misure che non hanno dato differenze maggiori di 0°16′. Quindi ho calcolato quale potrebbe essere il simbolo di y nel caso che essa fosse una particolare specie di faccia; ed ho trovato che attribuendole il simbolo $\overline{1}66$, essa sarebbe inclinata sopra A di 103°48′. Quantunque sia questo un simbolo atto a caratterizzare una specie di faccia probabile, e la inclinazione di y sopra A calcolata sia molto prossima a quella trovata, preferisco ritenere che l'accordo tra l'inclinazione mi-

surata direttamente e quella che si deduce dal calcolo secondo il simbolo $\bar{1}66$ sia accidentale, e che la faccetta y sia la stessa faccia r spostata dalla sua regolare posizione. Dappoichè i coefficienti degli assi nei simboli delle facce dei cristalli dei quali si fa parola sono sempre semplicissimi, nè in altri cristalli si è trovata alcuna faccia definita col simbolo $\bar{1}66$; e di più non sono rari gli esempii, di facce spostate dalla loro regolare posizione quando s' incontrano con i piani che uniscono per geminazione due cristalli. Basta ricordare quel che ho dimostrato nei cristalli gemini del solfato potassico [1]) nei quali talune facce incontrate dai piani di geminazione, esattamente a partire dall' incontro, spostandosi dalla loro regolare posizione si piegano in due versi opposti. E non meno ammirevole è quel che ho trovato succedere nei cristalli quadrigemini di ortoclosia [2]) nei quali le due facce parallele di un cristallo che dovrebbero essere inclinate con angoli retti su di una terza faccia, incontrandosi con i piani di geminazione, sono invece inclinate sulla medesima faccia da entrambe le parti con angoli variabili maggiori di 91°.

Per le cose fin qui riferite delle novelle ricerche sulle forme cristalline dei paratartrati acidi di ammonio e di potassio resta confermato che esse siano monocline, come furono descritte nel 1864; e qualche cosa degna di nota si è porta l' occasione di aggiungere per le loro geminazioni. Non pertanto debbo conchiudere, contrariamente a quel che avrei desiderato, di essermi finora ignota la cagione perchè i cristalli ottenuti dal Wyrouboff siano riusciti triclini.

finita di stampare il dì 30 maggio 1884

[1]) *Sulla poliedria delle facce dei cristalli. Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino,* Serie II, Tomo XXI; pag. 53 e seg. fig. 53 a 61 (1862).

[2]) *Note mineralogiche. Atti della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli.* Vol. V, N. 3, pag. 10 e seg., fig. 4 e 5.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIE ED OSSERVAZIONI SULLA GEO-FAUNA SARDA

MEMORIA TERZA

Risultamento delle ricerche fatte in Sardegna nella estate del 1883.

del Socio Ordinario ACHILLE COSTA

(presentata nell'adunanza del 10 maggio 1884).

I risultamenti oltremodo interessanti ottenuti dalle ricerche fatte nella Sardegna durante quasi la intera primavera del 1882, già consacrati nella seconda memoria intorno la Geo-Fauna Sarda venuta alla luce nello scorso giugno, mi determinarono a proseguire ancora con alacrità l'intrapreso lavoro, e quindi a recarmi per una terza volta in quell'Isola. E questa Accademia non solo trovò commendevole il mio proponimento, ma volle ancora generosamente concorrere perchè più ampiamente avessi potuto dare sviluppo alle mie perlustrazioni. Al quale attestato d'interesse, di cui ho apprezzata tutta la importanza, ho cercato corrispondere raddoppiando lo zelo ed esponendomi nel tempo stesso a disagi che potrebbero appena subirsi a venti anni.

Più che due mesi, cioè dal dì 9 luglio al 12 settembre, ho passato in non interrotte investigazioni nell'isola. Del quale tempo buona parte è stata impiegata a perlustrare una regione montuosa da me non ancora conosciuta, quella che si aggira intorno al Gennargento. E dico non ancor conosciuta dappoichè, sebbene nel settembre del 1881 avessi valicato una delle vette di quel colosso della Sardegna, di tutta la catena di monti che vi si annodano non ne vidi che una piccolissima parte soltanto. Ed è per girare que' monti che s'incontrano difficoltà ad ogni passo, dovendosi cercare ricovero in paesi in cui raramente vedesi giungere un forestiere, e ne' quali in conseguenza assai malagevole riesce trovare l'alloggio e dirò anche il vitto. Nondimeno debbo per giustizia e riconoscenza dichiarare che in molti di tali luoghi, meglio che in altri, ho avuto la opportunità di constatare che quasi in ogni paese in cui vi ha persone che apprezzano le scienze, ho ricevuto da queste generosa ospitalità od almeno agevolazioni valevoli a poter raggiungere il mio scopo. I loro nomi si troveranno ricordati nella relazione del viaggio; qui mi limito ad esternare loro tutta la mia gratitudine.

Oltre alla regione del Gennargento, molte località ho percorse non visitate negli altri viaggi, come Monastir, Serrenti, Samassi, Laconi, varii stagni intorno Oristano e Sassari, Ploaghe, Bosa, la penisola di S. Antioco, ecc.

In quanto a' risultamenti ottenuti da questo terzo periodo di ricerche nel complesso non sono stati per importanza inferiori a quelli della primavera, ma in proporzioni diverse in rapporto alle diverse classi. La stagione del luglio ed agosto è già troppo inoltrata per la Sardegna. Anche per gli alti monti del Gennargento ho dovuto riconoscere che andarvi nel luglio è già troppo tardi, e che il mese più propizio a perlustrarli esser deve il giugno. Gli effetti della stagione si avvertono massimamente, come è naturale, per quelle genie di viventi che abitano i luoghi umidi, che durante i forti calori disseccandosi obbligano que' minuti esseri a cercare asilo in profondità maggiori, se non pure a cessare di vivere. Così per esempio una differenza notevole si avverte nell'abbondanza de' Crostacei terrestri, de' Miriapodi, de' Coleotteri Carabidei, ecc. Mancano del tutto i Crostacei abitanti ne' pantani temporanei, de' quali è stato discorso nella memoria seconda. Per le altre classi, non ostante i copiosi materiali raccolti nella primavera, le aggiunte risultanti da questo terzo viaggio sono tanto numerose ed importanti, da farci sempre ritenere che sono tuttavia assai limitate le conoscenze che si hanno intorno alla Geo-Fauna Sarda.

Seguendo il sistema adottato nelle due precedenti memorie dividerò questo lavoro in tre diverse parti, delle quali però le due prime saranno trattate con qualche modifica nella loro modalità, richiesta dalla necessità di evitare inutili ripetizioni, siccome sarà detto in cadauna di esse.

PARTE PRIMA

Relazione del viaggio.

Dopo aver già pubblicata la relazione di altri due viaggi sembrerebbe pressochè inutile quella ancora di un terzo. Ed io me ne sarei volentieri astenuto se due ragioni non mi avessero fatto appigliare ad un partito diverso. La prima l' è che buona parte de' luoghi percorsi non trovasi contemplata in quelle due precedenti relazioni; e tra questi trovansi precisamente quelli ne' quali il viaggiatore incontra difficoltà maggiori, mentre sono nel tempo stesso di grande importanza pel naturalista. La seconda ragione l' è che anche ne' luoghi già altra volta visitati, mutata la stagione, cangia altresì il prodotto. Per tanto, farò in modo da evitare tutto ciò che sarebbe ripetizione quanto a descrizione materiale del viaggio, senza tralasciare ciò che interessa nelle vedute scientifiche.

Luglio

7-8. — Alle 2 pom. del 7 lascio Napoli, ed avendo un mare perfettamente tranquillo alle 4 p. m. del dì seguente si giunge al porto esterno di Cagliari. A causa della esistenza del Colèra in Egitto, non ostante il piroscafo provenisse direttamente da città del tutto immune, pure si fu costretti subire le consuete pratiche sanitarie innanzi di entrare nel porto interno: sicchè non prima delle sei si potette scendere a terra. Benchè mancassi soltanto da un anno da Cagliari, pure erano sensibili gl' immegliamenti che la città aveva subito in sì breve intervallo. Oltre a chè non posso tacere di un altro fatto che contribuisce al lustro di essa. Nella relazione del primo viaggio fattovi nel settembre 1881 io lamentai la mancanza di un albergo che fosse in armonia con la civiltà della

città, e facevo voti perchè municipio e cittadini si fossero cooperati affinchè un tale difetto fosse scomparso. Ora con somma soddisfazione trovai che que'voti sono stati soddisfatti. L'*Albergo della Speranza*, posto presso la nuova Via Roma, è messo e tenuto per bene tanto, da potersi dire perfino superiore al bisogno.

9. — Percorrendo il sentiere battuto il 27 luglio 1882 [1]) mi reco per Quarto al Capo S. Elia. Però, sia per la piccola diversità di tempo, sia per variazione nelle indagini, il risultamento ottenuto fu molto diverso. Uscito appena dal paese di Quarto, dirigendo lo sguardo ai Cacti che formano cinta a' poderi, i cui fiori sogliono richiamare molti Imenotteri, vi vidi tra gli altri aggirarvisi in abbondanza il *Pelopoeus violaceus*, che ne' due precedenti viaggi non avevo osservato in alcun sito. Tralascio le sponde dello Stagno, le quali era convinto mi avrebbero offerto le medesime specie raccoltevi altra volta, perchè sedentanee, e mi dirigo diritto al Capo S. Elia. Ricercando tra erbe e suffruttici che vegetano tra lo stagno e la collina mi si presenta il bellissimo *Cryptocephalus curvilinea*, che da me non ancora era stato trovato in Sardegna, e che vi era molto abbondante. E pure quel sito stesso era stato da me esplorato con egual diligenza nel luglio dell'anno precedente. Anche la *Crioceris campestris* fu specie non rinvenuta innanzi. Ivi ancora trovai la *Mordellistena pulchella*, come l'avevo trovata l'altra volta [2]) e che in tutta l'isola non ho vista in altro posto; del pari che l'*Eupelmus albitarsis*. Su' cisti era frequente la ordinaria *Tibicina cisticola*, che però presentavasi con caratteri alquanto diversi dal tipo, soprattutto per la maggiore estensione del giallo ne' nervi delle ali superiori.

10. — Visito le due contrade *Giorgìno* ed *Orri* da me già conosciute. Arrestandomi presso le sponde dello Stagno di Cagliari, di cui rasento il lato orientale, trovo tra le Salsole piuttosto abbondante l'*Henestaris* descritto da Spinola col nome di *Genei* sopra individui sardi avuti da Genè, e che però nel fondo non è diverso dal *laticeps* di Curtis. Giunsemi poi nuova una specie di *Nemotelus*, che pure vi era abbondante, e che pare sia specie non conosciuta da' Ditterologi, onde la descriverò col nome di *Nem. leucorhynchus*. Della *Brachinema cincta* trovatavi nel settembre eranvi soltanto larve. Dell'*Histeropterum camelus* nessun indizio.

Nulla di nuovo o d'interessante mi offre la contrada *Giorgìno*. Però riveggo un Microlepidottero che sin dal settembre 1881 aveva trovato abbondantissimo nel Campidano di Cagliari e che erami riuscito impossibile determinare. Ora però avendolo comunicato al professore Staudinger, ho appreso essere la *Staintonia medinella* descritta da lui medesimo. Egli mi aggiunge che dopo l'Andalusia, ove la discoprì egli medesimo, non era più stata trovata [3]). Invece in *Orri* rinvengo una varietà dell'*Agrilus cinctus*, che non era registrato tra gli abitanti della Sardegna; l'*Icosium tomentosum*, specie di Longicorni rara e che dicesi esservi stata trovata soltanto dal Reymond; il *Nanophyes centromaculatus*, descritto da me tra gl' insetti della Calabria e posteriormente trovatosi ancora nell' Algeria. Di Ortotteri non era rara la *Ameles Spallanzania*. Però gl' individui adulti erano tutti femine: di maschi incontravasi qualche ninfa. Di Imenotteri non mancarono buone specie, ma più di ogni altra m' interessò rivedere la *Notoglossa frondigera*.

[1]) Vedi la relazione nella memoria seconda.

[2]) Per equivoco nella memoria seconda a questa specie trovasi assegnata per località la valle del Gologone.

[3]) Ecco ciò che sul proposito mi scrive il chiaro Lepidotterologo: *Il m'a été d'un grand interet qu'en Sardegne on a trouvé la* Staintonia medinella, Staud., *espèce que j'ai trouvé en 1858 en nombre sur les ombrellifères près de Cadis (Andalousie) et que jusqu'à present n'a été trouvé nul autre part.*

*

11. — Dovendomi disporre per la partenza, che avevo fissata pel giorno seguente, non potevo consacrare che poche ore alla campagna. E però mi aggirai intorno all'Anfiteatro; trovandovi poco d'interessante. Tra l'altro erano scomparsi completamente tutti que' minuti Malacodermi, che nell' aprile ingombravano tutti i fiori.

12. — Scopo principale di questo terzo viaggio era quello di perlustrare in stagione meno inoltrata il Gennargento e la catena di monti che a quello si ligano, soprattutto dalla sua parte occidentale da me non affatto conosciuta. Mi determinai quindi dirigermi a quella volta per la via di Laconi. Anzichè però raggiungere questo paese in un giorno, come avrei potuto, recandomi in ferrovia a Samassi e di là proseguendo con la vettura postale, divisai noleggiare a mio uso una carrozza, ripartendo il cammino in più giorni, a fine di aver agio di esplorare i diversi luoghi intermedii: sistema adottato in varii rincontri l'anno precedente e del quale mi trovai sempre soddisfatto. La mattina quindi alle sette parto in compagnia di Stefano Melone, che servir mi doveva di guida, d'interprete e di ajuto. Dopo tre ore e mezzo di cammino si giunge a Monastir, ove fo la prima fermata onde esplorare il Rio Manno che vi scorre assai da presso. Le acque di questo fiume, uno dei principali dell' isola, erano state da me ricercate con certa posatezza nell'anno precedente in quel tratto che passa in vicinanza di Decimoputzu. Pure in questa novella investigazione vi rinvenni qualche specie non rinvenutavi l'altra volta, come l'*Haliplus ferrugineus* ed un *Berosus*, che sebbene nel fondo non sia altro che il *B. affinis*, pure ha qualche differenza notevole. Vi raccolsi ancora un individuo dell'*Hydroporus 12-pustulatus* che, per quanto risulta dalle mie indagini, è specie che poco facilmente s' incontra. Non erano rari il *Dytiscus pisanus* ed il *Gyrinus striatus*, ecc. M' interessò poi moltissimo il trovare alcune *Naucoris minuta* portanti un Acarideo parassita infisso col suo rostro non nelle membrane interzoonitiche, ma direttamente nel dermascheletro, rimanendo col suo corpo globoso penzolone. Nella vicina campagna vedevansi ancora in gran numero i *Pelopoeus violaceus* aggirarsi intorno qualche casa rustica costruita di argilla cruda, entro la quale teneano il loro nido.

Alle 3 p. m. riparto, ed alle 4 giungo a Serrenti, ove la mia guida mi consiglia passar la prima notte: consiglio che non avrei accettato se avessi conosciuto anticipatamente le tristi condizioni di quel paese. In fatti, per avere un ricovero dovetti accomodarmi ad una stanza per favore concedutami da un albergatore di carrettieri e mulattieri! A rendere maggiormente uggiosa la dimora in quel paese si aggiunse altro disappunto, la malattia di uno de' cavalli, la quale m' impediva di proseguire il cammino a seconda del programma propostomi. E poichè in Serrenti non trovavansi mezzi di trasporto di qualsiasi natura, sarei rimasto quivi sequestrato, se non fosse venuto in mio aiuto il Cav. Callisto Musio, che per fortuna trovavasi in paese, ove ha sue possessioni. Questo distinto gentiluomo, saputo del mio arrivo e della imbarazzante posizione in cui rattrovavomi, non solo venne a sottrarmi dalla lurida stanza che occupavo, ma mi offrì pure il mezzo onde il dì seguente raggiungere Samassi. Passai quindi la notte in sua casa.

13. — Levatomi di buon' ora, fo qualche indagine in un podere dello stesso Cav. Musio, ove attorno le siepi di cinta raccolsi pochi Imenotteri. Alle otto un di lui legnetto messo a mia disposizione mi condusse a Samassi. Giungo alquanti minuti dopo le nove; la vettura postale per Laconi, di cui dovevo profittare, era già partita. Necessità quindi di rimanere la intera giornata in quest' altro infelice paese, e di cercarvi un al-

loggio. Mi venne indicata come unico rifugio la osteria d' un tale Francesco Olis, alla quale dovetti mio malgrado adattarmi. Sebbene l' ora fosse inoltrata, nondimeno volli profittare del novello domicilio coatto per uscire alla caccia. Il sole era scottante: spirava un vento caldo, e, ad intervalli fortunatamente non brevi, avvertivansi ondate infocate quasi correnti provenienti da vicine fornaci ardenti. Le indagini pertanto non furono infruttuose. Vi raccolsi varie buone specie di Ditteri, come la *Gonia atra*, ecc. e m' imbattetti in un nido della *Nomada Manni*, che non ho trovata altrove. Le femmine erano molto abbondanti, i maschi assai scarsi.

14. — Alle 9 a. m. parto con la corriera postale per Laconi, ove giungo alle 4,45. L' albergo di Giuseppe Serra, sebbene abbastanza infelice, pure è il solo possibile in quel paese; e però in quello mi acconcio. Invero, la famiglia del Marchese di Laconi là dimorante, tutta composta di persone distinte e gentilissime, conosciuto il mio arrivo mi offrì ospitalità; ma non volli arrecarle disturbo.

15. — Ottenutone il permesso dal predetto Marchese di Laconi, passai la giornata nella foresta di loro proprietà, molto vicina: foresta assai estesa e che essa sola avrebbe meritato esplorazione per più giorni. Molte furono le cose interessanti che vi trovai. Di Coleotteri potetti raccogliere quattro individui del *Clytus liciatus,* che stavano aggrappati ad un grosso tronco abbattuto di pioppo, dal quale pareva fossero allora sbucati. Esso mi giungeva del tutto nuovo per quell' isola, nella quale era stato precedentemente trovato soltanto dal Baudi. Ivi presso ancora rinvenni un individuo dell' *Acanthoderes varius,* che dicesi trovato in Sardegna dal solo Ghiliani. Di Nevrotteri ricorderò la *Mantispa pagana*, che è ovunque poco frequente. Di Imenotteri rinvenni il *Silaon compeditus* che fuori la Toscana, di dove lo descrisse il Piccioli, credo non sia stato trovato da alcuno. Di Ditteri, anche assai poco comuni, eravi la graziosa Ortalidina *Otites Lamed*, che con sorpresa non trovasi menzionata nelle Ortalidine Italiane del Rondani, mentre è specie descritta e figurata dal Rossi col nome di *Musca pulchella*. In taluni punti umidi ed ombrosi era frequente il *Syngastron dasypus*, insieme ai due piccoli *Julus* simili a quelli raccolti su' monti del Limbara nell' anno precedente. Il canto delle Cicale era oltremodo molesto: però veniva dalla *Cicada orni*, che in generale nell' isola è meno diffusa della *cisticola,* perchè meno frequenti sono gli alberi su cui essa vive.

16. — Dopo altra breve visita alla precitata foresta, espressi alla mia guida il desiderio di raggiungere il fiume che mi si era detto scorrere non molto lungi dal paese. Però, dopo poco men che un'ora di cammino, anzichè presso le sponde di un fiume, mi trovo innanzi ad un corso di acqua cui que' naturali danno il nome di *frumine*, e che in realtà non è che un ruscello. Nulladimeno quelle acque erano ricche di Coleotteri acquatici; però nessuna specie che non avessi già incontrata. Notai soltanto che della *Notonecta glauca* eranvi tutte le diverse varietà, *glauca* p. d., *furcata* e *marmorata,* mentre ordinariamente è quest' ultima soltanto che ho trovato molto abbondante. Nella adiacente campagna raccolsi di meno comuni il *Gomphus excelsus,* l'*Ichneumon luctuosus* descritto da Gravenhorst sopra un individuo del Piemonte; la *Limenitis sibilla*, che può dirsi assai poco frequente nell' isola, e tra i prati prossimi alle sponde la *Oxycera formosa.*

La sera per poche ore mi dimenticai di trovarmi in piccolo ed infelice paese, passandole a pranzo presso la famiglia del Marchese di Laconi. La coltura de' due fratelli

e del cognato Marchese Leonelli, la squisita gentilezza delle signore, il lusso da cui ero circondato, tutto mi riconduceva a grande città.

17. — Mi reco alla montagna che sovrasta al paese formante parte del vasto *Arcidano di Laconi*. Per fino a che non si giunge all' altura incontrasi terreno incolto, nudo ovvero ricoperto da' consueti suffrutici, come Eriche, Cisti già secchi, Lentischi, Corbezzoli; cui più in alto si aggiunge il Tasso. La raccolta fu copiosa e di una certa importanza. Di Coleotteri citerò l' *Acmaeodera lanuginosa*, l'*Aphanisticus angustatus*, che non è riportato tra i Coleotteri abitanti della Sardegna; l'*Adimonia sardoa*, che sebbene dal Genè dicasi frequente nell'isola durante la state, io l' ho incontrata assai raramente; il *Pachybrachys anoguttatus*, che è pur raro. Di Lepidotteri raccolsi la *Protymia viridaria*, che giunsemi nuova e la cui larva pare viva sull' Erica, l' *Acidalia sericeata*, la *Buthalis acanthella* non trovatasi innanzi in Sardegna, la *Pseudophia tirrhaea*, la *Choreutis pretiosana*, che pareva non rara. Di Emitteri ricorderò il *Notochilus nervosus*, la *Psylla alaterni*. Di Ditteri era notevole la frequenza dell'*Asilus siculus*. Lo sterco bovino era brulicante di stafilinidei e Coprofagi, tra cui il *Leistotrophus marginalis*, gli *Oxytelus piceus* e *complanatus*, abbondantissimi, l' *Aphodius lugens*, ecc. Sotto i sassi trovo qualche individuo del *Ditomus rufipes* e dell'*Amara lucida*, ambedue specie che non trovansi segnate tra gli abitanti della Sardegna, l' *Othius fulvipennis*, che vi era stato rinvenuto sol da Ghiliani.

Sull' altura vi ha bosco di Elci. Su queste non rinvenivasi molto. Di Coleotteri non vi raccolsi che il *Brachyderes cribricollis*; che però bastava essa sola a compensare la pena, essendo specie che non è registrata ne' cataloghi de' Coleotteri Italiani. Di Emitteri il *Phytocoris populi* e la *Monanthia cardui*, che in prosieguo ho pure costantemente trovati sopra Elci. Lungo la via vedevasi svolazzare una buona specie di Bombilii che spiccava pel colore bianco argentino della folta peluria ond' è tutto rivestito il suo corpo. Era il *Systoechus lucidus*, che conoscevasi soltanto della Corsica. Pare che abiti in preferenza luoghi montuosi, avendolo in prosieguo incontrato anche sopra altri monti e non mai in basse pianure.

18. — A pochi chilometri da Laconi vi ha un piccolo paese denominato Meana Sardo, uno di quelli ai quali è impossibile l' accesso al forestiere per la mancanza di qualunque alloggio. In esso però abita il Dottor Giovanni Mura-Agus, giovane di bello ingegno e di vasta coltura scientifica: uno di coloro che è male restino quasi occultati in sì oscuri cunicoli. Egli mi rese possibile la esplorazione di quella contrada, offrendomi cortesemente ospitalità in propria casa. Sicchè lasciando Laconi mi diressi a quella volta, partendo alle 8 a. m. con carrozza espressamente inviatami dallo stesso sig. Mura. Uscito appena dal paese comincio ad osservare il *Satyrus Circe*, che non avevo visto nelle pianure, e che continuai ad incontrare in tutta la regione montuosa. A poca distanza da Laconi si traversa un foltissimo bosco di annose Elci, di cui rincrebbemi non aver conosciuta la esistenza, poichè avrebbe meritato una posata perlustrazione. Alle 10 sono a Meana, ove mi ebbi le più cordiali accoglienze dal sullodato dott. Mura e fratello. Alle 12 esco per la caccia, dirigendomi al sottoposto fiume denominato *Araxcis*. Sopra gli Alni *(Alnus glutinosa)* raccolgo per la prima volta la *Triodonta alni*. Nelle acque trovai non raro l' *Hydroporus Martinii*, che nell' anno precedente aveva rinvenuto soltanto in un rivolo presso Nuoro.

19. — Ritorno novellamente all'*Araxcis;* però, anzichè battere la via nazionale o

stradone, come i naturali la chiamano, m' immersi in terreni incolti posti alla destra di essa, e fu in questi che raccolsi svariate specie importanti, di cui ricorderò le principali. Dirò dapprima di un Dittero della famiglia degli Asilidei che mi giungeva del tutto nuovo, che descriverò col nome di *Saropogon perlatum*. Esso appariva di tratto in tratto sulla via, e pareva non dovesse esservi estremamente raro. Nelle condizioni medesime vedeansi il *Pison lurinei*, la *Tachytes procera*. Del genere *Mutilla* raccolsi tre interessanti specie, rappresentate tutte tre da individui maschi. L'una di esse è evidentemente la *calcariventris*, che pare sia stata la prima volta che si è trovata in Italia. La seconda sembra una semplice varietà della *hispanica*, anche nuova per l'Italia. La terza non è riferibile ad alcuna di quelle descritte nella monografia de' sigg. Sichel e Radoszowsky. Altri Imenotteri scavatori, del pari che qualche Tachinaria sabulicola erravano per la via. Fra gl' Imenotteri de' fiori merita esser menzionata la *Hylotoma rosae*, la quale, sebbene specie per sè stessa comune, pure per la Sardegna acquista speciale importanza, dappoichè le ricerche di questi altri due mesi non hanno smentito la generale scarsezza di Tentredinidei in tutta l'isola. Le sponde del fiume, sebbene ricche di vegetazione, pure poco mi offrirono d'interessante: sicchè menzionerò soltanto l' *Odontarsus caudatus* ne' prati.

La sera, dietro mia raccomandazione, il sig. Mura mi reca alcune Lucciole femmine. Erano la *Lampyris Lareynii*.

20. — Lascio Meana per passare ad Aritzo. Nel venire da Laconi avevo avvertito che le adiacenze della cantoniera *Fontana mela* avrebbero meritato una perlustrazione. E poichè per andare da Meana ad Aritzo bisogna per buon tratto retrocedere sulla via stessa di Laconi, pensai raggiungere la detta cantoniera, per passarvi almeno qualche ora. Partito a cavallo alle 7 a. m., battendo sempre la via nazionale, vi giungo alle ore 10 e mezzo. Esplorai un appezzamento palustre prossimo alla cantoniera, ma nulla vi trovai d'importante. Mi avvio pel *bosco di Santa Sofia;* ma l'ora essendosi inoltrata, fui costretto ad abbandonarlo. All' una p. m. mi rimetto a cavallo, e profittando qua e là delle scorciatoje, essendo la via carrozzabile assai lunga perchè in regione montuosa, alle 4 e mezzo giungo ad Aritzo, ove in un modesto alberguccio tenuto da un continentale potetti avere una discreta stanza.

21. — Aritzo è situata nella regione del Castagno e quindi d'ogni parte circondato da boschi di tali alberi, co' quali alternano in varii siti altri simili di Avellane. Siffatti boschi mi occuparono la prima giornata di permanenza in detto paese. Ed a giudicare dalle cose rinvenute in poche ore di ricerche si debbe ritenere che avrebbero meritato esplorazioni molto più prolungate. Di Nevrotteri vi rinvenni il *Dilar parthenopaeus*, graziosa specie che anche nelle provincie napoletane è abbastanza rara, e trovasi pure costantemente nei castagneti. Nell'ordine degli Emitteri trovai per la prima volta il *Malacocoris chlorizans*, che vive sulle Avellane delle cui foglie riproduce la tinta. Esso vi è piuttosto frequente. Due bellissime specie del gruppo delle Tripete cioè la *Philophylla onopordinis* ed un'altra assai più interessante riferibile al genere *Chaetostoma* di Rondani e che chiamerò *Ch. princeps*. In vicinanza di un rivolo d'acqua era abbondantissimo un Friganeideo del genere *Sericostoma*, che dal Mac Lachlan è stato giudicato nuovo, onde l'ho descritto intitolandolo a lui, *S. Maclachlanianum*.

22. — Visito il monte Chiesa *(monte cresia de Arizzu)*. Tutto il ridosso di questa non molto elevata montagna simiglia per vegetazione a quello della sopradescritta montagna

di Laconi, comparendo in alto un bosco di Elci, rese oggi in taluni punti assai rare per la distruzione continua che se ne fa sia con la scure, sia col fuoco. Anche questa escursione mi fruttò molte buone specie da me o non affatto conosciute o non ancora trovate in Sardegna. Fra le prime va registrato il *Macrocoleus aurantiacus,* grazioso Capsideo che non era raro sopra l'Erica; la *Bombyx franconica,* di cui pareva proprio quella l'epoca della schiusa; un minuto ed elegante *Phalangium.* Tra le seconde l'*Anisotoma calcarata*, il *Bacillus gallicus*, che sembra raro. Fu parimente interessante trovare, non raro sotto le pietre, il *Leistus fulvibarbis.* In luogo sabbioso erano nidi di Bembeci, intorno a' quali scorgevasi un continuo aggirarsi di individui, che carichi della preda cercavano immettersi nel foro che menava alle rispettive famiglie. Raccoltine varii, vi riconobbi la mia *Bembex melanostoma*, che vedeva per la prima volta vivente, avendola descritta ed effigiata sopra un vecchio individuo trovato nella collezione di Imenotteri sardi fatta dal Genè. Notai pertanto che tutti gl'individui predati erano maschi. — Nella regione boschiva delle Elci rinvenni sotto le cortecce di annosi alberi un *Apate varians* e varii individui morti dell'*Helops Genei.*

23. — Passo da Aritzo a Desulo, sempre a cavallo, mezzo di trasferta di cui mi avvalsi in prosieguo sino a Nuoro. Parto alle 10 a. m.: si batte la via nazionale che mena a Tonara. Dopo mezz'ora si passa per Belvì, ove i boschi di soli Noccioli sono ancora più estesi che in Aritzo ed avrebbero meritata una perlustrazione. Proseguendo, dopo altra mezz'ora s'incontra il vasto torrente denominato *Bau Desulo*, sul cui alveo, allora in gran parte scoperto, veggonsi qua e là torreggiare giganti alberi di noci. Quivi presso essendo una sorgente di fresca e limpida acqua, mi fermo per la colazione e per esplorare le sponde del torrente, le quali invero non mi offrirono molto. Ricorderò un individuo altro bellissimo della *Pseudophia tirrhaea*, che pareva essersi in quel momento liberato dallo inviluppo di pupa. Entro la sabbia del letto rimasto asciutto vedevasi penetrare qualcuna delle consuete Tachinarie.

Alle 2 p. m. mi rimetto in cammino. Da quel punto si lascia la via carrozzabile, che prosegue per Tonara, e si prendono sentieri spesso disastrosi, passando da monte a monte e traversando sovente folti boschi di Quercie-rovere. Alle ore 4,30 giungo a Desulo, il paese dalle tettoje di legno, nel quale m'interessava fare dimora non breve, essendo il più vicino alle alture del Gennargento, dal quale avrei in conseguenza avuta la opportunità di perlustrare tutto il versante occidentale, senza esser costretto a passare alcuna notte sulla nuda terra, come mi toccò nel 1881. Desulo però è paese che non offre alloggi di alcuna natura, la qual cosa m'imbarazzava e m'impensieriva, dappoichè dal soggiorno in quel paese dipendeva l'effettuazione di una delle parti più importanti del programma di quel viaggio. Mi diressi dal Sindaco sig. Giuseppe Zanda, delle cui ottime qualità ero già stato informato dal Marchese di Laconi. Ed il fatto corrispose perfettamente alla prevenzione. Egli, valente nelle Belle Arti e sopratutto nella scoltura che apprese a Roma, ed apprezzatore delle Lettere e delle Scienze, spiegò per me un vivissimo interesse. Ospitatomi provvisoriamente nella sua stessa casa, aderendo al mio desiderio mi procurò una stanza nella quale fossi stato libero ed indipendente, organizzando egli stesso l'occorrente pel vitto e quanto poteva abbisognarmi per guide e cavalli, rendendo per tal modo possibile il mio piano d'investigazioni.

24. — Ritorno in uno de' boschi di quercie traversato il giorno innanzi e che erami sembrato non dovesse rimaner trascurato. Però rimasi deluso. D'interessante, perchè non ancora rinvenuta, vi fu soltanto la *Laphria dioctriaeformis.*

25. — Il dubbio che le condizioni atmosferiche in allora buone, non si fossero mutate, mi fece determinare a recarmi subito alla vetta del Gennargento, rimandando ai giorni successivi la esplorazione de' diversi monti che rimangono tra mezzo.

Parto alle 7 a. m. a cavallo. Superata la regione de'castagni, de' quali s' incontrano de' colossali aventi tronchi che misurano fino a dieci metri in circonferenza, alle 8 sono in una contrada denominata *Tascusi*, ove comincia la regione quasi nuda. Ivi fo un' ora di sosta. Sotto le pietre sparse qua e là rinvenni non raro il *Pachymerus Douglasi*, bellina specie, una di quelle che la Sardegna ha di comune con la Corsica, mentre nel continente d' Italia non si trova.

Traversando le altre diverse alture che si succedono le une alle altre successivamente più elevate, alle 12 sono a *Bruncu spina*, ove è il punto più alto del Gennargento e però dell' intera isola, nel quale trovasi tuttavia un mucchio di pietre, avanzo della piramide fattavi costruire dal generale La Marmora pe' suoi lavori geodetici e che perciò va denominato *Torre di La Marmora:* punto che può veramente dirsi il Belvedere della Sardegna. Presso quegli avanzi mi fermai a far colazione, propinando alla memoria dell' illustre e laborioso Geologo Italiano. Indi percorsi tutta la cresta che s' interpone tra *Bruncu spina* e *Bruncu Paulina*.

Tutta l' altura del Gennargento ha vegetazione assai limitata. Il piccolo Ginepro *(Juniperus nana)* protendendosi quasi sul suolo ne ricopre qua e là ampie superficie, aggiungendovisi la *Berberis aetnensis*. La *Digitalis purpurea*, allora in piena fioritura, vi è disseminata tutto intorno que' monti più alti. Le specie di viventi animali che potevano dirsi più caratteristiche di quella elevata regione erano la *Psammophila ebenina*, la *Vanessa urticae*, l'*Argynnis Elisa*. Anche di altri Lepidotteri diurni vedevansi svolazzare individui, ma erano specie di regioni più basse, che si elevavano eventualmente. Di Ditteri svolazzava in certo numero il *Syrphus corollae*, sopratutto presso la Torre La Marmora, sulla cui ultima pietra vidi ancora poggiata una *Cephalemyia ovis*. Sollevando i sassi era notevole la copia d'individui insieme radunati della *Coccinella 7-punctata* e della *Carpocoris verbasci*. La *Aphlebia sardoa* non vi era rara, mentre trovasi ancora in assoluta pianura al livello del mare. Da sotto altri macigni levavansi a volo varii individui della *Depressaria badiella* ivi rifugiati. La specie poi interessante che mi si offerse in quell' altura fu la graziosissima Buprestide *Poecilonota festiva*, che in Sardegna dicesi trovata soltanto dal Ghiliani. Pare che la larva di questa piccola Buprestide viva ne' tronchi del Ginepro nano, sui rami del quale trovai pure l'immagine.

Giunto al *Bruncu Paulina* mi trovavo in luogo da me già conosciuto, essendo stata la sola altura del Gennargento calcata nel settembre 1881. E poichè ricordavo le specie importanti e caratteristiche rinvenutevi in quell'epoca, ne feci speciale ricerca per constatare se costante fosse la loro ubicazione in quel sito. Esse erano il *Cymindis Marmorae*, l'*Opatrum nivale* e l'*Asida glacialis*. Tutte tre le trovai: la prima e la terza in piccol numero, la seconda assai abbondante. Oltre a queste, piacquemi trovare, ancor sotto macigni, due buone specie di Araneidei, un giovane *Eresus*, forse il *ruficapillus* ed il *Lithyphantes corollatus*.

Alle 4 $^1/_4$ fu forza desistere da ogni ricerca, poichè ben lunga era la via per giungere di ritorno a Desulo. In fatti, battendo un sentiere più corto e perciò più disastroso, e che fu mestieri percorrere in massima parte a piedi, dopo tre ore si giunse in paese.

26.—Esploro un bosco di Castagni in un rialto detto *Sedda de su laccu*, distante circa due chilometri dall'abitato. Al piede degli alberi eranvi varii Carabidei, tra quali il *Carabus Genei* e la *Nebria rubicunda*, che dopo Aggius (nell'anno precedente) non avevo più incontrata, siccome neppure nel viaggio presente ho vista altrove. In adiacente prateria mista a' consueti suffruttici raccolgo la *Chrysobothris affinis*, l'*Anthaxia scutellaris*, la *Sesia uroceriformis*. Era poi abbondante la *Tibicina luctuosa*, sì da confermarmi nella mia primitiva idea, che cioè delle diverse specie di Cicale che abitano l'isola, questa viva in preferenza ne' luoghi montuosi assai elevati.

27.—Una delle valli più interessanti sottoposte immediatamente al Gennargento è quella che s'intitola da una sorgente di acqua conosciuta col nome di *saminda* (la minda) o *fontana minda*. La visitai in questo quarto giorno di dimora in Desulo. Mossi dal paese, a cavallo, alle 7 del mattino. Il sig. Zadda volle tenermi compagnia. Superata la regione de'castagni si è in una spianata denominata *lattalè*, ove v'ha una fonte nella quale è usanza di tutti coloro che vi transitano con cavalli fermarsi per farli abbeverare. Profitto di questo brevissimo riposo per ricercare qualche cosa; ed in fatti mi si presenta quella graziosa Piralide che è la *Botys limbopunctalis*. Proseguendo il cammino entrasi nella regione dell'Elci, si passa per un luogo detto *Gudetergiu*, si traversa un burrone in fondo al quale scorre il rivolo *setidà* e, passando da monte a monte, alle ore undici e mezzo siamo nella valle di *sa minda*, percorsa da piccolo torrente originato dalla sorgente dello stesso nome, e sulle cui sponde sono numerosi alberi di *Alnus glutinosa*. Ci fermiamo qui presso per far colazione: dopo di che mi occupo ad esplorare ciò che i detti Alni mi avrebbero potuto offrire: e fu una caccia veramente interessante, avendo tra l'altro rinvenuta una bella specie di *Cryptocephalus* non trovato in alcun altro posto e che sembra specie non descritta. Eranvi la *Triodonta alni* con qualche varietà, l'*Helodes Genei*, la *Psylla Foersteri*, il *Nematus septentrionalis*, che costituiva novella aggiunta a' pochi Tentredinidei di tutta l'isola, varie minute specie di Capsidei e di Cicadarie, un secondo individuo della *Chaetostoma* trovata già ne' boschi di Aritzo; la *Selis aurata*, friganeideo conosciuto solo di Corsica e Sicilia. — Nella campagna adiacente e quasi nuda non era raro il *Cymindis lineata*, e nel tempo stesso trovai un individuo di *Cym. humeralis*. Di Miriapodi potevasi raccogliere la consueta Scolopendra e qualchè *Cryptops*. Innanzi di abbandonare la valle ascendiamo sino all'ovile, ove que' buoni pastori vollero farci gustare la *quagliata* allora confezionata. Alle 3 $^1/_2$ p. m. ci rimettiamo in ritirata, e tirando giù per un sentiere più breve ma bastanza disastroso e quindi percorso in buona parte a piede, alle ore sette siamo in paese.

28. — Quando da *Gudutergiu* si va a *sa minda* si presenta sempre allo sguardo sulla destra un monticello che si eleva isolato in forma di ottuso cono rivestito di folto bosco di Elci, denominato *Girgini*. Nel vederlo da lungi il giorno innanzi mi proposi di visitarlo, sopratutto per fare indagini nel bosco. Ripassando per la contrada *lattalè*, che aveami lasciato desiderio di più posata perlustrazione, mi vi trattenni alcune ore. Lungo un esile rivolo che si genera dalla fonte già indicata rinvenni tra piante umide la *Livia juncorum*. In altro punto sabbioso scorgo numerose *Bembex* aggirantisi in vicinanza dei loro nidi, con volo basso e meno rapido delle altre congeneri; sicchè riusciva men disagevole dar loro la caccia. Era la *Bembex melanostoma*. Notai intanto che anche questi erano individui tutti maschi. Tra i molti però eranvi alcuni che si appartenevano alla *Bembex Geneana* descritta pure da me come propria della Sardegna, e questi erano tutti

femmine. Siffatta circostanza fecemi nascere il dubbio che le due *Bembex* menzionate fossero soltanto i due sessi di una specie sola.

Alle 12 mi rimetto in cammino e dopo altra ora e mezzo sono nel Bosco di Girgini. Le indagini sopra le Elci poco fruttarono. Eranvi abbondanti il *Brachyderes cribricollis* già trovato su quelle della montagna di Laconi, il *Phytocoris populi*, la *Monanthia cardui*. Vi furono di nuovo soltanto le Psille, di cui in tante elci perlustrate in isvariate regioni dell'isola non mai una sola eramisi presentata. E fui meravigliato dal trovarvi, oltre alla *Arytaina genistae* che può dirsi la specie meno eventuale, anche alcuni individui della *Homotoma ficus*, che non sembravano esservi capitati per caso, poichè per quanto avessi indagato, di fichi non ve ne era alcuno in quelle vicinanze, nè coltivato, nè salvatico. — Alla base del cono vi ha terreno bagnato da un rigagnolo, e nella prateria umida circostante trovavansi il *Pithanus Maerkelii*, e varii Iassidei.—La sera il sig. Zadda mi fa trovare varie lucciole femmine, nelle quali riconosco la stessa *Lampyris Lareynii* già trovata a Meana. E tra i diversi individui eravene qualcuno notevole per gli elitri assai prolungatiin dietro nel margine esterno.

29. — Fin dalle prime ore del mattino il cielo mostravasi coperto di nubi dense e minacciose: per lo che stimai prudente attendere, anzichè avventurarmi nella campagna, che ovunque manca di ogni ricovero. Alle ore dieci in fatti una forte pioggia cominciò a cadere, la quale cessò soltanto nelle ore pomeridiane. Passai quindi la giornata in lavoro camerale.

30. — La serenità era ritornata perfetta, e destino la giornata per visitare il vicino paese Tonara. Il terreno che si percorre è in gran parte incolto, ora a suffruttici, ora a bosco. Sopra l'Erica non era rara la *Crepidodera lineata*. Sopra le giovani Elci rinvenni quel grazioso Pteromalino che è il *Comys scutellaris*, di cui altro individuo avevo trovato, anche su giovani Elci, nell'anno precedente nella valle del Gologone [1]). Di Lepidotteri notavasi un'abbondante schiusa della *Porthesia auriflua* e qualche *Catocala nymphaea*.

Tonara è situato quasi all'altezza stessa di Desulo, ma in posizione assai più ridente, avendo innanzi di sè una estesissima ed ampia valle. Benchè poche ore avessi potuto trattenermivi, pure potetti in quelle adiacenze raccogliere specie non comuni, come il *Priocnemis abdominalis* che sembra a bastanza raro, ed una specie di *Harpactes*, della quale parlerò nella parte terza.

31. — Ritorno sulla via del Gennargento battuta il giorno 25, giungendo però soltanto sino alla fontana di *Sagerinasè*, a fine di meglio perlustrare que' luoghi, che nel citato giorno avevo traversati a cavallo. In tratto di terreno sabbioso incontro nuovamente nidi delle *Bembex melanostoma* e *geneana*, e mi confermo nella idea che la seconda è la femmina della prima. Ivi stesso non erano rari l'*Ammophila rubriventris*, la *Dryudella Spinolae*.—Le indagini sopra le annose Quercie-rovere che trovansi sparse qua e là mi diedero buone specie. Tra i Microlepidotteri vi raccolsi la *Trachonitis cristella*. Di Ditteri era piuttosto abbondante l'*Oycodes gibbosus*, solo rappresentante della famiglia dei Cirtidei che finora conosco dell'isola. Anche su queste quercie eravi la *Arytaina genistae* trovata a Girgini sopra le Elci.

La sera, ultima della mia dimora in Desulo, una grata sorpresa mi vien recata dal Sig. Zadda con un bellissimo individuo vivente del *Plutonium Zwierleini* che era stato

[1]) Non trovasi menzionato nella memoria seconda, perchè in allora non l'avevo ancora studiato.

rinvenuto da una contadina entro lo stesso abitato tra macerie. Assicuravasi ancora non essere stata quella la prima volta che s'imbattevano in siffatto animale.

Agosto

1. — Sebbene i fatti mi avessero dimostrato di quanta importanza fossero per la Fauna le ricerche in quella catena di monti posti tra Desulo ed il Gennargento e risultasse evidente la utilità di una lunga dimora, pure fu forza lasciarla e passare oltre, volendo rivedere una località ancor essa interessante, la valle di *Correboi*, ove è lo stabilimento minerario da me già visitato nel settembre 1881. La distanza che separa Correboi da Desulo è considerevole, e la via a bastanza disastrosa, dovendosi scavalcare il Gennargento. Nulladimeno, non essendovi alcun posto intermedio nel quale poter passare la notte, era necessità fare una sola tirata. Partito a cavallo di buon'ora, batto la via stessa che a quel monte conduce e già fatta il dì 25. Però, un poco prima di salire a *Bruncu Spina*, divergendo a sinistra, raggiungiamo la fontana di *campu alàse*, ove si fa sosta per circa un'ora, sia per la colazione, sia per dare un po' di riposo ai cavalli. Nel rimontare a piedi per toccare l'altura di *Bruncu Spina*, percorrendo un sentiere scavato tra macigni, trovo abbondanti Geometre riferibili alla *Pseudoterpna coronillaria* ed alla *Cidaria coraciata*. Costeggiando sempre la cresta del Gennargento da *Bruncu Spina* si va sino a *Bruncu Paulina*. Di qua si comincia a discendere a piedi per via ripida e disastrosa, passando per la contrada detta *troncone* si raggiunge il fiume *Perdas de cuaddu*. Il medesimo cammino avevo fatto nel settembre 1881, e ricordavo che in vicinanza del *troncone* avevo raccolta la bella e rara geometra *Acidalia proximaria*. Ne feci quindi speciale ricerca, sia per l'interesse di procurarne altri individui, sia per riconoscere se vivesse pure in quella stagione; ma fu opera vana. Anche presso le sponde di questo fiume mi trattengo un'ora, interessandomi ricercare alcune specie rinvenutevi nel 1881. In fatti vi trovai il *Pachybrachys riguus*, che vive sopra i Tamarici [1]). Sulle piante stesse raccolsi l'*Apion vernale*, specie che quantunque in generale sia molto diffusa, nella Sardegna per quanto a me consta è rara a bastanza. Rimessomi a cavallo, alle cinque, dopo poco men che altre due ore di cammino giungo allo stabilimento minerario di Correboi. Il sig. Giovanni Rozzetti, del quale già nel settembre 1881 avevo sperimentata la squisita gentilezza, mi accoglie con eguale cordialità. E poichè lo stabilimento erasi accresciuto di altro fabbricato, potette assegnarmi una stanza ch'io non avrei saputo desiderare migliore. Inutile il parlare del trattamento pel vitto: dirò soltanto esser somma ventura pe' naturalisti che viaggiano per la Sardegna che in un posto tanto interessante si trovi una ospitalità di tal genere.

2. — Passo la giornata nella valle stessa di Correboi. Poco lungi dallo stabilimento vi ha buon numero di *Taxus baccata:* comincio dal dirigere su queste piante le mie esplorazioni. Con piacere vi trovo il *Ciphostethus tristriatus*, che non era stato ancora indicato come abitante la Sardegna. Le larve e ninfe erano più numerose delle immagini; prova evidente ch'era appunto quella la stagione in cui cominciava a raggiungere lo sviluppo completo. Abbondantissima eravi pure una *Livia* per me dubbia, che in seguito trovai pur costantemente sopra Tassi e non mai sopra altra pianta. Di molto interesse furono

[1]) Anche questa specie non trovasi menzionata nella prima memoria perchè mi avanzano dubbi intorno alla determinazione di essa.

ancora due individui (un maschio ed una femmina) di una *Ephippigera* che giungeami nuova. Essa però non era, come le altre menzionate, esclusiva de' Tassi, avendo più tardi trovato un terzo individuo sopra Tamarici. Sembra però abbastanza rara; dappoichè avendone in tutta la giornata fatta ricerca ovunque, non più che le tre cennate potetti rinvenire: nè in seguito l'ho più riveduta. La parte maggiore della valle è popolata da Elci, con le quali si alternano i suffruttici e le praterie naturali. Parecchie furono le specie buone raccoltevi. Ricorderò tra esse l'*Anobium costatum*, l'*Arocatus melanocephalus* e propriamente quella varietà che il Puton indica come avuta da Corsica, la *Oxycera formosa*, una *Zophodia* affine alla *tephrinella*, la *Cassida hemisphaerica* non registrata tra i Coleotteri sardi, ecc.

3.—Visito un'altura che domina quella valle, denominata *Monte nuovo*, scendendo nel versante occidentale di esso, ove vi ha esteso, ma non folto bosco di quercie. Su queste erano piuttosto abbondanti alcuni minuti e non ordinarii capsidei, come lo *Sthenarus pusillus*. Nei prati raccolsi la *Aphalara exilis*.

4. — Non ostante le cordiali istanze del Sig. Rozzetti perchè avessi prolungata ancora di qualche altro giorno la mia dimora, e la importanza del luogo, fui costretto lasciarla e procedere oltre. Da quel punto si entra nel Distretto di Nuoro, le cui campagne, come nelle altre mie precedenti relazioni ho notato, sono tutt'altro che sicure; ed in quell'anno lo erano ancor meno che ne' precedenti. Cominciai quindi a far uso della scorta di Carabinieri, i quali ricambiandosi dall'una all'altra stazione non mi lasciarono che a Nuoro. Alle ore sei e mezzo del mattino lascio Correboi. Dopo due ore di cammino si giunge ad una cantoniera, ove mi fermo mezz'ora per frugare in certe annose quercie sparse nel vicinato. Nulla d'importante, meno i minuti Capsidei trovati già a Monte nuovo. Alle ore dieci sono a Fonni, il paese più elevato della Sardegna, stando mille metri sul livello del mare, poggiato quasi per intero sopra bellissimo granito. Avendo trovata occupata la stanza da me tenuta nel 1881, sulla quale facevo assegnamento, ci volle tutta l'attività della mia guida Melone per trovarne un'altra, che fu presso una Rosolia Palmas Carboni, della quale non ebbi a rimanere scontento.

Onde profittare del rimanente della giornata esco a far caccia in una prateria poco discosta dal paese. E fui fortunato; chè in poche ore e senza far molto cammino rinvenni parecchie specie interessanti non prima trovate e che neppure in prosieguo ho riveduto in altri posti. Ricorderò tra Coleotteri l'*Agrilus biguttatus*, che non figurava tra i Coleotteri della Sardegna; tra gli Emitteri l'*Oncotylus nigricornis* e la *Monanthia eryngii*; tra gl'Imenotteri una *Leucospis* di cui sarà detto nella parte terza.

5. — Alle ore 6 del mattino sono svegliato da forti e ripetuti tuoni, i quali echeggiando tra quelle estese valli si moltiplicavano oltre modo. Una dirotta pioggia succede. Non appena questa si fu rallentata esco per l'attigua campagna in cerca de' *Cebrio*, che pareami non avessero dovuto mancare; ma neppur uno ne incontrai. Probabilmente non si elevano sino a quell'altezza, ma si mantengono in regioni più basse. Più tardi, cessata del tutto la pioggia, ritorno alla caccia, dirigendomi, a piedi, per la via che mena a Gavoi. Tra le cose raccolte ricorderò la *Emenadia bimaculata* e la *Calymnia trapezina*.

6. — Parto alle 7 a. m. e tirando diritto, a cavallo, alle dieci sono a Gavoi. Avendo bisogno di far riposare i cavalli nelle ore canicolari e di rifucillare anche un tantino lo stomaco, si cerca di qualche osteria, e ne venne presto indicata quella di Giovanni Zedda alla quale si va. E che osteria! Ad ogni modo, poichè il paese non offriva di meglio,

chiudendo non un solo degli occhi, ma mezzo ancora dell'altro, vi presi un ristoro ed uscii immediatamente in campagna; ma in vero assai poco potetti raccogliere, a causa che le campagne circostanti al paese, non ostante in sito abbastanza elevato, sono completamente messe a coltura. E qui mi cade in acconcio il notare come sia molto ingiusta ed erronea l'opinione generalmente dominante nel continente che i Sardi siano poco curanti della coltura della terra. Con moltissimi esempii ho potuto invece convincermi che ovunque vi ha un filo di acqua e pochi centimetri di spessezza di terreno in cui può penetrare la zappa, l'industre sardo vi apporta l'opera sua e lo mette a coltura. Soltanto quando non basta il capitale lavoro, ma deve concorrere il capitale moneta, allora l'operaio si arresta.

Alle 2 pom. lascio Gavoi ed alle sei giungo ad Orani. Questo paese sebbene non sia degli ultimi della Sardegna, e non manchi di famiglie distinte, pure l'è uno di quelli poco accessibili per mancanza di alloggio. Ed io mi sarei trovato assai imbarazzato, se il sig. Giovanni Cossu Carboni, maestro elementare municipale non mi avesse, con inattesa cortesia, data ospitalità nella propria casa.

7. — Non volendo rimanere la intera giornata in Orani, ma invece passare la sera a Nuoro, destinai le ore del mattino per perlustrare un bosco di quercie distante circa due chilometri dal paese, e che io avevo osservato il giorno innanzi essendo sulla via battuta. Non mancavano buone specie, di cui si troveranno i nomi nel catalogo che farà seguito a questa relazione. Voglio notare la frequenza del *Pison Jurinei*. Essendovi in un punto del bosco piccola scaturiggine di acqua, i *Pison* vedevansi andare e ritornare sui sassolini subimmersi a fine di abbeverarsi, come ha luogo per molti altri Imenotteri e Ditteri.

Alle 2 pom. parto da Orani ed alle 7 sono a Nuoro, ponendo termine ad una maniera di viaggiare che defatiga oltremodo, e che soltanto una cieca ed incondizionata passione può far tollerare. Nuoro era città da me ben conosciuta. E poichè erami già trovato poco soddisfatto di due alberghi, volli sperimentarne un terzo, l'*Albergo degli Amici*, posto sulla via principale, e che mi veniva additato come molto migliore degli altri: superiorità che riconobbi discutibile.

8. — La copia di materiali raccolti in tutto il periodo del viaggio a cavallo m'impose di sistemarli e sbarazzarmene, e quindi rimanere in casa la intera giornata.

9. — Sarebbe stato mio desiderio recarmi ancor questa volta ad Oliena a fine di perlustrare nuovamente la valle del Gologone, che tanti oggetti interessanti aveami offerto nel giugno dell'anno precedente; ma per la ristrettezza del tempo dovetti rinunziarvi. Mi limitai quindi a percorrere una parte soltanto della via che mena a quel paese col proponimento di raggiungere il rivolo di acqua, che aveami date buone specie di Coleotteri. La campagna percorsa, ricca di svariate piante in piena fioritura, fecemi arricchire di varii interessanti Imenotteri e Ditteri la collezione. Tra i primi ricorderò uno che giunsemi nuovo del tutto. Tra i secondi vidi per la prima volta nell'isola l'*Exoprosopa grandis*, che parea non vi fosse molto rara, quantunque per la estrema rapidità del suo volo due soli individui avessi potuto chiapparne. Raggiunsi una sorgente di acqua dalla quale si genera un rivolo che scorre tra massi granitici; ed in un riposo di essa eravi tra gli altri l'*Hydroporus pubescens* non prima trovato, nè segnato tra gl'inquilini della Sardegna. Interessante fu pure il rinvenimento di una specie di *Cypris* diversa da quella nell'aprile dell'anno precedente raccolta presso Assemini *(C. sardoa)* per essere più piccola e di color verdastro quando l'animale è vivente.

10. — A pochi minuti del mattino parto con la solita corriera postale. Alle ore dieci sono a Macomer, di dove col treno ferroviario delle undici meno un quarto mi reco ad Oristano, giungendovi alle ore due pomeridiane.

In ambedue le mie precedenti peregrinazioni Oristano è stata la città nella quale ho fatto più lunga dimora. Quelle condizioni medesime che rendono l'aria poco salubre, per cui Oristano vien detta la tomba de' forestieri, a causa del facile svilupparsi delle febbri miasmatiche pe' molteplici stagni onde è circondata, dànno a quelle campagne una straordinaria importanza pel zoologo. Ancor questa volta mi vi son fermato otto giorni, sia per rivedere luoghi già conosciuti, sia per esplorarne qualcuno non visitato ne' due anni precedenti.

11-12-13. — Cominciai le mie esplorazioni dalle sponde del Tirso. La via che dalla città mena al grande ponte posto a cavaliere del fiume è fiancheggiata da più o meno annosi *Populus alba*. Su' tronchi di taluni di tali alberi erano grossi funghi del comune Agarico da esca, intorno ai quali vidi aggirarsi molti individui di un grazioso dittero, nel quale con soddisfazione riconobbi la *Myennis fasciata*, che non conoscevo in natura. In altri era poggiata qualche *Psecadia bipunctella*, di recente schiusa. Da un altro sbucava allora una *Dircaea aenea*. Sul fogliame era costante l'abbondanza della *Monosteira unicostata*.

Le sponde del Tirso erano in condizioni ben diverse da quelle in cui le aveva trovate l'anno innanzi nel maggio. Ritiratesi le acque, il letto sabbioso era rimasto per buona parte nudo ed asciutto e le sponde aridissime. Da che si rileva agevolmente che non poteasi più vedere la copia di Carabicini e Brachelitri. In vece in quelle sabbie rimaste a scoperto ed asciutte aveano il loro covo varii Imenotteri scavatori, Ditteri Tachinarii e minuti Asilidei. — La campagna adiacente, sebbene ricoperta di piante già secche, rimanendovi in fiore soltanto alcune ombrellifere, non mancò di darmi delle specie interessanti. E dapprima notai la frequenza del *Gomphus excelsus*, quale non ho vista altrove. Di Imenotteri scavatori era notevole l'abbondanza della *Notoglossa frondigera* rappresentata da individui di ambo i sessi, sì da far svanire completamente ogni sospetto intorno ai suoi rapporti con la *N. diphylla*. Interessantissimo poi fu una singolare specie di *Crossocerus*. Incontrai per la prima volta il *Vipio algiricus* descritto da Lucas tra gl' Insetti dell' Algeria, ove dice averlo trovato in giugno sopra la *Thapsia garganica*. Da che si rileva che nell'Algeria le Tapsie si mantengono in fiore in stagione più inoltrata che nella Sardegna, nella cui parte meridionale sono già completamente secche al termine di maggio, solo nella settentrionale e sopra i monti avanzandone poche nei primi di giugno. Anche fra Ditteri fu interessantissima la *Sphaerophoria flavicauda*, che è specie nuova per l'Italia. Lo *Ctenodecticus costulatus* non era raro. Tra gli Emitteri rinvenni una bellissima varietà della *Nezara viridula*.

14. — Oltre ai diversi stagni nel senso sardo, ossia vasti seni di mare, disseminati nel Campidano di Oristano, ve n'ha uno chiamato *Stagno di Palmas* dal piccolo paese cui è attiguo, che l'è un pantano di acqua dolce, non mai da me visitato. Un piccolo veicolo mi conduce al nominato paese distante pochi chilometri. Da esso a piedi raggiungo lo stagno. La campagna percorsa era incolta ed arida. Vedeasi qua e là svolazzare qualche *Priocnemis croceicornis*, specie sempre rara e che finora in tutta l'isola non ho incontrata che nel Campidano di Oristano, non che il *Priocnemis infumatus*, che sembra ancora più raro. Rinvengo il *Gastrichelius nubeculipennis* da me descritto tra gl'In-

setti della Calabria. Sopra qualche Tamarice rinvenni la *Aphalara tamaricis,* che pare sia assai poco diffusa, dappoichè in centinaja di Tamarici fino allora esplorati non mi si era mai presentata. — Le acque dello Stagno ritiratesi di molto per la inoltrata stagione lasciavano ampii margini maremmosi irti di canne ed esalanti ingratissimo odore i quali non permetterono punto di avvicinarvisi. Mi fu quindi impossibile fare alcuna ricerca nelle acque stesse.

15.—Nella peregrinazione della primavera del 1882 Milis occupa un posto importante per le molte buone specie d'Imenotteri soprattutto apiarii che vi raccolsi; ma nella circostanza attuale tutto era cangiato. Mutate le condizioni della vegetazione, il richiamo di que' Melitofili era sparito, e però non un solo se ne vedea. Mi trattenni invece lungo un piccolo torrente fiancheggiato d'ambo i lati dalle cinte de' poderi, ed il cui letto in parte a nudo permettea di traversarlo qua e là passando dall'una all'altra sponda. Sulle cinte de' poderi eranvi Quercie e frequenti Allori. Sebbene non fosse stata abbondante la caccia, pure specie interessanti e non trovate in altro sito ve ne furono. Ed in prima menzionerò una specie di *Sisyra* diversa dalla comune *fuscata* e che ho già descritta col nome di *iridipennis* [1]). Del genere *Chrysopa,* di cui fino allora non aveva visto che la volgarissima *perla,* rinvenni altra specie, la *Chr. neglecta.* Scuotendo le quercie ne venivano fuori individui di una bella *Catocala,* che non ancora ho potuto determinare. Sopra il *Laurus nobilis* eravi una Psilla che è andata sperduta. Sulle acque si aggiravano i *Gyrinus bicolor* ed *angustatus.*

16. — Anche Fordongianus era località che conobbi nel precedente anno; però non vi passai che qualche ora soltanto. In questa seconda visita vi rimasi un tempo più lungo; e se avessi anticipatamente saputo ch'eravi opportunità di pernottare presso un contadino Giovanni Crispajo, da cui ebbi cordiale accoglienza per far la colazione, vi sarei rimasto un pajo di giorni. Le sponde del Tirso erano quelle che richiamano l' attenzione. Esse, come in altri punti del lungo corso di quel fiume, erano aride e nude per le acque assai basse e ristrette. Il tratto di viarella che dal ponte mena alle terme [2]) è sabbioso, e tra essa e la sponda del fiume vi ha Tamarici. Intorno a quel terreno sabbioso, che a guardarlo pareva non dovesse offrire alcuna cosa, rimasi ben cinque ore, essendomi ben presto avveduto aggirarvisi parecchie specie di Imenotteri e di Ditteri che aveano in quella sabbia i loro nidi. Non starò qui a menzionare tutte le specie raccolte, ma mi limiterò ad accennarne le più importanti. Tra gl'Imenotteri scavatori per la prima volta vidi il *Miscophus bicolor.* Di Ditteri erano frequenti i piccoli *Stichopogon inaequalis;* ma tra i molti individui taluni ve ne erano che dagli ordinarii si differivano e che in realtà debbono essere considerati specie distinta. Ciò che però costituì il frutto più interessante della giornata fu il rinvenimento di un *Midas* che può considerarsi come un fatto di molta importanza per la geografia entomologica in generale. E per vero, di un tal genere, ricco di specie esotiche, in Europa se ne son trovati soltanto nel Portogallo e nella Spagna. In quanto all'Italia, il Westwood ne ha descritto uno cui dà per patria la Sicilia, però anche con dubbio. Il *Midas* di Sardegna pare debba specificamente essere assai affine a quello descritto dal chiaro entomologo di Oxford, ma non si confà completamente alla descrizione datane. Laonde lo denominerò *Midas sardous.* Esso venne sorpreso nel momento in cui s'interrava nella sabbia. Per quanto avessi prolungate le indagini, non fu possibile vederne un secondo individuo.

[1]) Nota sopra i Nevrotteri della Sardegna.
[2]) Veggasi la relazione che fa parte della Memoria seconda.

17.— Sebbene lo Stagno di Cabras fosse stato varie volte da me esplorato, pure il suo perimetro è sì vasto e le condizioni della campagna circostante tanto svariate, da offrir sempre campo nuovo alle indagini. Questa volta mi trattenni in preferenza intorno a quella parte che più si avvicina alla sponda del mare. Il terreno nel brevissimo tratto che separa i lembi delle acque è sabbioso ed in gran parte nudo. Sotto i detriti vegetali presso la sponda vi trovai per la prima volta il *Pogonus chalceus*. D'Imenotteri scavatori raccolsi, tra gli altri, un individuo bellissimo della *Notoglossa diphylla* ed il *Miscophus bicolor*. Non mancavano le Tachinarie sabulicole, e la varietà candida dello *Sphingonotus coerulans*.

18. — Uno degli Stagni più estesi del Campidano di Oristano è quello denominato *Stagno di Sassu*, distante circa nove chilometri dalla città di Oristano, esteso in lunghezza da oriente ad occidente assai più che in ampiezza. Non l'avevo mai visitato. Partendo alle 7 a. m. con piccola carrozza, passando pel paese Santa Giusta, costeggiando per lungo tratto lo Stagno dello stesso nome, battendo un sentiere sabbioso tracciato interamente tra campagne in buona parte incolte e destinate a pascolo, alle ore nove giungo presso la sponda dello stagno, fermandomi alla Peschiera, proprietà del Cavaliere Pasquale Cao, ricco negoziante di Cagliari: unico fabbricato che sia in quella contrada. Le adiacenze dello stagno nel lato in cui io mi trovavo erano in gran parte rivestite di salsole, cui si aggiungevano qua e là giunchi ed in qualche punto della sponda canne e giovani Tamarici: condizioni promettitrici di buona messe. Le perlustrazioni durarono dal momento dell'arrivo sino alle ore tre del giorno, interrotte solo dalla colazione, per la quale il fattore molto gentilmente non solo mise a mia disposizione una stanza superiore dell'edifizio che il proprietario tiene riserbato per sè, ma volle farmi gustare gli squisiti muggini che nello Stagno si pescano. Le specie più interessanti furono in Emitteri. Tra le Salsole, come presso lo stagno di Cagliari nel settembre 1881, eranvi il *Brachynema cinctum*, rappresentato da pochi individui, e l'*Histeropterum camelus* abbondante. Sulle Salsole ancora ed altre piante trovavasi quel grazioso Tingitideo che è la *Piesma quadrata*, che vedevo per la prima volta. Di Aracnidi non era rara la *Cyclosa insulana*. Di Coleotteri rinvenni il *Lixus lateralis*, che non è segnato della Sardegna.

Prima di lasciare quel posto volli vedere la spiaggia del mare, là dove è la foce dello Stagno. Movendo dalla peschiera a piedi, ed andando diritto, vi impiegai appena mezz'ora. Non avendomi però offerto alcuna cosa, l'abbandonai ben presto.

19. — Da Oristano passo a Sassari per ferrovia, partendo alle ore 10,10 a. m. e giungendo alle 5,25 p. m.

20. — Nel mattino visito il Gabinetto zoologico della Università, della cui povertà non rimasi meravigliato, sapendo come esso fosse soltanto da pochi anni iniziato dal prof. Fanzago. Nondimeno sono pregevoli varii uccelli sardi rappresentati da individui bellissimi e molto ben preparati dal Bonomi.

Già da varii mesi era stata constatata la presenza della Fillossera nel Sassarese, e le esplorazioni cominciate nel giugno proseguivano attive a fine di determinare la estensione e la intensità della infezione. Il prof. Freda, Ispettore del Ministero di Agricoltura e Commercio, che trovavasi appunto in Sassari per sopraintendere a quelle esplorazioni, volle egli stesso accompagnarmi in un giro per quelle campagne, nelle quali faceva davvero pena il vedere vigneti già floridissimi trovarsi attaccati e quasi distrutti dal micidiale

parassito. Mentre però osservavo con soddisfazione la grande attività con cui l'amministrazione faceva eseguire quelle esplorazioni, mi addolorava il fatto che la Fillossera si riconosceva e intanto si lasciava tranquillamente a moltiplicarsi e diffondersi.

21 e 22. — Le sponde del fiume che si versa nel mare nelle vicinanze di Porto Torres ogni qualvolta le ho perlustrate in prossimità dello stesso paese mi avevano offerto oggetti interessanti. Neppure in questo viaggio volli mancare di esplorarle; anzi vi destinai due giorni consecutivi, passando la notte intermedia in paese. Le investigazioni si circoscrissero principalmente intorno le Canne, Tife ed altre piante palustri che vegetano rigogliose sulle sponde. Rividi l'*Holcocranum saturejae*, di cui nell'anno precedente avevo trovato un individuo in identiche condizioni di ubicazione presso le sponde del Rio Sixerri a Siliqua. Anche questa volta non più che un individuo fu possibile ritrovarne. Dal che debbo conchiudere che sia realmente specie assai rara. Del resto, quando si considera che dopo la Russia, ove fu discoperto, non se ne è avuto che un individuo trovato in Avignone; l'è già qualche cosa averne per ora rinvenuti due individui in Sardegna. Altro Emittero neppure comune fu il *Teratocoris notatus*, non ancora trovatosi in tutta Italia. Nell' ordine stesso, ma tra le Cicadarie, mi si offrirono varie specie che non avevo prima rinvenute. E più di tutte fu interessante una del genere *Kelisia* che descriverò col nome di *K. Putonii*. Di Coleotteri eravi qualche *Donacia typhae*, ed abbondante il *Telmatophilus typhae*. Di Lepidotteri, oltre la caratteristica *Hydrocampa potamogalis*, svolazzava frequente la candidissima *Scirpophaga praelata*. — Nelle vicine praterie a svariate piante in fiore raccolsi un secondo individuo di due specie di Imenotteri da me descritte nella memoria seconda, la *Megachile carinulata* e l' *Ametastegia fulvipes*, più il *Rhopalum gracile* descritto da Wesmael sopra un individuo femmina avuto da Ginevra. E poichè il nostro è maschio, sono al caso di completare la conoscenza di questa specie, che a quanto pare nessuno avea più trovata. Anche di Ditteri ne trovai uno abbastanza raro, il *Trigonometopus frontalis*.

23. — Nel precedente anno avevo esplorate le sponde di un rivolo che scorre nella piccola valle di Tissi. Nel venire però in ferrovia a Sassari avevo notato che nel luogo detto *Scala di Giocca* eranvi condizioni di suolo e di acque analoghe: e però volli recarmivi, e ne rimasi contento. Ricercando presso le radici delle piante alle sponde dei rigagnoli vidi apparire per la prima volta il genere *Podops*, e quel che più importa, con una specie diversa dalle tre che sinora si conoscono d' Italia. Nel posto medesimo rinvenni una varietà della *Chrysomela Schottii*, la quale per grandezza e per colorito si allontana notevolmente dal tipo, sì che senza la considerazione della identità di scultura si direbbe specie diversa, come sembra al primo vederla. Alla ristretta serie di Tentredinidei un'altra specie si aggiuse, il *Cladius difformis*.

24. — Ploaghe l' è un paese assai decantato nella Sardegna per l'avvenenza delle donne e per la eleganza del loro abbigliamento di gala. Ne avevo già viste in Sassari e riconosciuto che la loro rinomanza era ben meritata. Mi decisi quindi visitar quel paese; però, non per la curiosità delle donne, bensì per vedere se con l'avvenenza del femineo sesso della specie umana si associasse ancor qualche bella forma nella serie dei piccoli bruti: e la trovai, come sarà detto.

Mossi da Sassari col treno delle 2,25 p. m. Nella carrozza ebbi la ventura d'incontrarmi col dottor Michele Cubeddu, in allora sindaco di Ploaghe, dal quale potetti attingere informazioni intorno al possibile alloggio, mancando un albergo. Alle 3,30 si

giunge alla stazione, dalla quale una vettura postale in venti minuti ci conduce al paese posto in collina e distante oltre due chilometri. In grazia delle notizie avute dal signor Cubeddu riuscii ad avere una stanza presso un tal Salvatore Pipia. Essendo già la giornata al suo declinare non potevo fare una vera escursione; ma per non rimanere in ozio, con una guida, che non fu agevole ottenere, uscii in campagna giungendo ad un boschetto di giovani querce-roveri poco discosto dal paese. Vi raccolgo una bellina *Macrocera*, che per la macchiatura delle ali simiglia alla *maculipennis* di Macquart, non però per la colorazione dell'addome. Del genere *Chrysopa* eravi la *prasina*.

25. — Conoscevo per informazioni prese fin dall'anno innanzi che nel tenimento di Ploaghe eranvi estesi boschi di querce da sughero, di cui ivi si fa gran commercio. Attinte notizie più precise appresi che il più vicino distava dal paese otto chilometri circa. Uscito alle 6 a. m. mi avviai a piedi a quella volta, e camminando difilato senza punto intrattenermi per via, dopo due ore giunsi alla meta. Il bosco era imponente non per la stivatezza degli alberi, ma per estensione, sì che a perlustrarlo ci abbisognava per lo meno una intera giornata. Mi limitai quindi ad una piccola zona. Il suolo era arido e con prato naturale già secco. Qui era abbondante una specie di Crambideo che non ho visto altrove, cioè l'*Ancylolomia tentaculella*. In quanto alle querce, sebbene molte altre ne avessi altrove esplorate, pure a confermare la massima che ogni luogo può avere le sue specialità, vi rinvenni abbondante la graziosa *Tephritis postica*, che non vidi più in altri siti. Allo scuoter de' rami, usciva fuori qua e là la *Catocala nymphaea*. Il *Satyrus circe* non era raro.

26. — A pochi chilometri da Sassari vi ha lo *Stagno di Sorso*, denominato così dal vicino paese che gli sovrasta, molto temuto dai paesani per le sue emanazioni miasmatiche. Non avendolo mai visitato, mi determinai a colmare tale lacuna. Vennero con me il sig. Pietro Bonomi, preparatore del gabinetto zoologico di quella Università, ed il giovane Luigi Minna studente di medecina ed assistente per la Botanica nella Università medesima. Si partì alle sei del mattino in piccolo carrozzino, e dopo due ore di cammino, una parte del quale per via tutt'altro che rotabile, si giunse presso le sponde dello Stagno. Al primo vederlo mi convinsi che avrei ignorato uno de' luoghi più interessanti delle adiacenze di Sassari. La ricchezza e varietà di vegetazione, che trovavasi in quei terreni umidi della prossimità delle acque, facea prevedere ancora una vita rigogliosa ne' minuti esseri animali. E tale la sperimentai di fatto. Fui dapprima rallegrato dal trovare un secondo individuo del *Midas* rinvenuto a Fordongianus. Tra gli Emitteri non erano molto rari il *Sehirus maculipes*, che nelle provincie napoletane ho trovato soltanto una volta nelle attinenze del Vesuvio, la *Tropidocephala elegans*, specie anch' essa poco diffusa in Italia, e l'*Areopus pulchellus*. Di Imenotteri vidi per la prima volta nell'isola lo *Stizus terminalis*, come pure v'era l'*Hoplisus concinnus* trovato solo a Fonni. Sopra i Tassi che qua e là sorgevano era anche abbondante la *Livia* trovata a Correboi; da che rilevavasi che essa accompagna la pianta sia in luoghi elevati sia in piani. — La breve distanza che separa lo Stagno dal mare è sabbiosa e nuda; e qui non mancavano la varietà dell'*Acridium coerulans*, che pare viva ovunque si hanno simili condizioni, le Tachinarie sabulicole, il piccolo *Stichopogon inaequalis*. Di Imenotteri scavatori rinvenni il maschio del *Pompilus meticulosus*, di cui possedevo soltanto la femina.

27. — Rimango in stanza per porre in ordine gli oggetti da spedire, essendomi determinato a lasciare Sassari nel dì seguente.

*

28. Una località che pur da più tempo avevo desiderio di conoscere era la valle di Bosa. E non volendo rimandare ulteriormente tale conoscenza, mi avviai a quella volta. Partii per ferrovia col treno delle 6,40 del mattino: fui a Macomer alle 11,30, e di qua mossi alle due e mezzo p. m. con la corriera postale. La campagna che si percorre fin presso Sillia, primo paese che s'incontra, è quasi tutta rocciosa e però insuscettiva di esser posta a coltura; è quindi ricoperta di prato naturale destinato a pascolo: prato in quella stagione secco, ma che nella primavera esser deve il richiamo di miriadi di insetti. Fra Sillia e Suni la coltura, principalmente a vigneti, comincia. La valle di Bosa poi può dirsi un giardino per la intensa e florida vegetazione di seminatorii e di alberi da frutto di ogni sorta. Il Temo che la percorre è il solo fiume navigabile della Sardegna, mantenendo le sue acque elevate anche nella più calda stagione. La città posta all'estremo della valle, divisa in due parti dal fiume, offre un aspetto pittoresco al forestiere che vi si appressa. A tanta bellezza di natura non corrispondono le condizioni sociali: con una popolazione di ottomila anime e con un attivo commercio non vi ha un albergo, fosse anche mediocre. Sicchè giuntovi alle ore sei, unitamente ad altri due viaggiatori, non si penò poco per trovar dove passar la notte e chi ci preparasse un vitto qualsiasi.

29. — Il mare è distante men che due chilometri dalla città; onde, non potendo visitar la parte montuosa pel poco tempo che volevo trattenermi, mi diressi a quello. Costeggiando le sponde del Temo raccolgo altro individuo del *Pogonus chalceus* trovato solo a Cabras. Tra le piante palustri eravi qualche *Teratocoris notatus* ed abbondantissimo il *Paramecus nervosus*. — Raggiunto il mare, osservo la sponda costituita da roccia tutta vajuolata formandosi qua e là piccole conche che rimanevano colme della stessa acqua marina. Su questa varii moscherini venivano a poggiarsi di specie svariate, di cui potetti raccogliere tre della famiglia de' Dolicopidei ed una degli Agromizidei Efidriini. — Sul rialto che domina la spiaggia svolazzava frequente il *Systoechus stenopterus* e saltellava il *Pachytylus nigrofasciatus*, acridio, che sebbene sia generalmente comune, pure non mi pare sia molto diffuso nella Sardegna: per lo meno io l'incontravo la prima volta.

Nelle ore tarde del giorno risalgo in barca il fiume fino ad oltre un chilometro per godere del bel panorama che mi ricordava taluni luoghi della Svizzera.

30. Alle 5,20 del mattino lascio Bosa: alle 10 sono a Macomer, e di qua ritorno nuovamente ad Oristano.

31. — Sebbene le adiacenze di questa città fossero state già esplorate abbastanza, pure volli trattenermi ancora un giorno onde visitare il golfo, ove non ero mai stato. L'ottimo amico Fortunato Tolu, che durante la mia precedente permanenza non era in Oristano, ora trovandovisi non mancò di tenermi compagnia. Percorrendo il viale che mena al ponte, non trascurai di dirigere la mia attenzione sopra i tronchi di pioppi. Della *Myennis fasciata* vedevansi appena pochi individui, siccome erano quasi disfatti i funghi, intorno ai quali soltanto si aggiravano. Parea quindi che l'epoca della sua comparsa declinasse: ed in ciò trovava ancor la ragione del non averla incontrata in alcuna delle molte altre perlustrazioni, ch' erano state in maggio ed in settembre, quindi o troppo presto, o troppo tardi. Interessantissima fu una *Noctua*, che, freschissima, era poggiata sopra uno di que' tronchi. L'è una *Catephia*, sulla cui determinazione specifica mi avanzano ancora de' dubbii. Sopra i medesimi tronchi erano molte *Psecadia bipunctella*, tutte appiattate ed immobili, quali esser sogliono le farfalle notturne non appena schiuse.

Passando per sentiere ombroso osservo a qualche distanza un fenomeno che fissò la mia attenzione: un mucchio considerevole di animaletti di un nero splendente, moventisi e rotolantisi gli uni sugli altri in quel modo che ha luogo delle larve di mosche quando sono in grande numero agglomerate. Ed avrei pensato che si trattasse veramente di esse, se avessi conosciuto che vi esistono larve di mosche di quel colore. Avvicinatomi riconobbi essere individui dello *Stenus oculatus* così straordinariamente moltiplicato. Non mai erami occorso vedere un fatto simile, nè per quella nè per altre specie di coleotteri. Non era certamente possibile numerarli, ma da un calcolo approssimativo co'metodi che in simili casi si adoperano, valutai che non erano meno di un diecimila individui accatastati gli uni sugli altri. — Trovatici in un orto pensai di far sosta un poco onde temperare l'arsura coi peponi, di cui v'erano de' molti buoni. E mentre a ciò attendavamo, il conduttore dell'orto mi parla d'una malattia arrecata ai pomidoro da una specie d'insetto. Ebbi premura di verificare e riconoscere quale fosse l'insetto malefico. Era la *Pentatoma (Nezara) viridula*, moltiplicatasi oltre modo, e che nudrivasi del sugo de' frutti ancor verdi. I pomidoro attaccati cominciavano ad ingiallire, indi si rammollivano e finivano col disfarsi quasi per cangrena umida. Egli pertanto poneva tra le piante di pomidoro piccoli rami di Tamarici, assicurando che la presenza di questi (forse per l'odore) allontanava le Pentatome. Quanto fosse efficace realmente tale preservativo non saprei dirlo; ma ove lo fosse davvero, poichè non era la prima volta che l'infortunio si manifestava, non mi persuadevo come egli si decidesse ad adoperare il rimedio quando già una buona dose di danno era stato prodotto, e non al primo apparire del nocivo insetto. — Lorchè fummo in vicinanza della spiaggia del porto, là dove è una antica torre detta *Turri manna*, il Tolu diceami che in quella contrada era abbondantissima una speciale mosca, molto diversa dalle comuni mosche cavalline o *Tabani*, la quale attaccava tutti i cavalli che per colà transitavano, producendo, alla maniera di quelle, forti salassi. Non tardai a riconoscere quale si fosse la specie, dappoichè in mancanza di cavalli, in un istante parecchi individui invasero il cane che ci facea compagnia. Era il *Chrysops italicus*. — Due buone ore di cammino ci vollero per ritornare in città.

Di specie non ordinarie raccolte ricorderò il *Notaris bimaculatus* non segnato tra coleotteri della Sardegna. In un piccolo pantano di acqua melmosa, incontrato lungo la via poco innanzi di raggiungere la spiaggia, trovai la *Corisa Geoffroyi*, che in tante altre acque stagnanti esplorate non avevo mai vista.

Settembre

1. — Da Oristano passo per ferrovia ad Iglesias: partendo alle 2 p. m. e giungendo alle 6,30.

2. — Ogni qualvolta sono stato in questa città non ho mancato di visitare la valle Canonica, che in realtà è la miglior località pel Naturalista che vi abbia in quelle adiacenze. Fu quindi quella che pria di ogni altro luogo attirò i miei passi. Però per la protratta siccita regnata tutto era arido. La sola pianta che trovavasi in fiore era la *Euphorbia Cupani:* ed intorno ai fiori di questa si aggruppavano i pochi Imenotteri e Ditteri che la contrada offriva. E de' primi trovai varii individui della mia *Leucospis torquata*, i quali han dimostrato la costanza dei caratteri specifici.

3. — Nel settembre 1881 recandomi da Iglesias a Portoscuso avevo avvertito le condizioni favorevoli del territorio di Gonnesa. Volli quindi conoscere più da vicino questa altra località. Per accedervi profitto della vettura corriera che va a S. Antioco. Sia però effetto della secchezza, sia di estensione di coltivazione molti di quei siti che io ricordavo, e sui quali calcolavo per rinvenir qualcosa di buono, erano del tutto trasformati. Ciò non ostante la caccia non fu inutile. Di Coleotteri rinvenni un *Hesperophanes cinereus*, che nella Sardegna era stato trovato soltanto dal Baudi; d'Imenotteri non comuni menzionerò l'*Astata picea*.

Esaurite le esplorazioni, non essendovi alcun mezzo di trasporto, me ne ritorno a piedi ad Iglesias.

4. — Anche a Portoscuso, nell' epoca or menzionata, ero stato sol di passaggio, principalmente per la mancanza di alloggio. Ricordavo però molto bene le cordiali offerte di ospitalità fattemi in quella circortanza dal Dott. Stanislao Bruera. Queste rendevano possibile l'effettuazione del mio desiderio di fare delle ricerche anche in quella contrada, cui senza tale opportunità avrei dovuto rinunziare. La vettura corriera postale in venticinque minuti mi conduce da Iglesias a Monteponi. Da qui parto alle ore 10,30 col treno ferroviario che fa il servizio del trasporto del minerale proveniente da quelle cave, e dopo un' ora sono a Porto Vesme. Non trovandosi ivi nè carrozze nè cavalli mi dirigo a piedi a Portoscuso; e battendo un sentiere tracciato su finissima e bianca sabbia, che pareami quella de' deserti dell' Egitto, in sedici minuti fui al paese. L'accoglienza avuta dal Dottor Bruera fu quella che caratterizza gli uomini di elevata coltura ed estimatori delle scienze e di coloro che le coltivano.

Nelle ore pomeridiane in compagnia del mio amico, che oltre alla vasta coltura in cose mediche ha pure gusto e conoscenze in scienze naturali, percorsi una parte del littorale sulla direzione di Porto Vesme: littorale in parte roccioso, in parte sabbioso con mucchi di alghe. Mi occupai principalmente a cercare la *Nebria complanata*, che da altri vi è stata trovata, ma non potetti vederne una sola.

5. — Passando da Porto Vesme a Portoscuso avevo osservato che quella pianura poco accidentata, sebbene nel fondo sabbiosa, era ricca di vegetazione. Eranvi Tamarici e Tassi, abbondantissima e lussureggiante la *Euphorbia Cupani* in piena fiorescenza; e nelle parti più basse, che durante l' inverno divengon maremmose, erano giunchi ed altre piante affini. Destinai quindi alla esplorazione di questa località la prima giornata. Il dottor Bruera volle accompagnarmi, occupandosi alla sua volta di caccia di animali più grossi. Il cielo era in parte coperto di nubi vaganti ed un vento forte e continuo turbava il libero volo degl' insetti. Le indagini tra giunchi mi fruttarono una Cicadaria da me non conosciuta, qual'è la *Kelisia Brucki*. Nelle praterie umide era piuttosto abbondante un *Antomiino*, che non ancora ho potuto determinare. Sopra i Tassi non mancava la Livia. Tra gl' Imenotteri che svolazzavano intorno ai fiori dell'Euforbia raccolgo una *Leucospis*, che pei suoi caratteri essenziali, fra quali la lunghezza dell'oviscapto (essendo una femmina) che raggiunge la base dello scutello, esser deve ritenuta affine alla *intermedia*, differendone per importanti note di macchiatura.

Nelle ore pomeridiane percorro l' altro lato del littorale sino a *Porto Paglietta*, in parte roccioso, in parte sabbioso. In quest' ultima trovo sotto i sassi alcuni individui del *Phylax sardous*, che vedevo per la prima volta.

6. — Fin dal primo mattino il cielo mostravasi coperto da nubi dense e minaccio-

se. Più tardi apparve una pioggia dirotta, che si continuò con brevi interruzioni sino a sera. Occupai quindi la giornata in lavoro e studio camerale.

7. — Benchè nubi non mancassero, pure non faceano temere di pioggia, sicchè non impedirono la consueta peregrinazione. Rifatta la via di Porto Vesme si passò oltre, e costeggiando alcuni vasti stagni denominati in dialetto volgare *Stangioni,* raggiungiamo il fiume *Paringianus.* Le condizioni generali del suolo e della vegetazione non cangiano al di là di Porto Vesme. E però anche la fauna mostravasi presso a poco la stessa. Raccolgo alcuni Locustidei non comuni, come la *Pterolepis pedata* e lo *Ctenodecticus costulatus.* Fra i rami di Cisti vedeansi numerosi individui della *Argyope lobata* e tra giunchi la *Cyclosa insulana.* Sulle sponde sabbiose del fiume due sole specie di *Bembidium* dominavano.

Nelle ore pomeridiane fo un giro per le adiacenze del paese e vi raccolsi una buona e rara specie di Carabicino, l'*Harpalus fulvus,* proprio di Egitto, e che per l'Italia pare sia stato rinvenuto soltanto in Sicilia. Non lasciai sasso piccolo o grosso al suo posto per averne altri individui, ma fu vano. Nel tempo stesso rinvenni due piccoli *Rhizotrogus rugifrons.*

In tutti i terreni sabbiosi di Portoscuso era oltremodo frequente il *Geotrupes sardous,* non rara la *Tentyria grossa.*

8. — Il tempo era ritornato allo stato normale: cielo sereno, aria calma, temperatura calda. Mi proposi passare all'isola di S. Pietro, non per farvi ricerche, poichè ricordava assai bene quanto esse in stagione analoga del 1881 fossero state improduttive, ma perchè volendo fare una visita di ricognizione in una parte della Sardegna da me del tutto ignorata detta (impropriamente) isola di S. Antioco; era quello il miglior modo di pervenirvi. Ed ho detto visita di ricognizione perchè in realtà, sia per la stagione inoltrata, sia perchè era giunto il tempo di ritornare a Napoli, non intendevo farvi alcuna ricerca, ma solo conoscere i luoghi ed acquistar relazioni pel caso in altra occasione volessi trattenermici, qualora avessi giudicato che ne valesse la pena.

Alle 11 a. m. mi avvio al Porto Vesme, accompagnato dall'amico Bruera. Alle 12 mi imbarco sopra un vaporino Tabarka che facea giornalmente quel transito, e dopo un'ora sono a Carloforte, unico paese dell'Isola di S. Pietro. Dopo varie indagini mi riuscì ottenere una stanza onde passarvi la notte, non potendo ripartire che il dimani.

Nelle ore pomeridiane conobbi il Dottor Gaetano Costa-Ramo, giovane colto ed amante delle scienze naturali. Egli mi condusse a vedere l'Ospedale destinato agli operai di una miniera esistente nell'isola ed affidato alle sue cure, e quivi fecemi osservare una piccola raccolta d' Insetti fatta da lui medesimo in quelle campagne, dalla quale potetti rilevare la frequenza del *Charaxes Jasius.* Eravi ancora di non comune la *Lasiocampa quercifolia* ed un individuo gigantesco della *Inocellia crassicornis.*

9. — Alle 8 a. m. riparto col vaporino Tabarka, che in mezz'ora mi conduce a Calasetta, piccolo paese dell' isola di S. Antioco, posto sopra una spiaggia arenosa, ma nondimeno abbastanza pulito. Non vi ha alcun albergo: però, onde far colazione sono accolto da un tal Rosario Biggio, il quale mi assicurò che avrebbe potuto offrirmi ancora una stanza qualora avessi voluto passarvi la notte. Per andare da Calasetta a S. Antioco vi ha la via di terra, da farsi a cavallo, e quella di mare. Essendo il mare tranquillo ed il vento favorevole, mi decido per la seconda. Noleggiata una barca per mio conto parto alle undici, ed andando sempre a vela gonfia, dopo due ore approdo in S. Antioco. Non ostante questa fosse città di qualche importanza, neppur vi ha alcun al-

bergo. Dovetti quindi mendicare per trovare chi mi offrisse ricovero e vitto. Fui però fortunato nel trovare una stanza assai più decente di quel che mi attendevo, posta gentilmente a mia disposizione del sig. Francesco Senis.

Una passeggiata per la circostante campagna mi fece riconoscere che sebbene questa fosse in gran parte messa a coltura, pure in vicinanza della spiaggia vi ha luoghi che in stagione più propizia potrebbero essere esplorati con vantaggio.

10. — Alle 7,30 parto con corriera postale che mi riconduce ad Iglesias, ove giungo alle 2,30 p. m. Lasciando S. Antioco, là dove la così detta isola si congiunge all'isola principale, osservai la pianura posta fra le due spiagge del mare, una delle quali spettante al golfo di Palmas, tutta coperta di vegetazione spontanea. Lì dovrebbero farsi ricerche accurate.

Nelle ore del mattino fo una breve escursione sopra Monteponi, ma con risultato assai scarso. Alle 3,30 p. m. riparto per Cagliari, ove giungo alle 5,30.

Misi per tal modo termine al viaggio, durato più di quello che mi era proposto. Il giorno 13 m'imbarcai per Napoli.

PARTE SECONDA

Ragguaglio sistematico delle cose raccolte

Dopo la estesa enumerazione data nella seconda memoria di quanto l'isola ci aveva offerto durante la intera primavera, stimiamo conveniente mutare in parte la modalità della trattazione di questa seconda parte del lavoro. Dappoichè, se volessimo anche ora registrare tutto ciò che abbiamo raccolto o che si poteva raccogliere, non faremmo che ripetere in buona parte le cose stesse dette nella memoria precedente senza una positiva utilità. Un notamento fatto in quel modo potrebbe soltanto esser proficuo per riconoscere le specie, che, essendo abbondanti nella primavera, scompariscono nella state. Ma noi di ciò abbiam preso i relativi appunti per tenerne conto quando, mettendo insieme tutti i materiali raccolti, potremo presentare un lavoro finale complessivo. Per siffatta ragione registreremo soltanto le specie che non trovansi segnate nelle due memorie precedenti, e delle altre menzioneremo soltanto poche, le quali o per la rarità, o per estensione di ubicazione lo meritassero. E perchè la differenza si possa facilmente avvertire, le prime saranno precedute da asterisco.

Insetti

Se ne' materiali riportati dal viaggio della primavera gl' Insetti costituivano una parte assai considerevole, perchè l' è la classe di per sè stessa più numerosa, in quelli della state costituiscono la parte massima. Dappoichè nelle altre classi i calori estivi rendono molto scarse le specie. Ciò si avvera principalmente per i Crostacei, Miriapodi e Molluschi terrestri. Non ostante le abbondanti raccolte fatte nell'anno precedente, il numero delle specie che a quelle si sono aggiunte è stato considerevole, superiore a quello che noi stessi ci aspettavamo. E non poche di esse ci han data sufficiente fatica per convenientemente studiarle, senza neppur giungere per tutte alla loro determinazione. Sul qual

proposito dobbiam dichiarare che per parecchie specie più ambigue od incerte ci siam giovati del parere di distinti specialisti cui le abbiam communicate, ed i cui nomi ci piace qui ricordare. Essi sono il Conte Flaminio Baudi di Selve per Coleotteri; sig. Mac Lachlan per Friganeidei, sig. Kriechbaumer per Icneumonidei, Dott. Aug. Puton per Emitteri, prof. Löw per Psillidei, prof. Staudinger per Lepidotteri, sig. Bigot per Ditteri. Ai quali esprimo i miei sinceri sentimenti di riconoscenza.

Coleotteri [1])

Se dassimo il circostanziato ragguaglio delle specie tutte raccolte od osservate nel luglio e nell' agosto, e questo si mettesse a confronto con quello della raccolta di primavera, si vedrebbe la enorme differenza nel dominio di diverse famiglie. Talune si vedrebbero scomparse quasi del tutto; altre sensibilmente ridotte. Quello che in tal rapporto fa maggiore mancanza è il gruppo de' Malacodermi. Le molte minute specie che nell' aprile coprono tutti i fiori non più esistono nella state; quelle che abbiam trovate più resistenti sono il *Colotes maculatus*, l'*Attalus lobatus* e varie *Danacaea*. Le sponde de' fiumi che nel principio della primavera brulicano di carabicini, nella state divenendo asciutte pel ritirarsi delle acque rimangono spopolate del tutto, od appena qua e là se ne vede qualcuno vagante. Anche le specie acquatiche nella state scarseggiano; ed i primi a rendersi scarsi sono gli *Elophorus:* lo che ci dà più chiara spiegazione del perchè nel settembre non ne trovammo uno solo.

* **Notiophilus quadripunctatus**, Dej. — Trovato sulla montagna di Laconi e su quelle di Desulo.

— **geminatus**, Dej. — Raccolto sulla montagna di Laconi.

* — **aquaticus**, Fab. — Trovato sulle montagne di Desulo in contrada detta *Tascusì*.

Nebria rubicunda, Quesn. — Rinvenuta nei castagneti delle vicinanze di Desulo presso le radici degli alberi: rara.

* **Leistus fulvibarbis**, Dej. — Ne abbiamo trovati parecchi individui sul Monte Chiesa di Aritzo, sotto i sassi: luglio.

Carabus Genei, Dej. — Trovato ne' castagneti delle vicinanze di Desulo, ove pare non debba essere molto raro [2]).

* **Cymindis humeralis**, Duft. — Rinvenuta sopra le montagne di Desulo: luglio: rara.

* — **lineata**, Sch. — Trovata nelle medesime montagne di Desulo, piuttosto frequente.

* — **lineata**, Sch. var. — Non rara nelle montagne adiacenti al Gennargento.

Cymindis Marmorae, Gen. — Trovata sulle vette del Gennargento, principalmente al *Bruncu Paulina*, ove lo rinvenimmo ancora nel settembre 1881.

Dromius bifasciatus, Dej. — Trovato nella valle di *Correboi* ne' primi giorni di agosto: raro.

— **meridionalis**, Dej. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nella predetta valle di *Correboi*.

* **Ditomus dama**, Ross. — Ne abbiam trovato un individuo femmina nelle adiacenze di Bosa.

* — **rufipes**, Chaud. — Specie non ancora segnata di Sardegna. Ne abbiamo rinvenuto un individuo sulla montagna di Laconi.

* **Harpalus fulvus**, Dej. — Anche questa specie non erasi prima trovata in Sardegna. Ne abbiamo rinvenuto un individuo sul littorale sabbioso di Portoscuso, sotto i sassi; primi giorni di settembre.

Poecilus cupreus, Lin. — Trovato su le montagne di Desulo.

[1]) Le specie precedute da asterisco son quelle non trovate ne' precedenti viaggi.

[2]) Oltre ad individui viventi, ne abbiamo trovati avanzi dermascheletrici in nidi di grosse *Lycosa radiata*.

Percus strictus, Dej.—Frequente sulle montagne attigue al Gennargento.

* **Amara familiaris**, Duft.—Rinvenuta ancora sopra le montagne di Desulo.

* — **lucida**, Duft. — Trovata sopra la montagna di Laconi, in luglio: rara.

Agonum parumpunctatum, Fab. — Diffuso per varii luoghi. Aritzo, Desulo, ecc.

* **Olisthopus fuscatus**, Dej. — Trovato presso Laconi.

* **Pogonus chalceus**, Mars.—Ne abbiamo rinvenuti due individui, l'uno presso lo stagno di Cabras, l'altro su le sponde del fiume Temo a Bosa: agosto.

Bembidium elongatum, Dej. var. *longicolle*. — Trovato nelle vicinanze di Fonni: agosto.

* — **praeustum**, Dej. — Rinvenuto ancora nelle vicinanze di Fonni e sulle montagne di Desulo.

— **Sturmii**, Panz. — Rinvenuto presso le sponde dell'Araxcis.

— **varium**, Oliv. var. *minor*. — Raccolto sulle sponde dello Stagno di Cabras, ed a Portoscuso: agosto e settembre.

Ocys rufescens, Dej. — Trovato nelle adiacenze di Laconi: luglio.

Dytiscus circumflexus, Fab. — Abbondante nel Rio Manno presso Monastir, ed in un piccolo rivolo in vicinanza di Laconi.

— **pisanus**, Lap. — Trovato nelle medesime acque che il precedente, del quale è meno abbondante.

Hydroporus granularis, Lin. — Abbondante nel fiume Araxcis sotto Meana.

— **flavipes**, Oliv. — Raccolto nell'Araxcis insieme al precedente.

— **12-pustulatus**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un altro individuo nello stesso Rio Manno presso Monastir.

— **Martinii**, Fairm. — Ne abbiamo raccolti varii individui nel Rio Araxcis sotto Meana.

— **opatrinus**, Germ. — Trovasi in varii corsi di acqua, anche di luoghi montuosi, come le montagne di Desulo.

— **griseostriatus**, Dej. — Trovato abbondante nel Rio Manno presso Monastir ed in un rivolo sotto Nuoro.

* — **pubescens**, Gyll. — Trovato soltanto in un rivolo sotto Nuoro: poco abbondante.

* **Haliplus ferrugineus**, Lin. — Rinvenuto nel Rio Manno presso Monastir, poco abbondante.

Gyrinus striatus, Fab. — Abbondante nel piccolo fiume di Scala di Giocca e nel Rio Manno presso Monastir.

— **bicolor**, Payk., var. *angustatus*, Aub.— Trovato abbondante nel piccolo fiume presso Milis.

Hydrobius convexus, Brull. — Trovato frequente in un rivolo presso Laconi.

* **Berosus affinis**, Brul. v. *lineicollis*, n.—Raccolto nel Rio Manno presso Monastir.

Phalacria obscura, Grav.—Raccolta a Scala di Giocca: agosto.

Aleochara tristis, Grav. — Abbandante entro lo sterco bovino sulla montagna di Laconi: luglio.

* **Hypocyptus longicornis**, Payk. — Trovato nelle vicinanze di Palmas arborea: agosto.

* **Quedius molochinus**, Grav.—Raccolto presso Oristano: agosto.

Philonthus intermedius, Lac. — Non raro sulla montagna di Laconi: luglio.

* — **politus**, Fab. — Frequente nelle vicinanze di Aritzo: luglio.

— **varius**, Gyll, var. *bimaculatus*, Grav.— Giunge fin presso le massime alture del Gennargento.

* — **fuscus**, Grav.—Trovato nelle adiacenze di Fonni: agosto.

Leistotrophus marginalis, Gen. — Trovato sulla montagna di Laconi, sempre entro lo sterco bovino.

* **Ocypus morio**, Grav. — Specie poco diffusa: raccolta presso Oristano e Sassari.

* **Othius fulvipennis**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo nelle adiacenze di Laconi.

* **Lithocaris melanocephala**, Fab. — Trovata sulla montagna di Laconi.

Stilicus fuscipes, Erich. — Rinvenuto a Scala di Giocca: agosto.

Sunius angustatus, Payk. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.

Stenus guttula, Mull. — Ne abbiam trovato un individuo sulle sponde dell'Araxcis presso Meana.

— **oculatus**, Grav. var. — Trovatone un mucchio presso Oristano [1]).

* **Oxytelus piceus**, Lin.—Abbondantissimo entro lo sterco bovino sulla montagna di Laconi.

[1]) Vedi la relazione, pag. 20.

* **Oxytelus complanatus**, Er. — Trovato col precedente, ma meno abbondante.

Pria dulcamarae, Ill. — Trovata abbondante ne' prati presso il fiume di Porto Torres: agosto.

Corticaria distinguenda, Com.—Raccolta in diversi luoghi: luglio ed agosto.

Telmatophilus typhae, Fall. — Abbondante nelle sponde di Porto Torres.

Attagenus piceus, Oliv. — Trovato abbondante nelle vicinanze di Laconi: luglio.

Anthrenus pimpinellae, Fab. — Si eleva fin sulle alte montagne, come quelle di Desulo: luglio.

Pomatinus substriatus, Mull. — Trovato molto abbondante nel *frumine* presso Laconi: luglio.

Onthophagus fracticornis, Preysl. — Non raro presso Meana e nella montagna di Aritzo: luglio.

* **Aphodius lugens**, Crtz. — Trovato entro lo sterco bovino sulla montagna di Laconi: luglio.

* — **merdarius**, Fab. — Molto abbondante sulla montagna di Laconi entro lo sterco bovino.

* **Anisotoma calcarata**, Erich. — Rinvenuta nelle adiacenze di Aritzo: rara.

* **Orphilus glabratus**, Fab. — Trovato sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi: non raro.

* **Oryctes nasicornis**, Lin. — Osservato in diversi luoghi: luglio.

Hoplia pubicollis, Kust. — Raccolta nella Valle di Correboi e nelle vicinanze di Fonni: agosto: poco abbondante.

* **Rhizotrogus rugifrons**, Burm. — Ne abbiamo rinvenuti due individui nel littorale sabbioso di Portoscuso, sotto i sassi: primi giorni di settembre.

* **Triodonta alni**, Blanch. — Trovata nelle vicinanze di Meana e di Aritzo sopra l'*Alnus glutinosa*, e quindi presso le sponde de' fiumi: luglio.

— — var. Trovata sulle montagne di Desulo fin sotto le alture del Gennargento, sopra lo stesso albero: luglio.

* — **cribellata**, Fairm. — Ne abbiamo un individuo raccolto nella valle di Correboi: agosto.

* **Cetonia speciosissima**, Scop. — Osservata presso Tonara: luglio.

— **opaca**, Fab. — Trovata presso Meana non rara: luglio.

Cetonia sardoa, Gen.—Raccolta presso Orani: agosto.

* — **affinis**, And. — Rinvenuta presso Meana e nel Monte Chiesa di Aritzo: luglio.

— **aurata**, var. *carthami*, Gen. — Trovata in varii luoghi piani e montuosi (Samassi, Montagna di Laconi, Tonara): luglio.

* **Acmaeodera lanuginosa**, Gyll.—Rinvenuta sulla montagna di Laconi: luglio.

* **Dircaea aenea**, Lin. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle vicinanze di Oristano, nel momento che sbucava da un tronco di *Populus alba*: agosto.

* **Poecilonota festiva**, Lin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo sulle massime alture del Gennargento sopra il *Juniperus nana*: luglio.

Chrysobothris affinis, Fab. — Trovata nelle adiacenze di Desulo in luglio: poco frequente.

* **Anthaxia scutellaris**, Gen. (*viminalis*, Cast.). Raccolta nelle vicinanze di Desulo, sopra i fiori di ombrellifere: luglio.

* **Coroebus graminis**, Panz.—Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

* **Agrilus biguttatus**, Fab. — Ne abbiamo trovato un individuo solo nelle vicinanze di Fonni: agosto.

* — **cinctus**, Oliv. var. *aereus*. — Raccolto nel Cagliaritano, contrada *Orri*: luglio.

— **viridis**, Linn. — Rinvenuto nelle adiacenze di Fonni: agosto.

* **Aphanistichus angustatus**, Luc. — Raccolto sulla montagna di Laconi: luglio: non molto raro.

* **Agriotes Grandinii**, Cand. — Diffuso in varie parti dell'isola: luglio ed agosto.

Cyphon variabilis, Thunb. — Non raro presso le sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

Hydrocyphon deflexicollis, Muls.—Raccolto nella valle di Correboi: agosto: non raro.

* **Helodes Genei**, Guer. — Ne abbiamo rinvenuti pochi individui nella valle di Fontana Minda sotto il Gennargento, sopra l'*Alnus glutinosa*: luglio.

* **Lampyris Lareynii**, Duv. — Raccolto presso Meana e Desulo.

[**Rhagonycha chlorotica**, Gen. — Giunge fino alle maggiori alture del Gennargento.

* **Attalus lobatus**, Oliv. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari: luglio.

*

Colotes maculatus, Cast. — È il solo Malachiideo che trovasi in quasi tutta l'isola in luglio ed agosto.

* **Dasytes cinctus**, Gen. — Raccolto presso Cagliari e su' monti del Gennargento: luglio.

— var. — Ne abbiam trovato un individuo presso Meana.

* — **tibialis**, Muls. — Rinvenuto nella valle di Correboi, raro: luglio.

— **flavescens**, Genè. — Trovato abbondante a Monastir: luglio.

Zygia oblonga, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Sassari.

* **Gibbium scotias**, Fab. — Trovato a Portoscuso entro casa: settembre.

* **Apate varians**, Ill. (*Dufouri*, Latr.). — Ne abbiamo rinvenuto un individuo sotto le cortecce delle Elci sul Monte Chiesa di Aritzo: luglio.

* **Gastrallus sericatus**, Cast. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.

* **Anobium costatum**, Gen. — Raccolto nella valle di Correboi: agosto.

Tentyria ligurica, Gen. var. — Trovata presso Portoscuso: settembre.

Asida rustica, Gen. — Non molto rara sulle montagne di Desulo: luglio.

— **nivalis**, Gen. — Qualche individuo sul Gennargento.

* **Pedinus meridianus**, Muls. — Specie poco frequente: l'abbiamo trovata a Scala di Giocca: agosto.

Opatrum glaciale, Gen. — Specie costantemente abbondante nelle massime alture del Gennargento.

— **Dahlii**, Kust. — Ne abbiamo rinvenuto uno sul Gennargento.

* **Phylax sardous**, Baud. — Trovato nel littorale sabbioso di Portoscuso, sotto le pietre, ne' primi giorni di settembre: non raro.

Phaleria acuminata, Kust. — Rinvenuta nelle adiacenze sabbiose di Portoscuso, sotto i sassi: settembre.

Menephilus curvipes, Fab. — Raccolto nelle vicinanze di Sassari.

Helops robustus, Muls. — Trovato a Scala di Giocca, vagante: agosto.

— **Genei**, Gen. — Ne abbiamo trovati due individui morti sotto le cortecce di Elci nel Monte Chiesa di Aritzo: luglio.

* **Anthicus antherinus**, Lin. — Trovato presso Porto Torres.

* **Anthicus instabilis**, Schm. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari e di Oristano.

Mordellistena pulchella, Muls. — Raccolta in luglio presso il Capo S. Elia, ove ancora la trovammo nell'anno precedente nel giugno.

* **Emenadia bimaculata**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Fonni: agosto.

* **Zonitis praeusta**, Fab. — Diffusa per molte parti dell'isola, in pianure ed in monti (Cagliari, Meana, Aritzo, Tonara, Fonni): luglio ed agosto.

Sitaris muralis, Forst. — Ne abbiamo rinvenuti varii individui nelle vicinanze di Iglesias: primi giorni di settembre.

Auletes maculipennis, Duv. — Trovata nelle adiacenze di Palmas Arborea: agosto.

— . . . ? — Ne abbiamo rinvenuto un individuo ne' prati su le montagne di Desulo: luglio.

Attelabus atricornis, Muls. — Trovato su le montagne di Desulo e nella valle di Correboi: luglio ed agosto.

* **Apion vernale**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto qualcuno alle falde del Gennargento e presso Ploaghe: luglio, agosto.

* **Sitones gressorius**, Fab. — Trovato nelle adiacenze di Tonara: luglio.

* — **griseus**, Fab. — Rinvenuto presso il Capo S. Elia: luglio.

— **vestitus**, Waltl. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: luglio.

* **Phyllobius pellitus**, Boh. — Raccolto sul Monte Chiesa di Aritzo e sulle montagne di Desulo: luglio.

Metallites parallelus, Chev. — Trovato sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi: luglio ed agosto.

Thylacites fritillum, Panz. — Trovato abbondante nelle vicinanze di Nuoro, sotto i sassi: agosto.

* **Otiorhynchus scabrosus**, Marsh. — Raccolto a Scala di Giocca: agosto.

Phytonomus philanthus, Oliv. — Non molto raro su le montagne di Desulo: luglio.

* — **punctatus**, Fab. — Trovato nelle adiacenze di Laconi: luglio.

* **Rhytideres siculus**, Fahr. — Trovato nelle adiacenze di Portoscuso.

* **Cleonus surdus** (?) Schn. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Bosa: agosto.

Larinus...? — Trovato presso Meana, Tonara e Fonni, sopra i cardi: luglio, agosto.

* **Lixus bardanae**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Meana: luglio.

* — **lateralis**, Panz. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso lo Stagno di Sasso: agosto.

— **mucronatus**, Oliv. — Rinvenuto presso Porto Torres ed Iglesias: agosto, settembre.

* **Orchestes ilicis**, Fab. — Raccolto sulle Elci delle montagne di Desulo: luglio.

Balaninus tessellatus, Fourc. — Trovato nelle adiacenze di Fonni sopra le Elci: agosto.

* **Nanophyes hemisphaericus**, Oliv. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo sopra i Tamarici ne'dintorni di Oristano: luglio.

— var. *ulmi*. Trovata soltanto a Scala di Giocca.

* — **centromaculatus**, A. Cost. — Anche di questa specie abbiamo trovato un individuo solo sopra i Tamarici, nel campidano di Cagliari: luglio.

— **posticus**, Gyll. — Ne abbiamo trovati due individui presso Fordongianus: agosto.

Gymnetron...? — Trovato nelle adiacenze di Ploaghe: agosto.

* **Brachyderes cribricollis**, Fairm. — Trovato su le montagne di Laconi e di Desulo, costantemente sopra le Elci: luglio: non raro.

* **Notaris bimaculatus**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle vicinanze di Oristano: luglio.

* **Ceutorhynchus ferrugatus**, Perr. — Abbondante ne' prati naturali delle montagne di Desulo.

* **Callidium variabile**, Lin. — Trovato nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

* **Hylotrupes bajulus**, Lin. — Trovato ancora nelle vicinanze di Cagliari, in luglio.

* **Hesperophanes cinereus**, Vill. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle vicinanze di Gonnesa: primi giorni di settembre.

* **Clytus liciatus**, Lin. — Ne abbiamo trovati quattro individui attorno ad un tronco abbattuto di pioppo nella foresta presso Laconi: luglio.

* **Icosium tomentosum**, Luc. — Trovato nelle vicinanze di Cagliari: luglio.

* **Morimus funestus**, Fab. — Osservato presso Sassari: agosto.

* **Acanthoderes varius**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nella predetta foresta di Laconi.

* **Vesperus luridus**, Ross. — Trovato nella campagna di Sassari: agosto.

* **Donacia typhae**, Brahm. — Rinvenuta tra le piante palustri delle sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

* **Crioceris campestris**, Lin. — Trovata nelle adiacenze di Quarto: luglio.

Labidostomis centromaculata, Gen. — Non rara sulle montagne di Aritzo e Desulo: luglio.

* **Cryptocephalus curvilinea**, Oliv. — Trovato abbondantissimo tra lo stagno di Molentargius ed il Capo S. Elia: luglio.

* — **alnicola**, nob. — Rinvenuto nella valle di Fontana Minda su l'*Alnus glutinosa* in fine di luglio: non raro.

— **politus**, Suff. — Raccolto presso lo stagno di Palmas Arborea e nella valle di Correboi: luglio ed agosto.

— **ochropezus**, Suff. — Trovato nelle adiacenze di Meana: luglio: non raro.

Pachybrachys scriptus, Schaef. — Diffuso per buona parte dell'isola in luoghi piani e montuosi (Cagliari, Laconi, Desulo, Correboi): luglio ed agosto.

— **anoguttatus**, Suff. — Trovato su la montagna di Laconi: luglio: raro.

— **riguus**, Mars. — Rinvenuto presso le sponde del Rio *Pardas de Cuaddu* sopra i Tamarici: non molto raro.

* **Chrysomela sanguinolenta**, Lin. — Rinvenuta nelle adiacenze di Sassari.

— **viridana**, Kust. — Trovata nella valle Canonica presso Iglesias ne' primi giorni di settembre: rara.

— var. *cupreopurpurea*. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo a Scala di Giocca.

* **Gastrophysa polygoni**, Lin. — Abbondantissima presso le sponde del Tirso e vicino lo Stagno di Palmas Arborea in quel di Oristano, in agosto: trovata ancora nelle adiacenze di Meana in luglio.

Prasocuris beccabungae, Ill. — Rinvenuto presso Nuoro ed a Scala di Giocca: agosto.

* **Adimonia sardoa**, Genè. — Trovata nella montagna di Laconi: luglio.

Rhaphidopalpa abdominalis, Fab. — Rinvenuta nelle vicinanze di Milis: agosto.

Crepidodera lineata, Ross. — Raccolta presso

Tonara e nella valle di Correboi, sopra l'*Erica arborea*: luglio, agosto.

* **Graptodera hippophaës**, Aub. — Specie poco frequente: l'abbiamo rinvenuta presso Porto Torres e Portoscuso: agosto e principio di settembre.

Phyllotreta nigripes, Panz.—Trovata presso Oristano e sulle montagne di Desulo: luglio, agosto.

Aphtona caerulea, Payk.—Raccolta presso Aritzo.

* — **hilaris**, All. — Specie diffusa per varii luoghi; luglio, agosto.

* — **pygmaea**, Kutsc. — Raccolta sopra le montagne di Desulo.

Podagrica fuscicornis, Lin.—Rinvenuta nelle montagne di Desulo.

Psylliodes fusiformis, Ill.—Trovata a Scala di Giocca: agosto.

Thyamis...? — Diffusa per varie parti dell'isola (Cagliari, adiacenze dello stagno di Sassu, Porto Torres): luglio, agosto.

Cassida ferruginea, Goez.—Sparsa per quasi tutta l'isola, in contrade piane e montuose.

* — **hemisphaerica**, Herb.—Specie non segnata tra le abitanti della Sardegna: l'abbiamo rinvenuta nella valle di Correboi, in agosto: rara.

Harmonia Doublieri, Muls.—Raccolta presso lo stagno di Palmas arborea e le sponde del Tisso a Fordongianus: agosto.

* **Vibidia 12-guttata**, Poda. — Trovata abbondante presso Aritzo: luglio.

* **Coccinella bipunctata**, Lin. — Specie assai poco diffusa: l'abbiamo trovata solo nelle vicinanze di Oristano: agosto.

* — **lyncea**, Oliv. — Specie non registrata come abitante la Sardegna: l'abbiamo raccolta a Laconi, Aritzo, Desulo, Tonara: luglio.

* — **variabilis**, Ill. var. *10-punctata* Lin. e *12-punctata*, Mull.—Trovata presso Desulo e nella valle di Correboi.

* — var. *bimaculata*, Pont. — Trovata intorno al Gennargento: agosto.

* **Chilocorus renipustulatus**, Scrib. — Raccolto presso Cagliari, Oristano, Portoscuso, ecc.: luglio, agosto, settembre.

* **Platynaspis villosa**, Fourc.—Trovata presso Cagliari, Laconi, Ploaghe: luglio, agosto.

Ortotteri

La stagione estiva essendo la più favorevole per questi insetti, non solo si presentano in gran copia le specie ordinarie, ma possono trovarsi specie che in altre stagioni o non ancora sono adulte, ovvero sono scomparse. E ciò vale principalmente pe'Locustidei, di cui appunto abbiamo rinvenute due specie che non conoscevamo, e che ci sembrano nuove: una *Rhacocleis* ed una *Ephippigera*. Oltre a queste, abbiam potuto far buona raccolta di uno degli Ortotteri particolari della Sardegna, l'*Aphlebia trivittata*.

* **Aphlebia trivittata**, Serv.—L'abbiamo trovata abbondante nel bosco di Ploaghe, sotto i sassi: agosto.

— **sardoa**, Serv. — Trovata abbondante sulle vette del Gennargento.

* **Bacillus gallicus**, Charp. — Trovato sul Monte Chiesa di Aritzo: luglio: raro.

* **Ameles Spallanzania**, Ross. — Trovata in diversi luoghi, piani (Cagliari) e montuosi (Desulo, Correboi): luglio, agosto.

* **Stenobothrus rufipes**, Zett. — È una delle specie che si eleva fin sulle massime alture del Gennargento.

Sphingonotus caerulans, Lin. var. *candidus*. — Abbondante ne' terreni sabbiosi presso gli stagni e fiumi.

* **Pachytylus nigrofasciatus**, De Geer.—L'abbiamo incontrato soltanto nelle vicinanze di Bosa: agosto.

* **Locusta viridissima**, Lin.—Osservata in diversi luoghi, piani e montuosi (montagne di Desulo), ma poco frequente.

Pterolepis pedata, A. Cost.—Raccolta nelle adiacenze di Portoscuso ne' primi giorni di settembre: rara.

Ctenodecticus costulatus, A. Cost.—Tro-

vato in diversi luoghi: Oristano, Portoscuso, Stagno di Sasso: agosto e principio di settembre.

* **Thamnotrizon magnificum**, A. Cost. — Raccolto sul Monte Chiesa di Aritzo: luglio.

* **Decticus albifrons**, Fab. — Diffuso per varii luoghi, non però molto abbondante.

* **Rhacocleis parvula**, nbb. — Ne abbbiamo un individuo maschio rinvenuto nel Campidano di Cagliari: luglio.

* **Ephippigera coronata**, nob. — Ne abbiamo trovati tre individui nella valle di Correboi: agosto.

Nevrotteri

Nella precedente memoria, ricordando quanto poco si conoscesse de'Nevrotteri della Sardegna innanzi che cominciassero le nostre esplorazioni in quell'isola, registrammo trentaquattro specie, rimanendone otto indeterminate: e queste ultime spettanti principalmente a Friganeidei. Siffatto numero in seguito alle ricerche dello scorso anno si é di molto accresciuto, e sopratutto trovansi già assai ben rappresentati taluni gruppi che non vi figuravano affatto. Tale ad esempio è quello degli Emerobiidei, dei quali possediamo ora una decina di specie, due delle quali, cioè una *Sisyra* ed una *Chrysopa,* sono state da noi già descritte [1]). Vi abbiamo rinvenuto il genere *Dilar* con la specie *D. parthenopaeus* da noi già descritto da molti anni nella Fauna Napoletana. Del genere *Mantispa* abbiam trovata la *pagana*, mentre invece nelle provincie napoletane è la *perla* che abbiam in varii luoghi incontrata.

La Famiglia de' Friganeidei si è accresciuta di altre cinque specie. Poichè però in questo gruppo è ben spesso difficile ed incerta la determinazione, le abbiamo communicate al chiarissimo Tricopterologo inglese Mac Lachlan, e dal di lui esame è rimasto convalidato che non senza ragione incontravamo difficoltà a riconoscerle. Tra esse in fatti una del gen. *Sericostoma* era specie nuova, ed altre dubbie. È però notevole tra queste ultime una spettante al genere *Thremma*, del quale conosconsi soltanto due specie, una della Grecia ed un'altra della Francia.

Persistente è stata la mancanza de'Perlidei.

* **Libellula nitidinervis**, Sel. — Raccolta nel bosco di Ploaghe.

Gomphus excelsus, A. Cost. — Trovato abbondante nelle adiacenze di Oristano e di Fordongianus, presso le sponde del Tirso.

* **Myrmeleon tetragrammicus**, Pall. — Raccolta nella montagna di Laconi: poco frequente.

* — ....? — Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto nel bosco presso Ploaghe.

* — **appendiculatus**, Latr. — Specie non rara, trovata in diversi luoghi.

Sisyra fuscata, Fab. — Raccolta presso le sponde del fiume di Porto Torres, come nel settembre 1881.

* — **iridipennis**, A. Cost. — Trovata abbondante presso il fiumicello che scorre vicino Milis: agosto.

* **Mucropalpus distinctus**, Ramb. — Raccolto sopra le montagne di Desulo.

* — **lutescens**, Fab. — Rinvenuto ne' castagneti delle vicinanze di Aritzo: luglio.

* — **parvulus**, Ramb. — É la specie di Mucropalpi più diffusa: trovata nelle montagne di Desulo, nel bosco di Orani, in quello di Ploaghe: luglio ed agosto.

* **Dilar parthenopaeus**, A. Cost. — Rinvenuto ne' boschi di castagno presso Aritzo e di Desulo: luglio.

* **Chrysopa Beckii**, A. Cost. — Raccolta presso Scala di Giocca: agosto.

— ...? — Rinvenuta nella contrada medesima che la precedente.

* — **prasina**, Ramb. — Abbondante in un boschetto attiguo a Ploaghe.

* — **neglecta**, A. Cost. — Raccolta nelle vicinanze di Milis: agosto.

[1]) Nota intorno i Nevrotteri della Sardegna.

* **Chrysopa bifidilinea**, nob. (*ypsilon*, ol.) — Rinvenuta nella valle canonica delle vicinanze di Iglesias: settembre.

* **Mantispa pagana**, Fab. — Raccolta nel bosco di Laconi ed in quello di Orani: luglio, agosto.

* **Inocellia crassicornis**, Schum. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari [1]).

Limnophilus lunatus, Curt. — Raccolto nella valle del Gennargento l. d. *Sa Minda*: luglio.

* **Sericostoma Maclachlanianum**, nob. — Molto abbondante presso i piccoli rivoli de'boschi di castagni presso Aritzo: luglio.

* **Silo nigricornis**, Pict. — Trovata nelle valli attigue al Gennargento.

* **Selis aurata**, Hag. — Specie conosciuta solo di Corsica e Sicilia: raccolta nelle valli stesse del Gennargento.

* **Thremma sardoum**, nob. — Ne possediamo un individuo mutilato raccolto dal sig. Giuseppe Cabella nelle vicinanze di Tempio.

* **Tinodes aureola**, Zett. — Trovato nella valle *Sa Minda* presso il Gennargento.

Imenotteri

In un ordine così vasto non è meraviglia che notevole sia stato il nuovo contributo che dalle esplorazioni di due mesi estivi è provvenuto. Però vogliamo notare taluni fatti che hanno rapporto con la geografia entomologica, specie cioè che non figuravano come abitatrici d'Italia. Esse sono principalmente la *Mutilla calcariventris* ed *hispanica*, Sich. Rad., il *Rhopalum gracile*, Wesm. Anzi quest'ultimo, descritto sopra individuo femmina dal Wesmael avuto da Ginevra, pare sia stato quasi obbliato perchè non trovato altrove. Di novità crediamo ve ne siano parecchie, come si rileverà dalla parte seguente.

Considerando le diverse famiglie diremo che gli Apiarii in complesso sono stati assai meno numerosi che nella primavera. Sono stati invece ben copiosi gli Scavatori. Molte buone specie abbiamo avute di Icneumonidei e Braconidei. Di Tentredinidei alle sette specie trovate precedentemente se ne sono aggiunte altre cinque. Se ne hanno quindi finora in totale dodici, numero che non smentisce la massima della estrema rarità de'Tentredinidei nella Sardegna. Di Cefidei, che nella primavera erano piuttosto frequenti, nella estate se n'è visto appena qualcuno.

Sphex flavipennis, Fab. — Ne abbiamo rinvenuti individui giganteschi presso Cagliari in luglio e Nuoro in agosto.

— **fera**, Klug. — Raccolta nelle vicinanze di Aritzo: luglio.

Enodia albisecta, Encycl. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

Psammophila ebenina, Spin. — È abbondantissima sulle vette del Gennargento, non rara in altre regioni inferiori.

* **Pelopoeus destillatorius**, Ill. — Trovasi diffuso per quasi tutta l'isola, come lo *spirifex*, del quale però sembra meno abbondante.

* — **violaceus**, Fab. — Trovato abbondantissimo presso Quarto e Monastir: osservato ancora in altri luoghi: luglio, agosto.

Ammophila rubriventris, A. Cost. — Trovata in diversi luoghi, sopratutto montuosi, fin presso le vette del Gennargento: luglio, agosto.

Tachytes procera, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuti altri due individui nelle campagne di Meana: luglio.

Astata picea, A. Cost. — Trovata nelle adiacenze di Gonnesa: settembre.

Dryudella Spinolae, A. Cost. — Raccolta sulle montagne di Desulo: poco frequente: luglio.

* **Miscophus bicolor**, Jur. — Rinvenuto nelle spiagge sabbiose dello Stagno di Cabras.

— var. — Rinvenuta nelle sponde sabbiose del Tirso presso Fordongianus.

* **Bembex repanda**, Latr. — Raccolta nelle sponde sabbiose del Tirso presso Ori-

[1]) In Carloforte ne ricevemmo un individuo femmina assai grosso dal Dottor Gaetano Costa-Ramo.

stano e nelle vicinanze dello Stagno di Molentargius: abbondante.

* **Bembex geneana**, A. Cost. — Abbondantissima in diversi luoghi delle montagne di Desulo e adiacenti al Gennargento.

* — **melanostoma**, A. Cost. — Con la precedente e parimente abbondante [1]).

* **Stizus terminalis**, Dahlb. — Raccolto presso lo Stagno di Sorso: agosto.

* **Hoplisus punctulatus**, V. Lind. — Trovato sulla montagna di Laconi: luglio.

* — **latecinctus**, Lep. — Rinvenuto nelle adiacenze di Meana.

* — **concinnus**, Ross. — Raccolto nelle vicinanze di Fonni in luglio, e presso lo Stagno di Sorso in agosto.

* **Harpactes formosus**, Jur. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle vicinanze di Meana: luglio.

* — **laevis**, Lep. — Anche questa specie sembra rara: ne abbiamo trovato un solo individuo presso Fordongianus: agosto.

— **elegans**, Lep. — Raccolto nelle adiacenze di Belvì.

* — **leucurus**, nob. — Ne abbiamo un individuo raccolto nelle vicinanze di Tonara.

* **Psen atratus**, V. Lind. — Raccolto nelle adiacenze di Fonni.

* **Cemonus rugifer**, Dahlb. — Rinvenuto a Scala di Giocca.

* **Passalaecus turionum**, Dahlb. — Ne abbiamo trovato un solo individuo nella valle del Montenuovo: agosto.

* **Stigmus pendulus**, Panz. — Raccolto nel boschetto vicino a Ploaghe: agosto.

* **Rhopalum gracile**, Wesm. — Ne abbiamo un individuo maschio raccolto presso le sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

* **Crossocerus bison**, nob. — Ne abbiamo un individuo maschio trovato nelle vicinanze di Oristano: agosto.

* **Blepharipus bucephalus**, Smith. — Molto abbondante presso il Tirso a Fordongianus: agosto.

* **Solenius** . . . ? — Ne abbiamo raccolto un individuo solo presso Monastir.

Notoglossa diphylla, A. Cost. — Ne abbiamo rinvenuto un secondo individuo anche femmina come il primo, nelle sponde sabbiose dello Stagno di Cabras.

Notoglossa frondigera, A. Cost. — Molto abbondante presso Oristano, Fordongianus, Scala di Giocca: ne abbiamo ambedue i sessi: la femina meno frequente del maschio.

Pison Jurinei, Spin. — Diffuso per molte parti dell'isola; più abbondante l'abbiam trovato nel bosco di Gavoi.

* **Silaon compeditus**, Picc. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle vicinanze di Laconi: luglio.

Priocnemis croceicornis, Klug. — Raccolto nella Pianura di Palmas Arborea e presso Fordongianus: agosto.

— **infumatus**, Palm. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle vicinanze dello Stagno di Palmas.

— **perligerus**, A. Cost. — Raccolto presso Oristano.

— **abdominalis**, Dahlb. — Ne abbiamo raccolto un individuo ne'dintorni di Tonara.

* **Aporus bicolor**, Spin. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto sul Monte Chiesa di Aritzo.

Scolia hirta, Schrk. — Trovata sulle montagne di Desulo.

* **Elis villosa**, Fab. — Raccolta nelle vicinanze di Meana: luglio; assai poco frequente.

Myzine erythrura, A. Cost. — Raccolta presso lo Stagno di Sorso.

* **Myrmosa ephippium**, Jur. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle vicinanze di Oristano.

* **Mutilla calcariventris**, Sich. Rad. — Ne abbiamo raccolto due individui maschi presso Meana.

* — **hispanica**, S. R. var. *melanolepis*, nob. — Trovati parecchi individui nelle campagne di Meana.

* — **Acusii**, nob. — Raccolta con le precedenti.

* **Eumenes arbustorum**, H. Sc. — Ne abbiamo un individuo raccolto sul Monte Chiesa di Aritzo.

* **Odynerus Costae**, And. — Diffuso per diverse parti dell'isola.

* — **De Stephanii**, And. — Specie poco frequente: raccolta presso Tissi e Porto Torres.

* **Camponotus marginatus**, Latr. v. *hyalinipennis*, n. — Raccolto nelle vicinanze di Tonara.

[1]) Veggansi le osservazioni su queste due specie nella parte terza.

* **Myrmecocystus cursor**, Fonsc. — Rinvenuto in diversi luoghi.
* **Formica rufibarbis**, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Desulo.
* **Leptothorax tuberum**, Fab. var. *nigroscutellata*. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.
* **Sphecodes hispanicus**, Wesm.—Ne abbiamo un individuo maschio raccolto nelle adiacenze di Oristano.
* **Halictus sexcinctus**, Latr.—Raccolto nelle adiacenze di Oristano.
* — **scabiosae**, Ross. — Diffuso per molte parti dell'isola, in pianura del pari che su montagne.
* — **major**, Nyl.—Rinvenuto nel tenimento di Orri.
* **Osmia cincta**, Dours.—Raccolta tra Quarto ed il Capo S. Elia in luglio.
— **atriventris**, A. Cost.— Raccolta presso Samassi e Laconi.
* **Megachile pyrina**, Lep.—Non rara nelle vicinanze di Fonni: agosto.
* — **lagopoda**, Panz. — Raccolta sulle montagne di Desulo e presso Nuoro.
Lithurgus haemorrhoidalis, Lep. — Trovato abbondante in varii luoghi: qualche individuo ancora sulle massime alture del Gennargento.
* **Anthidium...?**—Abbondante nelle vicinanze di Oristano: luglio.
* **Nomada Manni**, Mor. — Trovata molto abbondante nella campagna di Samassi: luglio.
— **furva**, Panz. — Frequente presso Samassi, Laconi ed Oristano.
* **Coelioxys argentea**, Lep. — Non rara nelle adiacenze di Oristano.
* **Macrocera ruficornis**, Fab. — Trovata abbondante (ambedue i sessi) nelle adiacenze di Oristano.
* **Eucera algira**, Lep.—Ne abbiamo rinvenute due femmine nella campagna di Cagliari.
* **Hylotoma rosae**, Deg. — Raccolta nelle adiacenze di Meana.
* **Cladius pectinicornis**, Fourc. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo maschio a Scala di Giocca: agosto.
* **Nematus septentrionalis**, Lin.—Ne abbiam trovato un solo individuo nella valle di Fontana Minda sotto il Gennargento.
* — **gallicola**, Steph. — Raccolto nelle vicinanze di Tonara.
Emphytus cinctus, Lin. — Ne abbiamo un individuo raccolto nel tenimento di Sassari.
Ametastegia fulvipes, A. Cost.—Ne abbiamo rinvenuti varii individui nella stessa località di Porto Torres ove fu trovato il primo, e qualcuno ancora presso Oristano.
* **Evania fuscipes**, Ill. — Raccolta a Samassi entro l'abitato.
* — **splendidula**, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo a Scala di Giocca.
Foenus pedemontanus, Tourn.—Diffuso per varie parti dell'isola.
* — **affectator**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.
* — **rubricans**, Guer. — Trovato non raro nelle campagne di Meana: luglio.
* **Ichneumon comitator**, Lin.—Raccolto nelle vicinanze di Sassari.
* — **luctuosus**, Grav. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Laconi.
* — **repetitor**, Kriech.—Ne abbiamo rinvenuti due individui nelle adiacenze di Meana: luglio.
* — **discrepator**, Wesm.—Raccolto ne' boschi di Aritzo: luglio.
* — **vacillatorius**, Grav.—Raccolto sopra le montagne di Desulo: luglio.
* **Amblyteles glaucatorius**, Fab. — Specie alquanto rara: raccolta nelle vicinanze di Oristano.
* **Apaeleticus flammeolus**, Wesm. ♂ (?)— Rinvenuto nella valle di Correboi: agosto [1]).
* **Colpognathus celebrator**, Grav. — Trovato in diversi luoghi; Laconi, Oristano, Sassari: luglio, agosto.
* **Dicoelotus pumilus**, Gr. — Raccolto sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi: luglio, agosto.
* **Phaeogenes stimulator**, Gr. — Trovato in

[1]) Wesmael ha descritta questa specie sopra due individui femine. Il sig. Kriechbaumer ci comunica aver catturato finora un individuo anche femina. Il maschio non è ancor conosciuto. Per siffatta ragione solo per analogia può giudicarsi che questo nostro sia il maschio della specie indicata. Noi possediamo di Sardegna un individuo femina di *Apaeleticus*, ma non corrisponde con la descrizione ne di questa, nè dell'altra *bellicosus*. Attendiamo di trovare altri individui per poterne trattare.

diversi luoghi (Laconi, Desulo, Fonni), non molto raro: luglio, agosto.

* **Hoplismenus armatorius**, Panz. — Raccolto sulle montagne attigue al Gennargento in agosto. Un altro ve lo avevamo trovato nel settembre 1881.

* **Cryptus viduatorius**, Grav.—Raccolto nelle vicinanze di Tonara: luglio.

* — **peregrinator**, Lin. — Rinvenuto nella campagna di Tissi: agosto.

* — **plebeius**, Thom. — Trovato nelle vicinanze di Samassi: luglio. Ne avevamo ancora un individuo dell' Isola Piana, del maggio 1882.

* — ...? — Ne abbiamo rinvenuto un individuo a Campo alase, cioè sotto le vette del Gennargento.

* **Mesostenus grammicus**, Grav. — Raccolto nelle campagne di Sassari.

* **Ischnoceros microcephalus**, Grav. — Ne abbiamo trovato un individuo femina presso Porto Torres: agosto.

* **Tryphon scotopterus**, Gr. — Trovato abbondante nelle vicinanze di Osilo nel maggio 1882.

* **Exochus coronatus**, Grav.—Raccolto presso Laconi, Aritzo e Fordongianus.

* **Bassus laetatorius**, Panz.—Raccolto in diversi luoghi: Oristano, Sassari, Iglesias: luglio, agosto.

Paniscus lineolatus, A. Cost. — Ne abbiam trovato un secondo individuo sul monte Chiesa di Aritzo.

* **Campoplex Kriechbaumeri**, nob. — Ne abbiamo un individuo solo femmina rinvenuto nelle vicinanze di Oristano in maggio 1882.

* **Sagaritis zonatus**, Grav. — Raccolto nella valle di Correboi e nelle vicinanze di Sassari.

* **Casinaria orbitalis**, Grav. — Rinvenuta nelle adiacenze di Oristano in agosto. Ne avevamo altro individuo trovato presso Alghero nel settembre 1881.

* **Limneria difformis**, Grav. — Raccolta in diversi luoghi: luglio, agosto.

* — **rufiventris**, Grav. — Non rara presso Sassari e Porto Torres.

* **Exetastes guttatorius**, Grav. — Rinvenuto nella campagna di Tissi.

* **Pimpla instigator**, Panz. — Raccolto nelle vicinanze di Sassari.

* **Lissonota lineata**, Grav. — Raccolti ambedue i sessi nelle adiacenze di Fonni: non raro.

* — **bellator**, Grav. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle adiacenze di Oristano.

* **Vipio desertor**, Fab.[1]). — Trovato in diversi luoghi piani e montuosi (Cagliari, Oristano, Tonara, Fonni): luglio, agosto.

Bracon appellator, Nees. — Raccolto presso Gavoi, Nuoro, e Scala di Giocca: agosto.

* — **flavator**, Fab. — Ne abbiam trovato un individuo solo nelle adiacenze di Meana: luglio.

* **Agathis nigra**, Nees. — Raccolta nelle adiacenze di Aritzo, non molto rara.

* **Chelonus minutus**, nob. — Non raro in vicinanza dello Stagno di Sassu.

* **Microgaster globatus**, Spin. — Raccolto sulle montagne di Desulo.

* — **dorsalis**, Spin. — Raccolto nelle campagne di Oristano.

* **Leucospis sardoa**, nob. — Raccolta presso Oristano e Portoscuso: agosto e settembre: rara.

— var. *minor*. — Ne abbiam trovato un solo individuo femmina nelle vicinanze di Fonni: agosto.

* — **Sicelis**, Westw. — Raccolta in varii luoghi (Meana, Laconi, Fonni, Portoscuso): ovunque però poco frequente.

— **torquata**, A. Cost. — Trovata alquanto abbondante nella valle Canonica presso Iglesias intorno i fiori della *Euphorbia Cupani:* primi giorni di settembre.

* **Chalcis discrepans**, A. Cost. — Raccolta presso Oristano e lo stagno di Sorso: agosto.

* **Decatoma signata**, Nees. — Rinvenuta nelle adiacenze di Portoscuso: primi giorni di settembre.

* **Megastigma pistaciae**, Walk. — Trovata in varii luoghi (Portoscuso, Stagno di Sorso, Porto Torres): agosto e settembre.

* **Callimome nigricornis**, Fab. — Raccolta nelle adiacenze di Fonni: settembre.

* **Encyrtus sylvius**, Dalm. — Ne abbiamo rin-

[1]) Nella parte prima abbiamo menzionato di aver rinvenuto il *Vipio algiricus;* ed in effetti i nostri individui corrispondono esattamente alla figura e descrizione che di quella specie dà il Lucas. Però, ben riflettendo, ci pare che essa in nulla differisca dalla specie tipica *V. desertor*, del quale crediamo debba ritenersi sinonimo.

venuti due individui nelle vicinanze di Cagliari: luglio.

* **Comys scutellaris**, Dalm. — Rinvenuto in un bosco di giovani querce tra Desulo e Tonara.

* **Eupelmus**... ? (affine all' *excavatus*). — Trovato nelle praterie in vicinanza dello Stagno di Sorso: agosto.

* — ...? — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Bosa.

* **Pteromalus larvarum**, Nees. — Raccolto ne' boschi della valle di Correboi.

* — **varians**, Spin. — Trovato nella campagne di Oristano.

* — **ovatus**, Nees. — Raccolto ne' boschi di querce della valle di Correboi: agosto.

* — **luniger**, Nees. — Rinvenuto nelle vicinanze di Gonnesa: primi giorni di settembre.

* **Euplectrus albiventris**, Spin. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle vicinanze di Fonni: agosto.

* **Sparasion frontale**, Latr. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano: agosto.

* — **pallidinerve**, nob. — Rinvenuto nelle vicinanze di Meana: luglio.

* **Hedychrum lucidulum**, Latr. — Raccolto nelle vicinanze di Oristano: agosto.

— **rutilans**, Dahlb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Aritzo: luglio.

Chrysis assimilis, Spin. — Trovata presso Porto Torres ed a Scala di Giocca: agosto.

* — ...? (affine alla *crassimargo*, Spin.). Alquanto frequente a Scala di Giocca: trovata anche a Monastir: luglio, agosto.

* — ...? (affine alla *Illigeri*, Wesm.).—Ne abbiamo tre individui, trovati a Monastir, Tonara e Gavoi.

* — **cyanopyga**, Dahlb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nella montagna di Laconi: luglio.

— **inaequalis**, Dahlb. — Ne abbiamo raccolto un individuo presso Fordongianus ed un altro presso Fonni.

* — **distinguenda**, Dahlb. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo sulle montagne di Desulo: luglio.

* **Parnopes carnea**, Ross. — Ne abbiamo raccolto un individuo solo sopra le montagne di Desulo: luglio.

Emitteri

Poche novità si trovano in quest'ordine, in cui verrà descritta soltanto una specie di *Kelisia*. Però il numero delle specie che abbiamo aggiunte è stato pur considerevole, sopratutto nelle famiglie che in proporzione erano meno estese, come sono i Capsidei e gli Jassidei. Nella maggior parte poi delle altre famiglie abbiamo specie interessanti. Per esempio ne' Scutelleridei si è presentata una specie di *Podops*, che non è alcuna delle tre che finora conosconsi d'Italia.

Odontoscelis fuliginosa, Lin. — Rinvenuta sulle montagne di Desulo: fine di luglio.

* **Odontotarsus caudatus**, Klug, (*productus*, Spin.).—Ne abbiamo trovato un individuo presso Meana in luglio ed altro presso Sassari in agosto.

Stiraspis sardoa, A. Cost. — Trovata abbondante in diversi luoghi (Laconi, Meana, Fonni, Scala di Giocca): luglio ed agosto.

* **Podops** . . . ? [1]) — Ne abbiamo rinvenuto un individuo alle sponde de' rivoli di Scala di Giocca, presso le radici delle piante: agosto.

* **Sehirus dubius**, Scop. — Trovato nelle adiacenze di Sassari e presso lo Stagno di Sorso: agosto.

* — **maculipes**, Muls. R.—Rinvenuto nelle praterie attigue allo Stagno di Sorso: agosto.

Sciocoris macrocephalus, Fieb. — Trovato presso lo Stagno di Sorso: agosto.

* — **terreus**, Schrk. — Rinvenuto nelle adiacenze di Quarto e presso lo Stagno di Sorso: luglio ed agosto.

[1]) Veggasi l'osservazione nella parte terza.

Sciocoris Helferi, Fieb. — Trovato presso lo Stagno di Sorso: agosto.

Aelia acuminata, Lin. — Diffusa per quasi tutta l'isola non escluse le regioni montuose: luglio, agosto, settembre.

— **cognata**, Fieb. — Più diffusa e più abbondante della precedente.

* **Neottiglossa leporina**, Luc. var. — Trovata presso lo Stagno di Sorgo: agosto.

* — **bifida**, A. Cost. — Diffusa per molte parti dell' isola: luglio, agosto e settembre.

— var. [1]). — Diffusa quanto la precedente.

Peribalus distinctus, Fieb. — Trovato in diversi luoghi (Laconi, Aritzo, Orani, Scala di Giocca), ma sempre poco abbondante: luglio ed agosto.

* — **vernalis**, Wolff. var.—Rinvenuto nelle adiacenze di Aritzo: luglio.

— **albipes**, Fab. — Diffuso per quasi tutta l'isola e talvolta abbondante: luglio, agosto, settembre.

Carpocoris lunula, Fab. — Trovato presso Cagliari, Aritzo, Stagno di Sorso: luglio, agosto.

— **verbasci**, Deg.—Diffusa in tutta l'isola; in copia straordinaria sotto i macigni della vetta del Gennargento.

Brachynema cinctum, Fab.—Trovato presso lo Stagno di Sassu, sopra le Salicornie, nella seconda metà di agosto: poco abbondante.

* **Nezara viridula**, Lin. var. *aurantiaca*, n.— Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo nelle vicinanze di Oristano: agosto.

* **Piezodorus incarnatus**, Germ. — Trovato nelle praterie del bosco presso Orani: agosto.

* **Raphigaster griseus**, Fab. — Trovato nella foresta presso Laconi: luglio.

* **Ciphostethus tristriatus**, Fab. — L'abbiamo rinvenuto soltanto nella valle di Correboi, sopra il *Taxus baccata*: fine di luglio: abbondante.

* **Syromastes marginatus**, Lin. — Osservato presso Oristano: agosto.

* **Gonocerus venator**, Fab. — Trovato nel bosco delle vicinanze di Orani: agosto: poco frequente.

* — **juniperi**, Her. Sch. — Raccolto nella valle di Correboi ne' primi giorni di agosto.

* **Coreus denticulatus**, Panz. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Cagliari in luglio, ed un altro vicino lo Stagno di Sorso in agosto.

— **pilicornis**, Burm. — Diffuso per quasi tutta l' isola, non escluse le regioni montuose.

Stenocephalus agilis, Scop. — Diffuso per tutta l'isola.

— **neglectus**, Her. Sch. — Diffuso quanto il precedente.

Chorosoma Schillingii, Schum. — Trovato presso Meana e lo Stagno di Sorso.

* **Metacanthus elegans**, Curt. — Rinvenuto nelle adiacenze di Oristano: luglio.

* **Lygaeus punctatoguttatus**, Fab. — Trovato a Scala di Giocca.

* **Arocatus Roeselii**, Schm. — Ne abbiamo trovato un individuo nella valle di Correboi: primi giorni di agosto.

Cymodema tabidum, Spin. — Non raro tra le piante palustri sulle sponde de' rivoli di Scala di Giocca: agosto.

Cymus melanocephalus, Fieb.—Diffuso per molte parti dell' isola presso le sponde de' fiumi o canali, fin nelle regioni montuose.

* **Kleidocerus geminatus**, Fieb. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.

* **Henestaris laticeps**, Curt. (*Genei*, Spin.)— Trovato abbondante presso lo Stagno di Cagliari sopra le Salicornie: luglio.

Engistus boops, Duf. — (*Ophthalmicus Genei*, A. Cost.). Trovato in vicinanza di varii stagni.

Ophthalmicus siculus, Fieb.—Trovato presso Oristano e lo Stagno di Sorso, in agosto. Molti individui erano ancor larve o ninfe.

Holcocranum saturejae, Kol.— Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo tra le piante palustri delle sponde del fiume a Porto Torres.

Microplax albofasciata, A. Cost. — Trovata a Montenuovo presso Correboi: agosto.

Brachyplax palliata, A. Cost. — Raccolta a Scala di Giocca, insieme ad una varietà [2]): agosto.

Metopoplax ditomoides, A. Cost.—Trovato

[1]) È questa la *Neottiglossa* che nella Memoria seconda lasciammo senza nome specifico.

[2]) Veggansi le annotazioni in fine.

sopra Montenuovo anzidetto, non molto raro.

* **Metopoplax ditomoides**, var. *decipiens*.—Ne abbiamo un individuo trovato presso Cagliari in luglio.

Lasiocoris anomalus, Kol. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo sulle montagne di Desulo: luglio.

* **Pachymerus Rolandri**, Lin.—Raccolto presso Meana ed Oristano: luglio ed agosto: poco abbondante.

— **tristis**, Fieb. — Non raro sulle montagne di Desulo: luglio.

Pachymerus Douglasi, Fieb. (*Ghilianii*, Garb.). — L'abbiam trovata piuttosto abbondante sulle montagne di Desulo in contrada detta *Tascusì*, sotto le pietre, in luglio. Molti individui erano ancor larve.

Scolopostethus decoratus, Hahn. — Trovato nella valle di Correboi: agosto, non raro.

Notochilus nervosus, Fieb. — Rinvenuto nella foresta del Marchese di Laconi: luglio: raro.

Emblethis verbasci, Lin. — Diffuso per molte parti dell'isola, fin sulle massime alture del Gennargento.

Peritrechus nubilus, Fall. — Trovato sopra le montagne di Desulo: luglio.

— **gracilicornis**, Put. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano: agosto.

* **Piesma quadrata**, Fieb.—Trovata non rara presso lo Stagno di Sassu: la forma brachiptera molto più abbondante della macroptera.

* **Monanthia eryngii**, Latr.—Rinvenuta nelle adiacenze di Fonni in agosto: non rara.

Anthocoris nemoralis, Fab. — Trovata nel Campidano di Oristano: agosto.

Cardiastethus rufescens, A. Cost. (*testaceus*, Perr. n. M. R.). — Raccolto in diversi luoghi: Oristano, Palmas Arborea, Sassari: agosto.

* **Miris calcaratus**, Fall. — Trovato nelle adiacenze di Porto Torres: agosto.

* — **laevigatus**, Lin. — Diffuso per varie parti dell'isola: luglio, agosto.

* **Megaloceraea ruficornis**, Fall. — Raccolta presso Palmas Arborea e Gonnesa: agosto.

Teratocoris notatus, Baer.—Specie piuttosto rara: l'abbiamo rinvenuta presso il fiume di Porto Torres e quello di Bosa.

* **Phytocoris populi**, Lin.—Trovato sulle montagne di Laconi e di Desulo sopra le Elci: ma poco abbondante.

* — **obliquus**, A. Cost.—Trovato in diversi luoghi.

* **Lygus pratensis**, Fab. — Diffuso per quasi tutta l'isola; il tipo con numerose varietà.

* **Orthops cervinus**, H. S. — Trovato abbondante sulle montagne di Desulo; meno comune su quella di Laconi e presso Oristano.

* **Camptobrochis lutescens**, Schill.—Diffuso per quasi tutta l'isola, in luoghi piani del pari che elevati.

* **Capsus punctum**, Ramb.—Raccolto in diversi luoghi piani e montuosi, ma poco abbondante.

* **Myrmecomimus paederoides**, nob.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle vicinanze di Aritzo.

* **Pithanus Maerkelii**, H. S. — Raccolto sulla montagna di Aritzo e sulle montagne di Desulo; la forma macroptera a Bosa e Porto Torres.

Globiceps sphegiformis, Ross. — Raccolto sulle montagne di Desulo.

* **Aetorhinus angulatus**, Fab. — Frequente sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi.

* **Malacocoris chlorizans**, Fall. — Rinvenuto soltanto ne' boschi di Aritzo, sopra il *Corylus Avellana*: luglio: non raro.

* **Orthotylus flavosparsus**, Sahlb. — Raccolto nelle vicinanze di Oristano e Porto Torres: agosto.

* **Litocoris ericetorum**, Fall.—Raccolto nelle adiacenze di Fonni.

* **Oncotylus nigricornis**, Saund.—Rinvenuto soltanto nelle adiacenze di Fonni: agosto: non molto raro.

* **Macrocoleus aurantiacus**, Fieb.—Specie conosciuta solo di Corsica. Trovato abbondante sul Monte Chiesa di Aritzo sopra l'Erica: luglio.

* **Macrotylus Horvathi**, Reut. — Rinvenuto nelle adiacenze di Fonni: agosto: non molto raro.

* **Campylomma annulicornis**, Sign.—Trovato abbondante nelle adiacenze di Laconi e Meana: luglio.

* **Sthenarus pusillus**, Reut.—Rinvenuto nella valle di Correboi e su Monte Nuovo, costantemente sulla *quercus ilex*: agosto.

* **Sthenarus . . . ?** — Raccolto nelle vicinanze di Laconi: poco abbondante.

Oncocephalus squalidus, Ross. — Trovato nelle adiacenze di Sassari.

Coranus subapterus, Wolff. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle adiacenze di Porto Torres: agosto.

Nabis major, A. Costa.—Anche questa specie è poco frequente: l'abbiamo raccolta solo presso Meana: luglio.

* **Plojaria vagabunda**, Lin. — Trovata nelle selve di Aritzo.

* **Corisa Geoffroy**, Leach. — L'abbiamo trovata in un piccolo pantano presso Torre grande in quel di Oristano.

* **Tettigia orni**, Lin. — Abbondantissima in tutti i boschi con *fraxinus ornus:* luglio ed agosto.

Tibicina cisticola, Gen. — Abbondante nei luoghi incolti e con Cisti, sia piani, che elevati (Fonni).

— **tomentosa**, Oliv. — Abbondante tra lo Stagno di Quarto ed il Capo S. Elia in quel di Cagliari: luglio.

— **luctuosa**, A. Cost. — Sembra circoscritta alle regioni montuose. Trovata discretamente abbondante presso Desulo, in luoghi incolti: luglio.

Haplacha seticulosa, Leth.—Raccolta nelle adiacenze di Gonnesa ne' primi giorni di settembre; costantemente sopra i Tamarici, ma poco abbondante.

Cixius nervosus, Lin.—È la specie del gruppo più diffusa nell'isola.

* **Oliarus pallens**, Germ. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

* — **leporinus**, Lin.—Trovato in preferenza in luoghi montuosi: Desulo, Tonara, Fonni: luglio.

* **Dictyophara . . . ?** — Ne abbiamo raccolto un individuo a Scala di Giocca: agosto.

* **Histeropterum liliimacula**, O. Cost.—Trovato nelle vicinanze di Meana: luglio: non raro.

— **bilobum**, Fieb. — Abbondante nelle adiacenze di Meana, Tonara, ecc.

— **fuscovenosum**, Fieb. — Raccolto sulle montagne di Aritzo e di Desulo: luglio: frequente.

— **areolatum**, A. Cost.—Lo abbiamo rinvenuto sopra le montagne di Aritzo.

— **camelus**, A. Cost. — Ne abbiamo trovati individui completi presso lo Stagno di Sassu negli ultimi giorni di agosto.

Asiraca clavicornis, Fab. — Trovata nelle vicinanze di Fonni: agosto.

Araeopus pulchellus, Curt. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo femmina nelle adiacenze dello Stagno di Sassu: agosto.

* **Tropidocephala elegans**, O. Cost. — Raccolta presso lo Stagno di Sorso ed a Portoscuso: agosto; non rara.

* **Kelisia Brucki**, Fieb. — Trovata in luoghi palustri nelle vicinanze di Portoscuso: settembre.

* — **guttula**, Germ. — Raccolta nelle adiacenze dello Stagno di Palmas Arborea: agosto.

* — **Putoni**, nob. — Ne abbiamo rinvenuti tre individui tra giunchi e ciperi sulle sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

Delphacinus Putoni, Scott.—Trovato nella valle di Correboi e presso lo Stagno di Sorso: agosto.

* **Chloriona unicolor**, H. S.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo tra piante palustri delle sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

* **Delphax Lethierryi**, Scott. — Specie conosciuta innanzi soltanto di Corsica: l'abbiamo rinvenuta a Scala di Giocca ed a Porto Torres: agosto.

* — **obscurella**, Boh. — Raccolta a Scala di Giocca: agosto: poco frequente.

* — **brevipennis**, Boh.—Trovata nelle sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

— **tapina**, Fieb. — Trovata con la precedente.

Stiroma pteridis, Genè. — Raccolta sulle montagne di Desulo, fino alle falde del Gennargento: luglio.

* **Lepyronia coleoptrata**, Lin. — Trovata in diversi luoghi (Meana, Aritzo, Porto Torres): ovunque poco abbondante.

* **Aphrophora alni**, Fall. — Trovata come la precedente, ma più abbondante.

Ptyelus lineatus, Lin. — Trovato abbondantissimo in luoghi palustri presso Portoscuso, in settembre; meno abbondante nella valle di Correboi.

* — **spumarius**, Lin.—Abbondante in molti luoghi, il tipo con molte varietà.

* **Idiocerus taeniops**, Fieb. — Trovato in diversi luoghi (Laconi, Meana, Portoscuso): luglio, agosto e settembre.

* — **cognatus**, Fieb. — Abbondante presso lo Stagno di Palmas Arborea: agosto.

* **Idiocerus ustulatus**, M. R. — Trovato col precedente e parimente abbondante.

* **Bythoscopus flavicollis**, Lin. — Trovato abbondante nella valle di *Sa Minda* sopra l'*Alnus glutinosa*: fine di luglio.

* **Agallia venosa**, Fall. — Raccolta presso Cagliari, Porto Torres, sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi: luglio, agosto.

* **Acocephalus striatus**, Fab. — Trovato sulle montagne di Aritzo, Desulo e Fonni: luglio, agosto.

* **Paramecus nervosus**, Fall. — Abbondantissimo ne' prati umidi presso le sponde del Temo a Bosa: agosto.

* **Thamnotettix fuscovenosa**, Fieb. — Raccolta sulle montagne di Aritzo, Desulo e Correboi: luglio, agosto.

* — **tenuis**, Ger. — Rinvennta sulle montagne di Desulo: luglio.

* — **vitripennis**, Flor. — Raccolta in luoghi palustri presso Portoscuso: settembre.

* — **haematoceps?** — Ne abbiamo un individuo raccolto nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

* **Athysanus limbatus**, Fieb.—Frequente sulle montagne di Aritzo e di Desulo: luglio.

* — **erythrostictus**, Fieb. — Abbondantissimo sul Monte Chiesa di Aritzo: luglio: trovato anche a Correboi.

* **Allygus mayri**, Kirb. — Abbondantissimo sulle montagne di Desulo: luglio.

* **Chlorita flavescens**, Fab. — Raccolta presso lo Stagno di Sassu ed il fiume di Porto Torres: agosto.

* **Eupteryx Putoni**, Leth. — Frequente nelle adiacenze di Meana e di Desulo: luglio.

* **Zygina punctulum**, Muls. R.—Trovata presso lo Stagno di Palmas Arborea ed a Ploaghe: non rara: agosto.

* **Livia limbata**, Wag. var. *crefeldensis*, Mink. Trovata abbondante sopra il *Taxus baccata* nella valle di Correboi ed altri luoghi.

* — **juncorum**, Latr. — Trovata nelle montagne di Desulo.

Psylla Foersteri, Flor. — Trovata abbondante sopra l'*Alnus glutinosa* nella valle di Fontana Minda.

* — **elaterni**, Forst. — Raccolta nella Montagna di Laconi.

* **Triozoa alacris**, Flor.—Raccolta nelle adiacenze di Oristano, nelle praterie: agosto.

Arytaina genistae, Latr. — Trovata sopra gli Olivi selvatici presso le sponde del fiume Araxcis a Meana: abbondante ancora sulle mantagne di Desulo. sopra le Elci.

Rhinocola ericae, Curt. — Abbondantissima sopra l'*Erica arborea* in luoghi piani e montuosi.

* **Aphalara tamaricis**, Put. — Raccolta sopra i Tamarici nelle adiacenze di Palmas Arborea: agosto.

— **exilis**, Web. — Rinvenuta nel bosco di Montenuovo presso Correboi.

* — **polygoni**, Foerst.—Raccolta nelle praterie presso le sponde del Tirso vicino Oristano.

* **Homotoma ficus**, Lin. — Non rara sopra il Fico comune. Ne abbiamo trovato ancora qualche individuo sopra le Elci nel bosco di Girgini.

Lepidotteri

La contribuzione avuta in quest'ordine, tenuto conto delle difficoltà già esposte altra volta, è stata pur soddisfacente. Tra i diurni abbiam potuto raccogliere una delle specie particolari della Sardegna, l'*Argynnis Elisa*. Tra i Crepuscolari varie specie si sono aggiunte al genere *Sesia*. De' Notturni è sempre scarso il numero delle Noctue, quantunque non siano mancate alcune specie assai interessanti. Il contributo maggiore lo abbiamo ottenuto ne' Microlepidotteri, tra quali vi ha una specie di *Crambus* che, a giudizio di Staudinger, poichè non ci saremmo azzardati a deciderci, è nuova. Vogliamo inoltre notare come il rinvenimento della *Staintonia medinella* sia un fatto di qualche importanza, poichè dopo l'Andalusia, ove la discoperse lo Staudinger nel 1858, non era stata più trovata in altri luoghi.

* **Colias edusa**, Fab. *var. helice*, Hb. — Osservata in diverse parti, ma non molto abbondante.

* **Lycaena telicanus**, Lang. — Raccolto presso Porto Torres; poco frequente.

— **argus**, Linn. — Trovato sulle montagne di Desulo; giunge fin sulle maggiori alture del Gennargento: luglio.

* **Limenitis sibilla**, Lin. — Specie assai poco diffusa: l'abbiamo raccolta nelle vicinanze di Laconi: luglio.

* **Argynnis Elisa**, God. — Trovasi nelle attinenze del Gennargento, ed è una delle poche specie che si elevano abitualmente sulle massime alture dello stesso.

— **paphia**, Lin. — Diffusa per varie parti dell'isola.

* **Satyrus Circe**, Fab. — Cominciammo ad osservarlo nelle vicinanze di Laconi, e proseguimmo a trovarlo nelle montagne di Desulo, nel bosco di Orani, in quello di Ploaghe: luglio, agosto.

— **semele**, Lin. var. — Trovato presso Tonara ed Orani: agosto.

— **Neomiris**, God. — Molto abbondante nei monti della catena del Gennargento, sulle cui vette è pure frequente.

* **Pararge tithonus**, Lin. — Raccolto nella montagna di Laconi: luglio.

— **Ida**, *Esp.* var. — Trovato sulle montagne di Desulo e nel bosco di Orani.

Sesia uroceriformis, Trt. — Raccolta nelle vicinanze di Desulo: luglio.

* — **ichneumoniformis**, Fab. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari: luglio.

* — **asiliformis**, Rott. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle vicinanze di Tonara: luglio.

* — **aerifrons**, Tell. — Specie diffusa in varie parti: raccolta in Laconi, Aritzo, Fonni, Correboi, Sassari.

* **Emydia bifasciata**, Ramb. — Specie conosciuta soltanto di Corsica. Ne abbiamo rinvenuto un individuo nelle montagne di Desulo, ed altro presso il Gennargento.

* **Porthesia chrysorrhoea**, Lin. — Raccolta in un bosco di Elci presso Desulo.

* — **auriflua**, Fab. — L'abbiamo trovata schiusa in abbondanza presso Tonara, negli ultimi giorni di luglio.

* **Bombyx franconica**, Esp. — Trovata soltanto sul Monte Chiesa di Aritzo, ove non era rara: luglio.

* **Lasiocampa quercifolia**, Lin. — Ne possediamo un individuo raccolto dal dott. Gaetano Costa. — Ramo in Carloforte.

* **Briophila muralis**, Forst. — Trovata nelle vicinanze di Cagliari: luglio.

* **Agrotis janthina**, Esp. — Osservata nelle vicinanze di Milis.

— **pronuba**, Lin. — Trovata sulle montagne di Desulo.

* **Calymnia trapezina**, Lin. — Specie piuttosto rara: ne abbiamo rinvenuti due individui nelle vicinanze di Fonni.

Acontia lucida, Hufn. — Osservata presso Meana e Fonni.

* **Thalpochares elychrysi**, Ramb. — Specie diffusa in varie contrade, ma ovunque poco frequente: raccolta presso Laconi e Desulo: luglio.

* — **candidana**, Fab. — Specie piuttosto frequente, trovata presso Cagliari, Oristano, Fonni: luglio, agosto.

* **Prothymia viridaria**, Cl. — Trovata soltanta sulla montagna di Laconi, nella regione de' suffrutici: luglio.

* **Grammodes bifasciata**, Pet. — Trovata sulle montagne di Desulo in luglio: poco frequente.

* **Pseudophia tirrhaea**, Cr. — Ne abbiamo rinvenuti due individui, l'uno sulla montagna di Laconi, l'altro presso Belvì: luglio.

* **Catephia** . . . . . ? — Ne abbiamo trovato un individuo solo di recente schiuso, poggiato sopra un tronco di pioppo presso Oristano: agosto.

* **Catocala elocata**, Esp. — Diffusa per molte parti dell'isola.

* — . . . . . ? — Ne abbiamo raccolti due individui nelle vicinanze di Milis; sembrava però non molto rara.

* — **nymphaea**, Esp. — Trovata nelle campagne di Desulo.

* **Herminia crinalis**, Fr. — Comunissima presso Desulo.

* **Hypaena lividalis**, Hub. — Osservata presso Cagliari e Porto Torres.

— **obsitalis**, Hub. — Nelle gallerie della miniera di Correboi trovasi moltiplicata a migliaia d'individui, che ne ricoprono estese superficie.

* **Pseudoterpna coronillaria**, Hub. — Trovata non rara tra anfratti rocciosi ed ombrosi delle alture massime del Gennargento: luglio.

* **Phorodesma smaragdaria**, Fab. — Rinvenuta nella valle di Correboi: luglio.
* **Nemoria pulmentaria**, Gn. — Raccolta in un bosco di elci presso Ploaghe.
* **Acidalia sericeata**, Hub. — L'abbiam trovata in diversi luoghi della regione montuosa di Laconi, Aritzo, Desulo; ovunque però poco abbondante.
* — **rusticaria**, Fab. — Diffusa per varie parti dell'isola, fin sopra le montagne di Desulo.
* — **decorata**, Bkh. — Raccolta nelle adiacenze di Laconi.
* **Zonosoma pupillaria**, Hubn. — Raccolta nelle vicinanze di Fonni.
Gnophos mucidaria, Hubn. — Trovata nella foresta di Laconi.
* **Cidaria coraciata**, Hubn. — Trovasi non molto rara sulle alture del Gennargento.
* **Cledeobia angustalis**, Schiff. — Raccolta sulle montagne di Desulo e nella valle di Correboi.
* **Aglossa cuprealis**, Hubn.—Rinvenuta nelle adiacenze di Fonni.
* **Endotricha flammealis**, Schiff. — Raccolta nel bosco di Orani.
* **Hellula undalis**, Fab. — Trovata nelle adiacenze di Meana: luglio, poco frequente.
* **Botys polygonalis**, Hubn. — Diffusa in varii luoghi: raccolta presso Aritzo, Fonni, Nuoro.
* — **limbopunctalis**, H. S. — Specie piuttosto rara: ne abbiamo trovato un individuo solo nelle vicinanze di Desulo: luglio.
Margarodes unionalis, Hubn. — Ne abbiamo raccolto un individuo presso Portoscuso: settembre.
Spanista ornatalis, Dup. — Trovata presso Porto Torres, ove la trovammo ancora nel settembre 1881 [1]).
Hydrocampa potamogalis, Hub. — Abbondante presso il fiume di Porto Torres in agosto.
* **Scirpophaga praelata**, Scop. — Abbondante presso le sponde del fiume di Porto Torres: agosto.
* **Ancylolomia tentaculella**, Hubn. — L'abbiamo trovata abbondante soltanto in un bosco presso Ploaghe: agosto.
* **Crambus vallicolellus**, nob. — Raccolto nella valle di Correboi: agosto.
* **Nephopteryx poteriella**, Zell. — Trovata nelle adiacenze di Fonni: agosto.
* **Nephopteryx genistella**, Dup. — Rinvenuta nella regione di boschi di elci delle montagne di Desulo: luglio.
* **Pempelia semirubella**, Sc. — Raccolta nelle adiacenze di Gonnesa: agosto.
* **Trachonitis cristella**, Hubn. — L'abbiam trovata non molto rara sopra le elci delle montagne di Desulo.
* **Zophodia** . . . (aff. alla *tephrinella*) — Raccolta presso Fonni e nella valle di Correboi: agosto.
Olindia ulmana, Hub. — Trovata nella valle *Sa Minda* sotto le vette del Gennargento: luglio.
* **Eudemis artemisiana**, Zell. — Raccolta nel bosco di Gavoi: agosto.
* **Carpocapsa splendana**, Hbn. — Trovata nei boschi di castagni delle adiacenze di Desulo: fine di luglio.
* — **grossana**, Hw. — Raccolta sulle montagne di Desulo.
* **Grapholitha hypericana**, Hbn. — Raccolta sulla montagna di Aritzo e nel bosco di Orani: luglio, agosto.
Choreutis pretiosana, Dup. — Trovata in diversi luoghi (Laconi, Meana, Tonara): luglio.
* **Psilothrix dardoinella**, Mill. — Ne abbiamo un solo individuo raccolto nelle adiacenze di Nuoro: agosto.
* **Zelleria phyllirella**, Mill. — Raccolta sulle montagne di Desulo.
* **Psecadia bipunctella**, Fab. — Ne abbiamo trovati moltissimi individui di fresco schiusi poggiati sul tronco de' pioppi presso Oristano, in agosto: osservata ancora a Ploaghe.
* **Depressaria yeatiana?** Fab.—Ne abbiamo un individuo solo rinvenuto nelle montagne di Desulo.
* — **purpurea**, Hw. — Raccolta nelle montagne di Desulo e nella valle di Correboi: luglio, agosto.
* — **badiella**, Hubn. — Ne abbiamo trovati parecchi individui nelle massime alture del Gennargento sotto i grossi sassi.
* **Tachyptilia scintillella**, Fab. — Raccolta sulle montagne di Desulo e presso Fonni: luglio, agosto.
* **Pleurota ericella**, Dup. — Molto abbondante sulle montagne di Aritzo, Desulo, ecc.
* **Gracilaria populetorum?** Zell. — Ne ab-

[1]) Vedi supplemento alla memoria prima.

biamo rinvenuto un individuo sulle montagne di Desulo.

* — n. sp.? — Anche di questa specie possediamo un solo individuo trovato sulle montagne di Desulo.

* **Butalis acanthella**, God. — Raccolta sulla montagna di Laconi.

Staintonia medinella, Staud. — Abbondante in varii luoghi ed in varie stagioni [1]).

* **Lithocolletis messaniella**, Zell. — Rinvenuta nel bosco di Elci di Montenuovo presso Correboi.

Oxyptilius laetus, Zell. — Trovato nelle adiacenze del Gennargento e presso Fonni.

Ditteri

Importantissima è stata la messe di Ditteri, sia per specie aggiunte, sia per forme nuove. Anche in quest' ordine vi sono stati fatti interessanti la geografia zoologica con specie non trovatesi innanzi in Italia. E tra queste possiamo citare il *Melithreptus flavicauda*, Zett. il *Sisthoecus lucidus*, Lw. conosciuto soltanto di Corsica, la *Myennis fusciata*, Fab., la *Simulia crassitarsis*, Macq. Non meno notevole è stato il rinvenimento del genere *Midas*, che ricco di specie esotiche, in Europa teneva rappresentanti soltanto nella Spagna e nel Portogallo. Il Westwood ha descritta una specie, *M. rufipes*, cui assegna per patria la Sicilia, però con interrogativo.

Le specie nuove assai caratteristiche si appartengono alla famiglia degli Asilidei e proprio a' generi *Saropogon* e *Stilopogon*. Tra le Ortalidine figura il genere *Chaetostoma* stabilito dal Rondani sopra un solo individuo trovato nelle colline di Parma. La famiglia degli Enopidei, che non ancora vi figurava, oggi è rappresentata da una prima specie, l' *Ogcodes gibbosus*; è possibile se ne trovino ancora altre.

* **Nemotelus leucorhynchus**, nob. — Trovato molto abbondante presso lo Stagno di Cagliari, tra le Salsole, nella prima metà di luglio.

* **Oxycera formosa**, Meig. — Ne abbiamo rinvenuti tre individui, due nella foresta di Laconi ed uno nella valle di Correboi: luglio, agosto.

Stratiomys longicornis, Scop. — Raccolta nelle adiacenze di Oristano: agosto.

* **Odontomyia viridula**, Fab. — Rinvenuta presso i piccoli pantani delle vicinanze di Oristano.

* **Chrysomyia polita**, Lin. — Ne abbiamo trovato un individuo nel boschetto di Ploaghe.

Beris hyaliniventris, A. Cost. — Raccolto nel predetto boschetto vicino Ploaghe.

* **Tabanus bovinus**, Lin. — Ne abbiamo incontrato qualche individuo sulle montagne di Desulo.

— **bromius**, Lin. — Anche di questa specie vedevasi qualche individuo nelle montagne di Desulo.

* — **luridus**, Fall. — Raccolto presso Portoscuso: settembre.

* **Tabanus fulvus**, Meig. — Ne abbiamo trovato un individuo nelle vicinanze di Meana: luglio.

* **Haematopota pluvialis**, Lin. — Abbondante nel bosco di Ploaghe e nelle vicinanze di Oristano.

Chrysops italicus, Meig. — Molto abbondante presso il littorale di Oristano, luogo detto *Torre grande*, ove attacca i cavalli ed anche i cani.

Pangonia maculata, Ross. — Non rara sulle montagne di Desulo.

* **Anthrax polyphemus**, Meig. — Ne abbiamo raccolto un individuo nelle campagne di Samassi.

— **maura**, Lin. — Raccolta nella foresta di Laconi in luglio, e presso Nuoro in agosto.

— **morio**, Lin. — Raccolta sulle montagne di Desulo.

* — **stenogastra**, nob. — Rinvenuta verso il Capo S. Elia presso Cagliari: luglio.

Argyromoeba tripunctata, Wied. — Raccolta presso Palmas Arborea ed a Scala di Giocca.

— **sinuata**, Fall. — Rinvenuta presso Oristano: agosto.

[1]) Vedi il supplemento alla memoria prima.

*

* **Exoprosopa grandis**, Wied. — Trovata soltanto nelle vicinanze di Nuoro: potemmo raccoglierne due individui, ma ne vidimo svolazzare parecchi.

— **vespertilio**, Wied. — Raccolta nelle adiacenze di Meana.

* — **lepismoides**, A. Cost. — Rinvenuta nelle vicinanze di Nuoro e presso lo Stagno di Sorso.

Chalcochiton holosericeus, Fab. — Non era frequente come nel maggio e giugno: ne abbiamo osservato appena qualche individuo.

* **Systoechus ctenopterus**, Mik. — Rinvenuto nella valle Canonica e nelle vicinanze di Bosa, ove era alquanto abbondante.

* — **lucidus**, Loew. — Specie conosciuta soltanto di Corsica: raccolta sulle montagne di Laconi e di Desulo, e nella valle di Correboi, non molto raro: luglio, agosto.

Cyllenia maculata, Latr. — Diffusa per diverse parti, ma non abbondante.

* **Geron gibbosus**, Mign. — Raccolto presso Iglesias, Portoscuso, Stagno di Sorso: agosto, settembre.

* **Ogcodes gibbosus**, Lin. — Ne abbiamo trovati parecchi individui sopra le Elci delle montagne di Desulo.

* **Pipunculus geniculatus?** Mgn. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.

* **Dioctria Bigoti**, nob. — Raccolta sulle montagne di Laconi e di Desulo, fin presso il Gennargento.

* **Saropogon perlatus**, nob. — Raccolto nelle vicinanze di Meana, ove non era molto raro, avendo potuto in poche ore raccoglierne quattro individui. Anche a Fontana Mela ne abbiam veduto qualcuno.

* **Gastrichelius nubeculipennis**, A. Cost. — Ne abbiamo raccolti due individui presso Palmas Arborea.

* **Stichopogon inaequalis**, Loew. — Frequente sulle sponde sabbiose degli stagni (Cabras) e de' fiumi (Tirso).

* — **aequecinctus**, nob. — Non molto raro sulle spiagge arenose del Tirso presso Fordongianus.

* **Holopogon fumipennis**, Meig. — Raccolto sulle montagne di Aritzo e di Desulo e nella valle di Correboi, non molto abbondante: luglio, agosto.

* **Pycnopogon fasciculatus**, Loew. — Rinvenuto qualche individuo nella foresta di Laconi.

Laphria maroccana, Fab. — Ne abbiam raccolto un individuo presso Meana.

* — **dioctriaeformis**, Meig. — Ne abbiamo rinvenuto due individui sulle montagne di Desulo.

Asilus barbarus, Fab. — Ne abbiam visto qualche individuo a Desulo.

— **siculus**, Macq. — Abbondante sulla montagna di Laconi: trovato pure presso Monastir, ecc.

— **fortis?** Loew. — Diffuso per buona parte dell'isola, fin sopra il Gennargento.

— **atricapillus**, Fall. — Anche questo Asilo è frequente in tutta l'isola.

— **Zelleri**, Sch. — Trovato in diversi luoghi, fin sulle alture del Gennargento.

* **Midas sardous**, nob. — Ne abbiamo rinvenuti due individui, uno presso Fordongianus ed un altro presso lo stagno di Sorso.

Thereva bicingulata, nob. — Non frequente come in maggio: raccolta a Portoscuso.

Anoplomerus virens, Scop. (*regius*, Fab.) — Non rara presso le acque nella Foresta di Laconi: luglio.

Dolichopus ciliifemoratus, Mq. — Abbondante presso lo Stagno di Sassu e Bosa.

* **Rhagheneura nitida**, Fall. — Trovata abbondante nella foresta di Laconi.

* — **griseipennis**, Stan. — Rinvenuta presso il littorale di Bosa e nelle vicinanze di Oristano.

Chrysotoxum bicinctum, Lin. — Ne abbiamo trovato un individuo sulle montagne di Aritzo.

* — **fasciolatum**, Deg. — Raccolto nella foresta di Laconi in luglio: poco frequente.

* **Paragus quadrifasciatus**, Mgn. — Trovato presso Laconi e Porto Torres; luglio, agosto: non comune.

* — **albifrons**, Fall. var. *majoranae*, Rond. Raccolto nelle adiacenze di Laconi.

* **Chrysogaster tarsatus**, Mgn. — Raccolto nella foresta di Laconi ed a Scala di Giocca: luglio, agosto.

Syrphus corollae, Fab. — Trovato a svolazzare in gran numero sulla più alta cima del Gennargento intorno la Torre di La Marmora.

* — **luniger**, Mgn. — Raccolto sul Monte Chiesa di Aritzo.

* **Melithreptus flavicauda**, Zett.—Specie non ancora conosciuta d'Italia; ne abbiamo rinvenuti due individui presso Oristano.

* **Eristalis sepulcralis**, Fab. — Raccolto nelle vicinanze di Palmas: agosto.

* — **pertinax**, Scop. (*similis*, Mgn.).—Trovato in diversi luoghi.

Merodon avidus, Ross. — Raccolto presso Meana ed Aritzo: sempre però poco frequente.

* — . . . . ? — Rinvenuto sulle vette del Gennargento.

* — **aerarius**, Rond. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto sulle montagne di Desulo.

* **Xylota segnis**, Lin. — L'abbiamo rinvenuta sulle montagne di Desulo e nelle vicinanze di Milis: luglio, agosto.

* **Eumerus emarginatus**, Loew. (*cavitibius*, Rond.) — Specie piuttosto rara nell'isola: trovata soltanto presso Oristano.

* — **crassitarsis**, nob. — Raccolto nelle vicinanze di Oristano e nella campagna di Samassi: luglio.

— **basalis**, Loew. (*angusticornis*, Rond.)- Anche questa specie è poco frequente: raccolta nelle vicinanze di Oristano.

* **Occemyia atra**, Fab. — Raccolta nel territorio di Oristano.

* **Cephalemyia ovis**, Lin. — Ne abbiamo incontrati individui fin sulla Torre La Marmora del Gennargento.

* **Phasia**...? — Ne abbiamo un solo individuo raccolto sulle montagne di Desulo.

Gonia atra, Mgn. — Trovata alquanto abbondante nelle vicinanze di Samassi, in luogo ombroso: luglio.

* — **capitata**, Deg. — Trovata a Samassi ed a Porto Torres: luglio, agosto.

* — **cinerascens**, Rond. — Raccolta nelle vicinanze di Oristano e Porto Torres: agosto.

Micropalpus comptus, Fall. — Lo abbiamo incontrato fin sulle vette del Gennargento insieme alle *Echinomyia fera* e *tessellata*.

Brachycoma translucida, A. Cost. — Raccolta nelle sponde sabbiose del Tirso presso Oristano.

Phorocera ciliitibia, Rond. — Trovata nelle adiacenze di Laconi.

Ocyptera rufipes, Mgn. — Ne abbiamo rinvenuti altri due individui, uno nelle vicinanze di Bosa ed altro presso lo Stagno di Sorso: agosto.

Pollenia rufipalpis, Macq. — Raccolta in diversi luoghi.

Cyrtoneura pascuorum, Mgn.— Diffusa per diverse parti dell'isola.

* **Myospyla meditabunda**, Fab. — Trovata in varii luoghi.

* **Lispe** . . . ? — Abbondante presso gli stagni di Cagliari e di Cabras.

Acantholena terminalis, A. Cost. — Raccolta nella foresta di Laconi e sulle montagne di Desulo.

* **Trigonometopus frontalis**, Mgn. — Ne abbiamo rinvenuto un solo individuo, nelle adiacenze di Porto Torres.

Dichetophora obliterata, Fab.—Diffusa per varie parti; Laconi, Aritzo, Meana.

* **Elgiva cucularia**, Lin.—Ne abbiamo raccolti tre individui nelle vicinanze di Milis.

* — **dorsalis**, Fab. — Raccolta nella valle di Correboi, ove sembra piuttosto rara.

* — **albiseta**, Scop.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo ne' boschi di Aritzo.

* **Tetanocera unguicornis**, Scop. — Raccolta nella foresta di Laconi; poco abbondante: luglio.

* **Sapromyza aenea**, Fall. — Trovasi in varii luoghi, sebbene non molto abbondante.

— **plumicornis**, Fall. — Specie comunissima.

* — **dilecta**, Rond. — Trovata in varie parti, non molto rara: luglio, agosto.

* — **notata**, Fall.—Raccolta ne' boschi delle adiacenze di Aritzo in luglio: non rara.

* — **luteiventris**, Rond. — Raccolta sulle montagne di Desulo.

* — **quadripunctata**, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Nuoro.

* — **palpella**, Rond. — Raccolta ne' boschi di castagni di Aritzo.

Dryomyza flaveola, Fab. — Trovata ne' boschi di Aritzo e delle montagne di Desulo.

* **Otites lamed**, Schr. (*Musca pulchella*, R.)— Rinvenuta nella foresta di Laconi, nel bosco di Aritzo e nelle adiacenze di Desulo: ovunque poco frequente.

* **Herina nigrina**, Mgn. — Raccolta nella foresta di Laconi e presso lo stagno di Sorso.

* — **rufipes**, Macq. — Trovata nelle adiacenze di Portoscuso.

* **Myennis fasciata**, Fab. — Trovata presso

Oristano, aggruppata intorno a funghi: agosto.

Myopites sardoa, A. Cost.—L'abbiam trovata alquanto abbondante presso lo Stagno di Sorso: qualche individuo ancora a Cabras.

* **Urophora stylata**, Fab. — Raccolta presso lo Stagno di Sassu e nel bosco di Orani: agosto.

— **solstitialis**, Lin. — Raccolta presso lo Stagno di Molentargius: luglio.

* **Chaetostoma princeps**, nob.—Ne possediamo due individui raccolti l' uno ne' boschi di Aritzo, l'altro nella valle *Sa Minda*.

* **Trypeta**, n. sp. — Ne abbiamo un individuo maschio raccolto a Fonni.

* **Oxyna punctella**, Fall. (*tessellata*, Lw.).— Diffusa per molte parti dell'isola.

* **Tephritis** ? (aff. *T. hyosciami*)—Ne abbiamo un individuo solo raccolto presso lo Stagno di Sassu: agosto.

* — **postica**, Loew. (*heraclei*, F.).—Trovata in gran numero nel bosco di Elci a Ploaghe.

— **formosa**, Loew. — Non rara sopra i monti di Desulo e nella valle di Correboi: luglio, agosto.

* — **bardanae**, Schr. — Montagne di Desulo; poco frequente.

* — **conjuncta**, Loew.—Raccolta nelle vicinanze di Aritzo: poco frequente: luglio.

* **pulchra**, Loew. — Trovata sulle montagne di Desulo, Tonara, ecc.: luglio.

* **Tephritis vespertina**, Loew. — Diffusa per varie parti dell'isola, fin presso le alture del Gennargento.

— **matutina**, Rond.—Raccolto nelle vicinanze di Arirzo ed a Correboi.

— **precox**, Loew.—Diffusa per varie parti dell'isola: luglio, agosto e settembre.

— **cincta**, Loew. — Diffusa quanto la precedente.

* **Ditricha stellata**, Fuess. — Trovata in varie contrade; Meana, Laconi, Portoscuso.

— **eluta**, Mgn. — Diffusa per quasi tutta l'isola.

Philophylla onopordinis, Fab. — Raccolta ne' boschi di castagni e Noccioli delle adiacenze di Aritzo: luglio.

* **Sepsis ruficornis**, Meig. — Raccolta ne' boschi di Aritzo.

* **Palloptera umbellatarum**, Fab.—Rinvenuta ne' boschi di Aritzo.

* **Macrochaetum cornutum**, Fab. — Ne abbiamo rinvenuti due individui ne' prati presso le sponde del fiume di Porto Torres: agosto.

* **Notiphila cinerea**, Fall. — Trovata abbondante in vicinanza delle acque presso Oristano e Porto Torres.

* **Simulia crassitarsis**, Macq. — Rinvenuta a Montenuovo.

Macrocera signatipennis, nob. — Ne abbiam rinvenuto un solo individuo maschio in un boschetto attiguo a Ploaghe.

Aracnidi

Nella precedente memoria dichiarammo che essendo assai scarso il numero delle specie studiate, preferivamo differirne la pubblicazione ad altro lavoro. Accresciutosi però il materiale per la raccolta fatta nel terzo viaggio, non abbiam voluto lasciarlo più oltre trascurato. L' ordinamento è stato compiuto. Una parte l' abbiamo noi medesimi studiata, coadiuvati talvolta da' due allievi di questa Scuola di Magistero che dietro nostro suggerimento si sono dedicati particolarmente allo studio degli Aracnidi Napoletani, signori Federico Raffaele e Francesco Monticelli. Altra l' abbiamo comunicata al distinto Aracnologo francese Simon, il quale assai gentilmente si è compiaciuto occuparsene. E sebbene ne rimangano ancora altre indeterminate, pure diamo il catalogo delle specie ben definite, riserbandoci le altre per la memoria seguente. Lo che stimiamo tanto più utile, in quanto che, quantunque conoscessimo che buon numero di Aracnidi sardi si trovano presso i nostri distinti aracnologi Canestrini e Pavesi, pure nessuna notizia essi ne hanno finora pubblicata. Poco vi ha di raro: ciò non ostante l'elenco che diamo l'è un complemento necessario per l' armonia delle altre classi.

Attidei

* **Thya imperialis**, Walck.—Rinvenuto presso Pula: aprile 1882.
* **Icius notabilis**, Cl. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.
* **Callethera scenica**, Cl. — Non rara entro le case.
* **Hasarius jucundus**, Luc. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.

Phlegra (Attus) Bresnieri, Luc.—Rinvenuto in diversi luoghi (Cagliari, Oristano): luglio, settembre.

* **Eris albobimaculata**, Luc — Trovata nel Campidano di Cagliari: luglio.

Licosidei

* **Ocyale mirabilis**, Cl. — Diffusa per tutta l'isola.
* **Lycosa radiata**, Latr. — Raccolta in diversi luoghi, soprattutto montuosi (Desulo, Fonni, Orani).
* — **cinerea**, Fab. — Trovasi non rara sulle sponde de' fiumi: osservata dall'aprile al settembre.
* **Pardosa proxima**, Cl.—Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Oxiopidei

* **Oxyopes lineatus**, Latr. — Diffuso per molte parti dell'isola.
* — **heterophthalmus**, Latr.—Diffuso presso a poco quanto il precedente.

Sparassidei

* **Olios spongitarsis**, Lin. — Raccolto presso Laconi e sulle montagne di Desulo.

Tomisidei

* **Xysticus Kochi**, Th. — Trovato nel Campidano di Cagliari, presso Meana ed altrove.
* — **lanio**, Cl. — Raccolto in diversi luoghi.
* **Synema globosa**, Fab. — Diffuso per tutta l'isola: dalla primavera all'autunno.
* **Thomisus onustus**, Walck. — Diffuso per tutta l'isola.
* **Runcinia lateralis**, Cl.— Raccolto nelle adiacenze di Cagliari: luglio.
* **Philodromus aureolus**, Cl. — Raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.
* **Thanatus vulgaris**, E. S. — Trovato frequente sulla spiaggia arenosa presso Porto Torres in maggio 1882. Se ne sta ordinariamente nascosto sotto le pietre.

Palpimanidei

* **Palpimanus gibbulus**, L. Duf. — Raccolto presso Muravera in aprile 1882.

Eresidei

* **Eresus ruficapillus** Kock.—Ne abbiamo rinvenuto un giovane individuo sulla vetta del Gennargento sotto grosso macigno: luglio.
— **quatuorguttatus**, Ross.—Raccolto sulla vetta del Gennargento in settembre 1881.

Epeiridei

* **Argiope lobata**, Pall.—Trovata in diversi luoghi.
* **Cyrtophora opuntiae**, L. Duf. — Numerosi e grossi individui ne abbiamo trovati in ampie tele affidate alle foglie di Agavi nell'Orto Botanico di Cagliari in luglio. Trovata ancora presso Oristano ed altrove.
* **Cyclosa conica**, Pall.—Rinvenuta nelle adiacenze di Oristano.
* — **insulana**, O. Cost. (*trituberculata*, Luc.). Raccolta tra piante palustri presso lo Stagno di Sassu in quel di Oristano e gli stagnoni vicino Portoscuso: agosto e settembre: non molto abbondante.
* **Epeira dromedaria**, Walck. — Raccolta in diversi luoghi.
* — **diademata**, Cl.— È una delle specie più abbondanti, nella primavera e nella state.
* — **cucurbitina**, Cl. — Raccolta in diversi luoghi: Laconi, Desulo, Orani, Tempio.
* — **cornuta**, Cl. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari: settembre.
* — **adianta**, Walck.— Diffusa per tutta l'isola: primavera ed estate.
* **Singa rufula**, E. Sim.—Raccolta soltanto presso lo Stagno di Sorso: agosto.
* **Meta merianae**, Scop. — Raccolta presso lo Stagno di Sorso.
* — **segmentata**, Cl. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Tetragnatha extensa, Lin. — Diffusa per tutta l'isola.

Uloboridei

* **Uloborus Walcknerianus**, Latr. — Trovato abbondante nelle adiacenze di Tempio: giugno 1882.

Teridionidei

* **Formicina Eleonorae**, A. Cost. — Ne abbiamo il solo individuo trovato presso Osilo nel 1882.

* **Episinus truncatus**, Latr. — Trovato in diversi luoghi, Laconi, Meana Oristano: non abbondante.

* **Theridion lineatum**, Cl. (*redimitum*, Latr). Specie poco diffusa: raccolta nelle adiacenze di Meana.

— **sisyphium**, Cl.—Raccolto nelle adiacenze di Aritzo.

Lithyphantes corollatus, Lin. — Ne abbiamo rinvenuti due indiviui sotto grosso macigno nelle massime alture del Gennargento: luglio.

Latrodectus tredecimguttatus, Ross.—Raccolto presso lo stagno di Sorso: agosto.

— var. *lugubris*. L. — Sembra più frequente del tipo: trovato sotto i sassi presso Muravera (aprile) Tempio (giugno).

Phrurolitus hamatus, Koch.— Raccolto nelle vicinanze di Tempio in giugno 1882.

Linyphia pratensis, Wid. — Raccolta nelle adiacenze di Porto Torres.

— **pusilla**, Sund. — Diffusa per varie parti dell'isola.

Agelenidei

Agelena labyrinthica, Cl. — Trovata molto abbondante presso Laconi in tele affidate a felci.

Drassidei

Micaria smaragdula, Sim. — Trovata soltanto nelle vicinanze di Sassari: agosto.

Aphantaulax seminiger, E. Sim. — Raccolto presso Pula, Sassari e sulle montagne di Desulo, della Limbara, ec.

Drassus lapidosus, Walck. — Trovato sulle montagne di Desulo, presso Oschiri, ecc.

— **troglodytes**, C. K. — Raccolto sulle massime alture del Gennargento.

Clubiona phragmitis, Cl. — Raccolta nelle vicinanze di Oschiri in giugno 1882.

Anyphaena accentuata, Walck.— Trovata nelle adiacenze di Meana.

Zoropsis ocreata, Cl. — Raccolta nelle vicinanze di Laconi.

Segestria florentina, Ross. — Trovata sulle montagne di Desulo, della Limbara, presso Sassari.

Tegenaria domestica, Cl.— Raccolta presso Sassari.

Migalidei

Mygale fodiens, Walck. — Trovasi in molte parti dell'isola.

Miriapodi

La ricerca de' Miriapodi ha dato risultamenti assai scarsi. La stagione estiva è poco favorevole per la caccia di siffatti Artropodi. Forse tra i *Cryptops* raccolti vi sarà qualche specie non trovata precedentemente, ma essi non sono stati studiati, e però nulla possiamo dire. Noteremo soltanto di aver trovato a Desulo, tra macerie nel paese stesso, il *Plutonium Zwierleini*.

Crostacei

A quanto già possedevamo di questa classe una sola specie abbiamo aggiunta con le esplorazioni dello scorso anno. Essa è una seconda specie del genere *Cypris*, diversa certamente da quella trovata nel 1882 e descritta nel nome di *sardoa*, ma che non abbiamo ancor determinata.

PARTE TERZA

Note illustrative

Coleotteri

Berosus affinis, Brull. var. *lineicollis.*

Pronoto linea media longitudinali subelevata impunctata flava.

Nel tipo il dorso del protorace è tutto uniformemente coperto di punti impressi. Negl'individui di questa varietà sul mezzo del protorace vi ha una linea un poco elevata, liscia, di color giallo, che divide in due la macchia discoidale.

Cryptocephalus alnicola, nob.

C. subcylindricus, pronoto valde convexo, levi, elytris regulariter punctato-striatis; niger, nitidissimus, capite, pronoto, antennarum basi pedibusque fulvo-rufescentibus; elytris vitta marginali externa ad tertium anticum in discum plus minusve in dorsum producta flavo-rufescente; abdomine segmento ultimo dorsali et ventrali postice flavo marginato. — Long. mill. 2,4-2,7.

La fronte nella parte superiore à una fossetta ovoidale; nella inferiore è un po'incavata con qualche punto impresso. Le elitre hanno il callo omerale elevato, e circoscritto nettamente nel lato interno da corrispondente fossetta. Il petto è punteggiato più fortemente del ventre.

Il colore indicato per le diverse parti del corpo è costante in tutti gl'individui che possediamo, ad eccezione dell'elitre. In quelli che sembrano tipici, perchè i più numerosi, la fascia giallo-rossiccia del margine è abbastanza ampia, si estende dall'angolo omerale fino alla sutura, e nel terzo anteriore della lunghezza si dilata prolungandosi a guisa di fascia fino alla metà del dorso. In taluni in cui domina il melanismo la fascia marginale è assai angusta lungo il margine esterno, rimanendo ampia nella parte posteriore, e la dilatazione è meno estesa e di color fulvo oscuro, in guisa da esser meno distinta.

Questo piccolo Criptocefalo appartiene evidentemente al gruppo ventitreesimo della monografia del De Marseul, e pare che le specie più affini siano il *gracilis,* Fab. l'*Hubneri,* Fab. etc.

Chrysomela viridana, var. *cupreo-purpurea.*

Typo duplo major, colore cupreo-purpurascente.

A guardar superficialmente questa Crisomela si direbbe una specie eminentemente distinta: pure nel fondo presenta tutta la struttura della *viridana,* se si eccettua qualche differenza nella scoltura della fronte. Di questa intanto ha grandezza pressochè doppia ed è uniformemente di color rameo tendente al porporino. — Lunghezza millim. 10, ampiezza mass. 6. — Non avendone che un solo individuo, non può giudicarsi della costanza di tali caratteri.

Ortotteri

Aphlebia trivittata, Ser.

L'individuo che il Genè comunicò al Serville, e sul quale questi ne fece la descrizione, dovette essere o non ben maturo, ovvero scolorito per l'azione del tempo e della luce. Egli ha potuto perciò dire che le tre strisce che percorrono tutto il corpo sono brune, colore che il Brunner traduce prima in *fuscis* (Blattaires, p. 73) e più tardi in *castaneis* (Europ. Orthop. p. 42). Negli individui freschi e ben maturi le dette tre strisce sono di un bel nero intenso, che nel torace e nell'elitre risalta sopra un fondo bianco ialino, che tende un poco al fulvo nel disco del primo.

Sphingonotus coerulans, Lin. var. *candidus*.

Le varietà che questa specie presenta nel colorito sono ordinariamente in rapporto con la natura de' luoghi che abita. Gl'individui che trovansi nelle estese plaghe di terreni sabbiosi, di sabbia fina e bianchissima da simigliare a quella del deserto di Egitto, sono talmente dominati dal bianco, da assumere un aspetto tutto particolare. Il capo ed il torace sono quasi lattei con pochissime macchioline o punti cenerini o bruni: le elitre cenerine con piccole macchie brune disuguali e sparse, non costituenti fasce. I piedi sono bianco-cenerini con le macchie normali fosche assai sbiadite: i femori posteriori nella faccia interna hanno una macchia bruna limitata al terzo basilare.

Rhacocleis parvula, nob.

♂ *R. rufo-testacea, vitta utrinque nigra, lobis inflexis totis albido marginatis; pedibus fusco nigroque variegatis: elytris parvis, pronoti marginem posticum haud superantibus: abdominis segmento ultimo dorsali subtiliter canaliculato, postice late et parum profunde triangulariter exciso, cercis validis conicis apice acuminatis, summa basi introrsum dilatato-dentatis; lamina subgenitali angusta.* — Long. corp. (exicc.) mill. 10, pron. 4; femor. postic. 12.

A guardare ad occhio nudo questa piccola Locusta si prenderebbe facilmente per l'*Anterastes Raymondi*, ovvero per lo *Ctenodecticus costulatus*, tanta è la simiglianza per la grandezza e sistema di colorazione. Però il prosterno brevemente bispinoso, le plantule lunghe soltanto quanto il primo articolo del tarso, le tibie posteriori con due sole spine terminali, i femori posteriori forniti di alcune minute spine ed altri caratteri la fanno evidentemente appartenere al genere *Rhacocleis*. Tra le specie di questo rientra nel secondo gruppo, di quelle cioè in cui i lobi inflessi del pronoto sono orlati di bianco per tutta la lunghezza ed i cerci son conici, armati di dente alla base. Dalle due specie comprese in questo basterebbe la sola grandezza a farla riconoscere.

Ephippigera coronata, nob.

E. verticis fastigio prominente, sulcato; pronoti lobis deflexis acute insertis et profunde impressis, dorso sulcis duobus transversis profundis; lobo antico irregulariter plicato,

utrinque tuberculis duobus validis basi connatis: lobo medio oblique utrinque sulcato et cornubus duobus obtusis praedito: lobo postico elevato transverse rectangulo, grosse reticulato, medio carinato, margine postico calloso recto; elytris atris, margine postico flavicante: ♂ lamina anali dorsali rite triangulari, concava, cercis laminam non superantibus, validis, scabris, ad medium dente interno incurvo: lamina anali ventrali posterius vix arcuato-emarginata, stylis brevissimis: ♀ ovipositore pronoto sesqui longiore, parum incurvo.— Color in vivo olivaceus, pronoti tuberculis et carinis flavicantibus, abdomine macularum flavarum seriebus quatuor; vertice, antennis (art. 2 primis exceptis) pedibusque purpurascentibus; ventre flavo costis albis. — Long. corp. exiccati mill. ♂ 15, ♀ 17, pron. 8, femor. postic. 15.

Per la eleganza del colorito (nel vivo) e per la fattezza del protorace è una delle più singolari Efippigere di europa. Il protorace ha i lobi laterali formanti angolo retto col dorso e fortemente incavati in tutta la loro lunghezza: il dorso è diviso in tre lobi da due profondi solchi trasversali. Il lobo anteriore è irregolarmente rugoso; ha un rilievo trasversale nel mezzo, e nella parte posteriore ha per cadaun lato due grossi tubercoli diretti obliquamente in fuori ed in dietro congiunti alla base. Il lobo medio ha una impressione in forma di ampio V; l'aja triangolare abbracciata da essa presenta sul margine anteriore due corna (uno su ciascuno estremo) robuste, ottuse, dirette in dietro ed in alto: il contorno posteriore del lobo è costituito dalle continuazioni delle carene laterali posteriori, le quali si ripiegano in dentro ad angolo retto, senza però congiungersi, rimanendo dietro di esse il secondo solco. Il terzo lobo è trasversalmente rettangolare, ascendente in dietro, con rete a maglie disuguali costituita da linee elevate callose; elevato in carena nel mezzo: il contorno posteriore è diritto e calloso.

Nel vivo il dorso del protorace è di un verde oliva con tutte le parti più rilevate di color gialliccio. Il dorso dell' addome è olivastro con quattro serie longitudinali di macchie gialle. Il ventre è giallo-pallido con le callosità rilevate bianche. Il vertice e le antenne, ad eccezione de' due primi articoli, sono di color porporino pallido. I piedi sono dello stesso colore nel dorso, verdicci inferiormente. Tutto il protorace ha un lucido quasi fosse verniciato. Dopo la morte tutte le indicate tinte svaniscono ed il corpo si fa tutto bruno.

Nevrotteri

Sisyra iridipennis, A. Cost. (*Nota su' Nevrot. di Sard.* [1]).

S. fusca, antennis pedibusque pallidis, illis articulis duobus primis nigris; alis vitreis, iridescentibus, venis omnibus pallidis. — Long. corp. mill. 4; exp. alar. m. 12.

Molto distinta dalla *Sisyra fuscata* pel diverso colorito delle ali e per quello delle antenne, di cui i primi due articoli sono di un nero intenso splendente, i rimanenti pallidi.

In aprile 1882 trovammo un individuo solo di questa Sisira presso le sponde del Flumendosa vicino Muravera, e ci astenemmo dal descriverla per la incertezza sulla costanza dei caratteri. Nello scorso anno l' abbiamo rinvenuta abbondante presso Milis, e ci siamo per tal modo accertati della stabilità de' caratteri specifici.

[1]) *Rendiconto della R. Accad. di Sc. Fis. Mat.* Marzo 1884.

Chrysopa bifidilinea, nob. (*ypsilon*, A. Cost. *Nota su' Nevr. di Sard.*)

C. sordide lutea, dorso vitta utrinque ab occipite ad abdominis extremitatem ducta, lineaque frontali superius in duas occipitem attingentes divisa, fusco-nigris; alis hyalinis, venis longitudinalibus pallidis, transversis nigris. — Long. corp. mill. 5; exp. alar. m. 17.

Il marchio più caratteristico di questa specie sta nella colorazione del capo: il quale presenta una linea che parte dal mezzo della inserzione delle antenne, si prolunga in sopra, e sulla fronte si divide in due, dapprima divergenti e poi parallele, le quali prolungansi fino all' occipite: sul lato interno di cadaun occhio vi ha una striscia bruna che forma continuazione con quella che occupa i margini laterali del torace e si prolunga su' lati dell'addome.

Probabilmente questa specie è affine alla *Genei* Ramb. di Sardegna; ma la descrizione delle linee oscure del capo non corrisponde con quella della nostra.

Il nome di *ypsilon* da noi datole essendo stato già impiegato per una specie dell'America settentrionale, lo abbiamo sostituito da altro.

Sericostoma Mac Lachlanianum, A. Cost. (*Nota su' Nevr. Sard.*)

S. fuscum, antennis fulvescente-subannulatis, pilis verticis rufescentibus; alis pilis fulvescentibus nitidis parum condensatis vestitis: ♂ appendicibus lateralibus penis compressis, foliaceis, postice bilobis, lobo supero lato truncato-rotudato, infero parvo obtuso— Long. corp. mill. 7; exp. alar. m. 25.

Antenne di color fosco uniforme, rivestite di peluria di color fulvo, meno stivata alla estremità di ciascun articolo, lasciando meglio vedere il colore fondamentale, per modo che le antenne sembrano anellate. Corpo bruno nerastro. Peli del capo foschi ad eccezione di quelli del vertice, che sono di un giallo rossiccio, in taluni individui molto vivo. Ali fosche, ricoperte di peluria coricata di color tabacchino splendente. Piedi coi femori foschi: le tibie e i tarsi bruno-giallastri.

Il maschio ha le appendici del pene compresse, foliacee, posteriormente bilobe, col lobo superiore assai ampio troncato-ritondato, l' inferiore piccolo ottuso.

Specie molto affine al *S. clypeatum* di Corsica, come ha già rilevato il signor Mac Lachlan, del cui nome ci è piaciuto intitolare la specie. Ne differisce principalmente per la fattezza delle appendici laterali del pene del maschio, di cui il lobo superiore è assai più ampio e più troncato.

Thremma sardoum, A. Cost. (*Nota su' Nevr. Sard.*)

Il sig. Mac Lachlan, cui abbiamo comunicato questo Friganideo, mentre riconosceva essere specie diversa dalle due finora conosciute di tal genere (*T. anomalum* e *gallicum*), avvertiva giustamente non esser possibile descriverlo per lo stato poco soddisfacente dell'individuo. In fatti esso mi venne dal sig. Antonio Cabella che avealo raccolto senza alcun ordigno nelle vicinanze di Tempio. Aggiungasi essere una femmina. Ciò non ostante ne registriamo qui le poche note riconoscibili, augurandoci poterne in altro viaggio raccogliere individui migliori e di ambo i sessi.

Primo articolo delle antenne, il solo che esiste, un poco più lungo del capo, molto robusto. Corpo bruno. Capo rivestito di peli ruvidi nerastri mescolati ad altri di un bianco argentino, sopratutto nel mezzo della faccia e ne' lati del vertice. Piedi foschi con l' estremità de' femori bruno-gialliccia; le ànche e parte de' femori con peli bianchicci. Ali fosche: le anteriori con peli coricati poco stivati di color giallo-dorato: la frangia marginale di tutte quattro le ali nerastra.

Imenotteri

Bembex Geneana e melanostoma, A. Cost.

Nel Prospetto sistematico degl' Imenotteri Italiani descrivemmo e figurammo nell' annessa illustrazione queste due *Bembex*, ambedue sopra unico individuo esistente nella collezione d'insetti sardi comunicataci dal Museo di Torino. Nel settembre del 1881 reputammo grande ventura lo aver trovato su' monti adiacenti al Gennargento un individuo che conveniva esattamente con la *Geneana*. Nella primavera del 1882 non potettimo vedere alcuna, nè *Geneana*, nè *melanostoma*. Nell'ultimo viaggio esplorando il Monte Chiesa di Aritzo c'imbattemmo in un nido di *Bembex melanostoma*, che vedevamo per la prima volta vivente. La loro maniera di volare bassa e meno rapida delle specie congeneri ci permise farne in breve tempo buona raccolta. Però ci avvidimo che erano tutti maschi. Pertanto, tra i molti individui riconobbimo in uno la *B. Geneana*, ed era femmina. Questo fatto ci fece immantinenti nascere il sospetto che le due *Bembex* non fossero che i due sessi di una specie sola. Posteriormente in molti altri nidi ci siamo imbattuti, ed in tutti abbiamo trovato che i maschi rispondevano alla *melanostoma* e le femmine alla *Geneana*. Sicchè il dubbio si è per tal modo convertito in certezza. Ma un'altra osservazione è venuta in appoggio di tale conclusione. Tra i molti individui di *melanostōma*, ossia maschi, ne abbiam trovato qualcuno in cui il nero del labbro superiore è limitato soltanto alla base, siccome d'altro lato abbiamo una femmina nella quale il nero comincia parimenti ad accennarsi alla base.

Essendo pertanto i due nomi della medesima data, e dovendone uno solo conservare, diamo la preferenza a quello di *Geneana*, sia perchè c' interessa il nome di colui che in realtà fu il primo a rinvenir queste *Bembex*, sia perchè l'altro *melanostoma* mentre sta tanto bene applicato al maschio, mal si converrebbe alla femmina.

Harpactes leucurus, nob.

H. niger, abdominis segmentis primis tribus rufis immaculatis, quinto macula dorsali lactea; orbitis internis, clypei margine, pronoti linea postica, callis humeralibus et scutello albis. ♀. — Long. corp. mill. 7.

Antenne nere: il lato inferiore del primo articolo bianco. Capo nero; le orbite interne ed il contorno anteriore e laterale del clipeo giallo-pallidi. Labbro superiore e base delle mandibole fulvi. Torace nero; una linea sul margine posteriore del protorace, i calli omerali e lo scutello bianchi. Addome: primi tre anelli completamente rossi; gli altri tre neri con una macchia bianca sul dorso del quinto. Piedi nerastri: le tibie e i tarsi de' due anteriori tendenti al fulvo.

Per l'abito generale e per la scultura del torace si avvicina all' *Harp. elegans*.

Rhopalum gracile, Wesm. ♂.

♂ *R. nigrum nitidum, antennarum scapo, pedibus anterioribus ex parte posticorum trochanteribus et tibiarum basi albis: antennarum flagelli articulo primo parum, tertio magis extus dilatato-dentatis.* — Long. mill. 5,5.

Corpo interamente nero, splendente. Scapo delle antenne, piedi d'avanti ad eccezione del dorso de' femori, trocanteri e base delle tibie e degli articoli de' tarsi dei piedi medii, trocanteri e base delle tibie de' piedi posteriori, bianchi. Orbite interne e clipeo rivestiti di peluria a riflesso argentino. Antenne: primo articolo del flagello dilatato esternamente in piccolo dente ottuso, il terzo dilatato triangolarmente. Metà anteriore del primo anello addominale angusta, a lati paralleli, finamente marginati, a dorso piano, con delicate rughe ed una sottile linea mediana elevata. Dorso del mesotorace finissimamente puntinato: aja del metatorace convessa, liscia, profondamente scanalata nel mezzo. *Maschio.*

Osservazione. Wesmael descrisse questa specie sopra un individuo femina di Ginevra, e pare che dopo di lui non fosse stata trovata da altri. Quello che noi abbiamo di Sardegna ne differisce per una estensione un po' maggiore del bianco nelle antenne e ne' piedi: differenze che stimiamo dipendere dalla diversità del sesso.

Pertanto, essendo il maschio il più caratteristico, abbiam creduto opportuno darne più minuta descrizione.

Crossocerus bison, nob.

Cr. robustus, niger nitidus, tarsis piceo-testaceis; clypeo argenteo micante utrinque corniculato, mesopleuris muticis, metanoti area dorsali convexa, medio canaliculata, margine haud crenata; alis hyalinis, anticis in cellula radiali fumatis.—Long. corp. m. 7♂.

Maschio. Capo più ampio del torace, quasi cubico, occhi grossi, molto obliqui e perciò la fronte ristretta da sopra in basso, con delicato solco nel mezzo. Clipeo ricoperto di fina peluria coricata argentina: con un intacco su ciascun lato e con gli angoli anteriori elevati in cornetto conico ottuso assai distinto. Dorso del mesotorace finamente puntinato. Aja dorsale del metatorace convessa, liscia, scanalata nel mezzo, non circoscritta da crenatura; la parte posteriore con fossetta oblunga; i lati con qualche delicata ruga. Colore nero uniforme: solo i tarsi piceo-testacei, il primo articolo de' posteriori più pallido: speroni delle tibie bianchicci. Ali trasparenti con una striscia affumicata lungo la cellula radiale e sua appendice.

Mutilla hispanica, Sich. Rad., var. *melanolepis*, n.

Riferiamo alla *hispanica* una Mutilla non molto rara in Sardegna, la quale differisce dal tipo descritto da Sichel e Radoszovsky per le tegole alari nere (non rosse), rossicce soltanto nel contorno posteriore. In quanto alla grandezza di esse tegole non possono definirsi piccole, come le dicono i lodati autori; ma di ciò non può giudicarsi senza i confronti in natura. Intanto, essendo una specie che trovasi per la prima volta tra noi e che, come abbiam detto, si discosta un poco dal tipo, crediamo utile darne la descrizione completa.

♂ *M. nigra, parce argenteo pilosa et nigro villosa; thorace rufo-testaceo, pectore et pronoti truncatura antica nigris; abdominis nigro pilosi fascia angusta marginali in segmentis primo et secundo, ac segmentis tertio et quarto totis argenteo villosis; ano argenteo piloso; alis fumatis, cellulis cubitalibus tribus, tegulis nigris nitidissimis, limbo postico rufescente.* — Long. corp. mill. 9-10.

Variat *tibiis rufis apice nigris.*

Capo fortemente punteggiato, con linea impressa dall'ocello medio alla base del clipeo: nero, con peluria elevata argentina; fronte con peli simili ma coricati. Occhi fortemente smarginati. Antenne nere. Torace ovoidale, di color rosso-testaceo: solo il petto e la faccia anteriore verticale neri. Il contorno posteriore del protorace arcuato: mesotorace con due delicati solchi paralleli: metatorace a rughe reticolate. Addome nero. Il primo anello con peli elevati argentini misti a pochi neri e con frangia posteriore di cigli argentini: il secondo coperto di peli elevati neri e con la fascia marginale di peli argentini simile a quella dell'articolo precedente; il terzo ed il quarto coperti per intero di peli argentini coricati e stivati misti ad altri più lunghi elevati: i due seguenti con peli neri; l'ultimo con peli argentini. Gli anelli ventrali con frangia posteriore di peli argentini. Piedi con peli argentini: gli speroni delle tibie bianchi. La carena del primo anello ventrale è allungata, col margine inferiore leggermente concavo con l'angolo posteriore dentiforme. Ali affumicate: tegole di grandezza ordinaria, reniformi, nere splendenti col margine posteriore rossiccio.

In qualche individuo le tibie sono alla base più o meno estesamente rossicce.

Mutilla Agusii, nob. [1])

♂ *M. nigra, thorace rufo; hoc capiteque albo pilosis; pectore et macula utrinque mesonoti tegulae contigua nigris; abdomine nigro piloso, segmentis tribus primis fimbria marginali postica e ciliis stratis albis; alis fumato-hyalinis, tegulis nigris.* — Long. mill. 9.

Molto simile alla precedente, dalla quale distinguesi principalmente per la mancanza di fascia argentina sul terzo e quarto anello addominale, i quali invece sono ricoperti di vello e peli rilevati neri, il terzo soltanto avendo la frangia marginale. La carena del primo anello ventrale ha il margine inferiore diritto.

Col nome specifico abbiam voluto ricordare il Dott. Giov. Mura-Agus, senza la cui ospitalità, questa ed altre interessanti specie, che non rinvenimmo fuori che a Meana, ci sarebbero rimaste sconosciute.

Myrmosa ephippium, Jur.

Jurine ha data una figura molto esatta di questo Imenottero, nella tav. 9, fig. 14 della sua pregevole opera. Però di un gran numero di scrittori che abbiamo a nostra disposizione nessuno la riporta nè sotto questo, nè sotto altro nome. Noi lo possedevamo delle provincie napoletane e l'abbiamo rinvenuto in Sardegna. Esso per colori è simigliantissimo alla *Mutilla ephippium*, tanto che leggendo la descrizione di questa, potrebbe benissimo applicarsi anche a quello. Però a riconoscere la differenza organica, e quindi generica, basta guardare la forma del protorace, che nella prima è tutto di eguale am-

[1]) Nel catalogo che precede è impresso per errore *Acusii.*

piezza considerandolo per traverso e quindi quasi rettangolare come ne'maschi delle altre *Myrmosa*, mentre nell'altra è ristretto nel mezzo e quindi il margine posteriore è a curva fortemente rientrante. La specie quindi di Jurine deve essere richiamata in vita e lasciata nel genere *Myrmosa*, nel quale acconciamente l'autore la registrò.

Odynerus *(Lejonotus)* **Costae**, Andr. (ined.?)

O. minutus, crebre punctatus, metanoto postice infra utrinque valide spinoso, abdominis segmento primo posterius subcoarctato; niger, pronoti fasciola interrupta, tegulis alarum maxima parte, abdominis segmentorum primi et secundi (in margine postico crenulati) albidis; geniculis, tibiis tarsisque flavo-fulvis. — Long. mill. 6.

♂ *antennarum scapo antice albido, flagelli articulis ultimis recurvis fulvis; clypeo albo, punctato-ruguloso, inferius profunde emarginato angulis apiculatis.*

♀ *ant. scapo ant. rufo-ferrugineo; flagello toto nigro; clypeo vix emarginato, angulis apiculatis, grosse longitudinaliter plicato et sparse punctato, nigro macula basali fulva.*

Il Sig. Andrè, cui abbiamo comunicato questo Odinero che da varii anni possediamo, riconoscendovi una specie distinta, ha voluto dargli lui il nome specifico che noi adottiamo e col quale sarà pubblicato nella sua opera sugl'Imenotteri di Europa. Pertanto, sia a corredo del nostro lavoro, sia perchè il lodato Entomologo non potrà descrivere che il solo maschio, unico sesso che gli abbiamo comunicato, di femmine avendone una sola, abbiam creduto utile darne la frase diagnostica.

Camponotus marginatus, Latr. var. *hyalinipennis.*

Ali incolori, trasparenti, mentre nel tipo sono al dir di Andrè (*Hymen. d'Eur. Form.* p. 157 e 158) *assez enfoumèes de roussatre.* Le vene bruno-pallide; lo stigma nerastro. Avendone parecchi individui, consideriamo tale varietà come costante.

Evania splendidula, nob.

E. nigra, nitidula, capite thoraceque fere glabris crebre punctatis, abdominis petiolo subtilissime punctulato; antennarum articulo tertio vix capitis longitudine; tibiis tarsisque anterioribus fulvis: alarum venis validis nigris, tantum cellulae cubitalis infera et externa pellucidis. — Long. m. 5.

Specie molto distinta dalle comuni perchè sia necessario notare i caratteri differenziali.

Campoplex Kriechbaumeri, nob.

C. niger, subopacus, palpis albidis, abdominis segmentis tertio et quarto postice et lateribus fusco-rufis; femoribus omnibus rufis, tibiis anticis rufis, mediis dimidio basali albido annulo fusco, posticis summa basi alba; alis hyalinis venis nigris, radice et squamula albidis; metanoto rugoso, in medio profunde canaliculato. — Long. mill. 6.

Corpo molto snello. Capo assai compresso d'avanti in dietro, sensibilmente ristretto dietro gli occhi. Il dorso del metatorace è irregolarmente rugoso con alcune rughe più regolari, con profondo solco mediano, il cui fondo è anche trasversalmente rugoso. Il

primo anello dell'addome o picciuolo è nel dorso spianato con la porzione posteriore dilatata assai corta. Il secondo anello è quasi eguale al primo in lunghezza.

L'individuo che abbiamo è maschio ed ha i due stiletti copulatori rossi.

Sebbene assai difficil cosa sia il pronunziarsi sulle specie del genere *Campoplex*, pure avendo accuratamente riscontrata la monografia di tal genere del Förster[1]), non ci era riuscito determinarla. Avendola comunicata al sig. Kriechbaumer, questi ha confermato che non possa riferirsi ad alcuna delle specie descritte in quella monografia.

Chelonus minutus, nob.

Ch. niger opacus, punctato-rugosus, clypeo nitidulo punctulato, abdomine basim versus longitudinaliter plicato-subreticulato, metathorace breviter bidentato, mandibulis rufo-ferrugineis; tibiis tarsisque anticis, tibiarum et tarsorum posticorum basi albidis.—Long. mill. 3.

♀ *abdomine prope apicem rima transversa notato.*

Affine al *lugubris*, Wesm. Diverso pel metatorace appena bidentato e pel colorito de' piedi. Il maschio ha l'addome posteriormente un po' rigonfiato, ampio, intero.

Leucospis sardoa, nob.

♀ *Nigra, maculis duabus frontalibus, pronoti marginibus postico et lateralibus fasciaque pone marginem anticum, mesonoti macula minuta discoidali et vitta utrinque, scutelli fascia lunulata, metapleurarum vitta verticali, abdominis fasciis quatuor, antica multo latiore, macula in coxarum posticarum margini, superi basi, femoribus posticis extus (macula infera ingra), femoribus ceteris apice, tibiis tarsisque flavis; terebra scutellum attingente.* — Long. mill. 9.

Per la lunghezza della trivella si avvicina alla *intermedia* ed alla *aculeata*, e pel protorace circondato d'ogni lato di giallo anche più alla prima, sebbene la fascia anteriore non occupa il margine, ma rimane dietro di esso. Da quella pertanto differisce per le strisce laterali dal mesotorace: per le ànche posteriori che han gialla la porzione anteriore del margine superiore (non l'estremità), ecc. Le antenne hanno una macchia gialla alla estremità della faccia inferiore dello scapo. Il margine superiore delle ànche posteriori terminasi in punta. I femori posteriori hanno i primi quattro denti lunghi e quasi eguali, gli ultimi tre piccoli e decrescenti. — Long. mill. 7.

Varietas *minor*.

Differisce dal tipo per la maggior estensione che prende il nero: sicchè le macchie frontali si riducono a due punti, la fascia anteriore del protorace si accorcia a' due estremi e rimane isolata; ne' femori posteriori neri sulla faccia esterna rimane una macchia apicale ed altra quasi triangolare presso la base, che tocca per uno de' lati il margine inferiore.

Leucospis Siscelis, Westw., var.

Differisce dal tipo unicamente per la mancanza delle due linee gialle del mesotorace, una per lato, presso la inserzione delle ali.

[1]) Monographie der gattung *Campoplex*.

Sparasion pallidinerve, nob.

S. capite thoraceque cum scutello confertim punctato-areolatis, fronte mutica, facie canaliculo medio laevi notata: antennarum flagello fusco-fulvescente, articulo tertio caeteris singulis majore: pedibus fulvis; alis hyalinis, venis stigmateque incoloribus. — Long. mill. 5.

Differisce dal *frontale* per la testa inerme a fronte ritondata; dal *tibiale* per il terzo articolo del flagello delle antenne evidentemente più grande e soprattutto più largo degli articoli attigui. In quanto a colori, differisce da ambedue pe' piedi interamente fulvi e per i nervi e stigma delle ali assolutamente incolori.

Emitteri

Podops . . . ?

La *Podops* trovata in Sardegna, la sola che sinora conoscasi dell'isola, differisce evidentemente da tutte le tre che si hanno in Italia, due delle quali descritte da noi medesimi. Essa pare piuttosto la *dilatata* Put. della Spagna. Il dente latero-anteriore del protorace è corto e quasi troncato, di eguale ampiezza, con la base anteriormente formando quasi continuità col margine anteriore del protorace. Avendone un individuo solo non possiamo dare un giudizio definitivo. Fuori della *dilatata* non troverebbe affinità con alcuna delle altre specie di *Podops* comprese nella monografia recentissima pubblicata da Horvath [1]).

Nezara viridula, Lin., var. *aurantiaca*, n.

Corpo interamente di color giallo-aranciato, più carico nella faccia dorsale, più pallido nella ventrale: rimangono neri gli occhi e i punti caratteristici del capo e dell'addome. Antenne con la porzione apicale del terzo articolo e i due ultimi articoli quasi per intero rossicci. Piedi giallo-aranciati.

Neottiglossa bifida, A. Cost. var.

Diversa dal tipo per la mancanza dell'orlo nero all'esterno de' cordoni laterali biancastri del protorace.

Peribalus vernalis, var.

Quarto articolo delle antenne interamente rosso: piedi sparsamente punteggiati di nero. Questa varietà stabilisce un passaggio al *P. distinctus*, cui i due cennati caratteri appartengono. Però le condizioni dello scutello e l'abito generale la fanno riconoscere per il *vernalis*.

[1]) Wien. Entom. Zeit. 11, 1883.

Metopoplax ditomoides, A. Cost., var. *decipiens.*

Il protorace ha il lobo posteriore nettamente di color gialliccio pallido, che passa un po' al ferruginoso ne' lati. Anche il margine anteriore dello stesso è un po' ferruginoso.

Brachyplax palliata, A. Cost., var. *rufipes.*

Piedi interamente rosso-fulvi. Antenne in gran parte bruno-ferruginose.

Arocatus Roeselii, Schml., var.

Il Puton descrive la variazione che presentano i piedi per colorito in un individuo di Corsica. In quello che abbiamo di Sardegna il rosso prende anche maggiore estensione: i femori e le tibie sono interamente rossi: soltanto i primi sono un poco più oscuri nel mezzo.

Myrmecomimus paederoides, nob.

M. capite, pronoto, scutello pedibusque rufis, abdomine nigro: elytris valde abbreviatis, abdominis segmentum primum non excedentibus, ciliatis, fuscis margine baseos postico, que lacteis; antennis pallidis, articulo secundo, clava apicali tertii et quarto ex parte nigris.—Long. mill. 4.

Antenne lunghe quasi quanto i tre quarti del corpo, filiformi; il primo articolo non superante l'estremità del capo; il secondo più lungo degli altri tre presi insieme, con la terza parte apicale ingrossata: il terzo ed il quarto eguali. Capo triangolare, posteriormente compresi gli occhi più ampio del torace, quasi piano, col margine posteriore occipitale un poco ispessito. Protorace un poco più lungo che largo, dilatato-ritondato nel terzo anteriore, molto convesso, finissimamente punteggiato-rugoso. Scutello proporzionalmente grande, triangolare, acuto. Elitre lunghe il doppio che larghe, non eccedenti il primo anello addominale, prive interamente di membrana, guernite di ispidi cigli elevati, col contorno posteriore fortemente ritondato. Addome ampio, a margini taglienti riflessi. Il capo, il protorace, lo scutello e gran parte de'piedi sono rosso-ferruginosi: l'addome nero: l'elitre di un nero vellutato, col margine basilare ed il posteriore di un bianco latteo. Antenne bruno-ferruginose: la base e la parte ingrossata del secondo articolo nere.

Osservazione. — Sebbene ne avessimo rinvenuto un individuo solo in Sardegna, pure ne possediamo due altri delle provincie napoletane, i quali ci dimostrano la costanza de'caratteri.

Kelisia Putoni, nob.

K. albida, capitis facie, genis et carinis verticis in dimidio antico; thoracis dorsi lateribus abdominisque dorso nigris; elytris subyalinis, lineola abbreviata marginis inter-

ni, vittaque in tertio postico posterius triramosa fuscis: ♂ segmento anali fusco-nigricante. — Long. mill. 4.

Capo bianchiccio; la metà anteriore delle carene del vertice, la faccia per intero e le gote di color bruno nerastro. Antenne pallide. Torace nel dorso nerastro con ampia striscia a lati paralleli bianchiccia. Addome nel dorso bruno-nerastro; il ventre pallido, quasi interamente nella femmina, col segmento anale e le incisure de' diversi anelli neri nel maschio. Elitre incolori: un breve tratto nero lungo il mezzo del margine interno; dal terzo posteriore e dal mezzo dell'ampiezza parte una striscia bruna che si dirige in dietro verso il margine interno dividendosi in tre rami corrispondenti a' tre nervi interni-posteriori: il nervo del contorno è anche bruno. Le ali inferiori trasparenti co' nervi bruni. Piedi bianchicci con la estrema punta de' tarsi nera.

Livia limbata, Wag., var. *Crefeldensis*, Mink.

La Livia descritta da Mink col nome di *crefeldensis* ed illustrata più tardi da Flor, sebbene essenzialmente non differisca dalla *limbata* di Waga, nondimeno è indubitato che in essa manca la fascia marginale nera della parte posteriore dell'elitre caratteristica della *limbata*. Per la qual cosa se non ha il valore di specie, certo l'è una varietà costante. Tra i numerosissimi individui trovati nella Sardegna, del pari che nel Napoletano, non ne abbiamo mai trovato uno solo che avesse la fascia marginale nera nell'elitre. Così trovansi anche in Francia, come rileviamo da un individuo comunicatoci dal Dott. Puton. Di modo che a noi sembra che la *crefeldensis* rappresenti la forma tipica più diffusa, e la *limbata* una varietà circoscritta nella sua ubicazione.

Lepidotteri

Crambus vallicolellus, nob.

Capo rivestito di squame argentine. Palpi cenerino-giallicci con ciuffo dorsale basilare di squame argentine allungate. Le ali anteriori sono di color giallo dorato con una striscia longitudinale bianco-perlacea, la quale parte dall'angolo omerale e si arresta ai cinque sesti della lunghezza, verso la metà divisa in due da una fascia molto obliqua fosca, più larga ed inarcata nella parte interna anteriore (ali in riposo), assottigliata dall'estremo esterno posteriore. La metà posteriore di detta striscia perlacea nel margine interno è fiancheggiata da una serie di linee angolose legate l'una all'altra, le quali girando dietro l'estremità della fascia raggiungono il margine esterno dell'ala. Queste linee fosche sono esternamente fiancheggiate da altre simili bianche. Il margine posteriore è diritto (non smarginato); nella metà superiore ha due punti di color nero intenso, nella inferiore è bruno: la frangia è argentina, traversata da una linea cenerina. Ali posteriori di un bianco sporco, che tende un poco al cenerino verso il margine.—Lung. con le ali mill. 11.

Se è difficile la estesa descrizione di questi microlepidotteri, molto più difficile è il formolare le frasi diagnostiche, le quali assai spesso riescono insufficienti a far riconoscere con certezza la specie. Per siffatta ragione non abbiam premessa la consueta frase latina.

Ditteri

Nemotelus leucorhynchus, nob.

N. capite horizontali anterius longe acute producto, nigro-virescente, albido piloso ac squamoso, rostro ab antennarum basi ad apicem albido: abdomine pedibusque roseis, illo segmentis 1-5 in medio nigris postice albido marginatis; alis vitreis, venis exalbidis ♂ — Long. mill. 5.

Capo prolungato orizzontalmente, terminando in punta acuta: la porzione dall'estremità degli occhi alla punta eguaglia l'altra dallo stesso punto all'occipite. Faccia e fronte stivatamente punteggiate, nero-verdastre, vestite di peli squamiformi coricati bianchicci: il rostro liscio, di color bianco-gialliccio. La faccia dietro la base delle antenne ha un piccolo rilievo solcato nel mezzo. Antenne testacee, più oscure nel dorso ed alla estremità. Torace simile per colorito e peluria al capo. Addome roseo: la parte mediana dorsale de' primi cinque anelli nera col margine posteriore di ciascuno bianco d'avorio, angoloso sul mezzo. Piedi rosei ad eccezione delle anche, che sono del colore del torace; i tarsi posteriori più pallidi. Le ali sono completamente trasparenti con le vene incolori.

Anthrax stenogastra, nob.

A. abdomine conico-cylindraceo: fusco-nigra, capite aureo tomentoso, thorace abdomineque dorso pilis brevibus adpressis deciduis flavidis, lateribus subtusque albo villosis: pedibus fulvescentibus, tarsis nigris; alis per duo trientes longitudinis a costa ad medium fusco-flavescentibus. — Long. mill. 9.

La forma di quest' *Anthrax* è diversissima da quella delle ordinarie specie, tanto da potersene costituire una speciale sezione. Lungi dall'essere il corpo ampio e depresso, è angusto e l'addome è sfilato e conico-cilindraceo quasi come ne' *Geron*. Il capo è di color bruno, che nell'epistoma passa al gialliccio pallido: tutto poi è rivestito di un tomento a splendore dorato pallido. Il torace e l'addome sono nerastri, nel dorso con peli coricati scarsi e facilmente caduchi fulvi: i lati del torace ed il petto con morbidi peli bianchi: il primo anello addominale con folto ciuffo di simili peli da cadaun lato: ventre con peluria bianca. Femori e tibie di color fulviccio pallido, rivestiti di squamette argentine caduche. Tarsi nerastri. Ali ne' due terzi basilari di color bruno gialliccio, che dalla costa sfumandosi si arresta verso la metà dell'ampiezza o poco oltre.

Dioctria Bigoti, nob.

D. elongata, gracilis, abdominis segmentis 2-5 latitudine duplo longioribus, subnodulosis; nigra nitida, facie mystaceque argenteis, abdominis segmentis 3-7 rufo-testaceis fascia lata nigra; pedibus rufis, posticis tibiis tarsisque nigris, illis apice subclavato, his articulo primo valde incrassato; alis fusco-hyalinis: ♂ *abdominis articulo octavo brevissimo ac appendicibus genitalibus rufis.* ♂ ♀. — Long. mill. 10.

Corpo assai delicato, soprattutto con l'addome proporzionalmente assai allungato ed angusto; di color nero splendente. Faccia nuda con splendore argentino: barba a cigli poco stivati ancora argentini. Vertice fortemente incavato tra gli occhi, con eleva-

tezza nel mezzo, sulla quale stanno impiantati gli ocelli. Fianchi del torace con qualche aja a splendore argentino. Addome lungo poco meno che il doppio del capo e torace presi insieme, assai delicato. Gli anelli secondo, terzo, quarto e quinto lunghi quasi due volte e mezzo la propria larghezza; il secondo ristretto verso il mezzo e più convesso nel resto, in guisa da formare due nodi; i tre seguenti sono un poco ristretti alla base: per tal modo l'addome nello insieme sembra quasi nodoso: gli anelli terzo, quarto e quinto hanno una fascia alla base ed un'altra posteriore rosso-testacee, gli altri hanno appena un delicato orlo posteriore gialliccio. I quattro piedi d'avanti sono interamente rosso-testacei, con i quattro ultimi articoli de' tarsi più oscuri. I due piedi posteriori sono pur rosso-testacei, ma con le tibie (meno la base e l'estremità) ed i tarsi neri. Le tibie posteriori hanno l'estremità rigonfiata a mo' di piccola clava; il primo articolo de' loro tarsi è fortemente ingrossato. Ali fosche.

I maschi hanno l'ottavo anello addominale (brevissimo) e tutte le parti genitali rosso-testacei. Fuori siffatte parti, i due sessi simigliano completamente.

Saropogon perlatus, nob.

S. niger, facie (praeter mystacem) omnino nuda mystaceque argenteis; occipite mentoque niveo pilosis; thoracis dorsi lateribus, pleuris ex parte, abdominisque segm. 1-5 fascia marginali late interrupta argenteis; pedibus rufo-testaceis, femorum dorso nigro; alis subhyalinis. ♂ ♀ — Long. mill. 10 ♂ : 12 ♀.

Variat *pedum posticorum femoribus tibiisque fere omnino nigris.*

Faccia completamente nuda, a splendore argentino. Barba *(mystax)* argentina a peli posti tutti in uno stesso piano: fronte con peli neri misti a pochi bianchi: occipite e mento con folta peluria di un bianco di neve. Antenne nerastre. Torace con tre linee longitudinali nel mezzo del dorso, parallele, di un bianco cenerino e i lati argentini; il resto della superficie con piccoli cigli coricati sparsi cenerini; ne' lati e nel dorso della metà posteriore ha lunghe setole nere. Scutello e pleure argentine; il primo con quattro setole impiantate sul contorno posteriore, le due medie incrociantisi. I primi cinque anelli addominali hanno nel margine posteriore due macchie argentine (una per lato) quasi triangolari, prolungate più o meno sullo stesso margine in guisa da formare quasi una fascia ristretta e largamente interrotta nel mezzo. I piedi sono di color rosso-mattone col dorso de' femori nero: in un maschio i femori e le tibie de'due piedi posteriori sono quasi interamente nerastri. Ali incolori, appena ombrate.

Stilopogon aequecinctus, nob.

St. nigro-cinerascens, facie mystaceque candidissimis, occipite genisque albo villosis, abdomine atro, marginibus lateralibus et fasciola basali angustissima in medio subinterrupta in segmentis 2-5 cinereo puberulis, segmentis primo ultimoque cinereo pubescentibus; tibiis tarsorumque articulis primis quatuor fulvis; alis hyalinis. — Long. mill. 6.

Simiglia molto per l'abito generale allo *St. inaequalis;* ne differisce principalmente per le fasce cenerine che nel nostro sono anguste e simili in tutti quattro gli anelli dal secondo al quinto.

Midas sardous, nob.

M. niger, capite albo villoso, thorace vittis quinque dorsalibus e pube adpressa albo-cinerascentibus; abdominis disco dorsali rufo-ferrugineo, segmentis omnibus postice flavido cingulatis; tuberculis humeralibus, pleuris scutelloque rufo-piceis, pedibus rufo-ferrugineis, tarsis vel et femoribus nigricantibus; alis hyalinis, cinerascentibus ♂. — Long. mill. 16.

Antenne appena più lunghe dell'ampiezza del capo, col terzo articolo o clava compressa, veduta di lato ristretta quasi bruscamente all'estremità: nere. Capo nero con peluria morbida bianca. Torace nero co' tubercoli omerali, gli angoli posteriori o opposti, i fianchi e lo scutello più o meno rosso-picei: nel dorso vi ha cinque strisce longitudinali costituite da pubescenza coricata bianco-cenerina; le due laterali o esterne più ampie eguali e diritte cominciano dietro i tubercoli omerali e si terminano innanzi gli angoli callosi posteriori: le interne più lunghe, anteriormente si dilatano dal lato esterno e posteriormente si riuniscono insieme e con la mediana, che è assai delicata. L'addome è nudo, splendente, il mezzo del dorso, dal terzo al sesto anello, è rosso-ferruginoso; tutti gli anelli hanno sul margine posteriore un cingolo bianco-gialliccio esteso anche sotto il ventre. Segmento anale con una corona di spine delicate filiformi eguali. Piedi rosso-ferruginosi con i tarsi, e talvolta anche i femori, nerastri. Ali trasparenti, tinte leggermente in cenerino.

Affine al *M. rufipes*, Westw. (Arc. Entom. I, p. 54).

Chaetostoma princeps [1]), nob.

Ch. fulvo-testacea, setis nigris, metathorace vitta postica nigra; femoribus anticis setis longe pectinatis; alis hyalinis, basi macula extensa irregulari fenestrata flavida, ad medium fascia integra a costa ad marginem posticum ducta, ultra eam fascia altera etiam integra illi subparallela et antice per costam ad apicem ducta ibique dilatata ac venae quintae longitudinalis extremitatem attingente, fuscis, flavescenti variegatis. — Long. mill. 7.

♀ *ovipositore brevi, lato posterius truncato-rotundato.*

Femina. Corpo, compresi antenne e piedi, di color fulvo-testaceo uniforme: solo nel mezzo della parte posteriore del metatorace vi ha una striscia nera. Le setole delle guance (sei per cadauna), quelle lunghe del capo, del torace e dello scutello, quelle corte del dorso dell'addome e le altre lunghe che formano il pettine nel margine anteriore de' femori di avanti nere; le ali nel fondo sono trasparenti. Nel quarto basilare tra la costa e la settima vena longitudinale vi ha una grande macchia irregolare e sfinestrata che potrebbe dirsi risultare da corte fasce che scorrono lungo i nervi congiunte tra loro: uno de' rami si congiunge presso la costa alla fascia che segue. Poco innanzi la metà della lunghezza dell'ala vi ha una fascia interna eguale, che dalla costa, e proprio dallo spazio compreso tra le estremità della prima e seconda vena longitudinale, si porta al margine posteriore, abbracciando nel suo cammino la seconda vena trasversale. Una seconda fascia trasversale intera parte dai due terzi del margine costale e raggiunge anche il margine posteriore, abbracciando nel suo cammino la terza vena trasversale: questa fascia anteriormente si prolunga lungo la costa fino all'estremità dell'ala, ove

[1]) Sebbene Rondani abbia scritto *Chetostoma*, abbiam creduto corrigerne la ortografia in *Chaetostoma*.

si dilata terminandosi sulla quinta vena longitudinale. Nello spazio sottocostale, tra la prima e seconda fascia, vi ha un trattolino trasversale appena pronunziato. La macchia basilare è gialliccia con qualche macchiolina fosca; la prima fascia è fosca con la parte anteriore gialliccia: la seconda fascia è interamente fosca.

Osservazione. Certamente questa specie deve avere molta affinità con la *C. curvinervis* che è servita di tipo al Rondani per la istallazione del genere [1]) ed unica finora conosciuta. Per quanto però ci fossimo studiati per riconoscere nella nostra la disposizione delle macchie e fasce delle ali, in parte la troviamo corrispondere, in parte no. C'impone poi l'altra circostanza de' *pedes brevissime nigro hirtuli:* senza fare alcun cenno del pettine di lunghe setole de' femori anteriori. Il confronto degli oggetti in natura potrà far riconoscere se tal differenza è reale, ovvero dipendente da omissione dell'autore.

N. B. — Talune specie le abbiamo indicate come nuove nel catalogo, ma non le descriviamo perchè non certi della costanza de' loro caratteri.

Finita di stampare il dì 4 luglio 1884.

[1]) Ortalidinae italicae. — Bullet. Soc. Entom. Ital. II, p. 26.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

MISCELLANEA ENTOMOLOGICA

MEMORIA PRIMA

del Socio Ordinario ACHILLE COSTA

(presentata nell'adunanza del dì 3 Dicembre 1887)

Col titolo di *Miscellanea Entomologica* ci proponiamo di andar pubblicando successivamente la illustrazione di specie d'insetti non conosciute esistenti nelle Collezioni del Museo Zoologico di questa Università. Le europee sono o prodotto delle stesse nostre ricerche, ovvero ricevute da persone da noi incaricate, in regioni diverse, di fare raccolte per conto del detto Museo. Le estraeuropee provengono da acquisti fatti principalmente a Parigi ed a Londra.

Le specie che illustriamo in questa prima memoria sono in gran parte frutto di recenti ricerche fatte nella Sicilia dalla metà di maggio a quella di giugno dello spirante anno. Avevamo già altre volte esplorata quell' isola: e la prima volta fu nel 1839, quando vi discoprimmo varie nuove specie di Emitteri Eterotteri [1]), di cui in allora principalmente ci occupavamo, le quali ci porsero argomento del secondo nostro lavoro entomologico. Ma dopo avere per anni sei consecutivi esplorata la Sardegna, concepimmo il pensiere di intraprendere anche in Sicilia un seguito di ricerche analoghe. Non perchè quest'isola fosse poco esplorata, come lo era stata la Sardegna. Chè anzi da pochi anni in qua vi ha grandissima attività per la illustrazione di quella Fauna: di che dà prova il giornale, *Il Naturalista Siciliano*, pubblicato dal Ragusa. Ma solo pel desiderio di stabilire da noi stessi confronti tra le Faune terrestri di queste due più grandi Isole d'Italia. E per siffatta ragione scegliemmo la stagione in cui avremmo trovato, come trovammo, la Tapsia Garganica in piena fioritura. E nel fatto poi, non ostante moltiplicati gli esploratori, non ci mancarono delle assai buone cose, soprattutto nell'ordine degli Imenotteri. Sono infatti ben interessanti l'*Euceribanchus* (n. gen.)

[1]) *Acanthothorax* (n. gen.) *siculus*, *Podops siculus*, *Ceraleptus squalidus*, *Pachymerus suberythropus*.

maculipennis e l'*Agathis imperialis*. Ancora fu interessante constatare trovarsi in Sicilia le due belle specie di *Cryptus* discoperte in Sardegna, il *carnifex* ed il *leucozonatus*.

Non vogliamo pertanto tacere che innanzi di deciderci alla pubblicazione di queste nuove specie, non abbiam mancato di corroborare il nostro parere con quello di distinti specialisti, come Kriechbaumer, Schmiedeknecht, Staudinger, Puton, Andrè.

Stizus villosus, n.

Tav. I, fig. 1.

♂. *Niger, cinereo villosus; antennarum scapo infra, orbitis anticis, clypeo, labro, mandibulis (apice excepto), pronoti margine postico, geniculis tibiis tarsisque, flavis; antennarum flagello infra pallide ferrugineo, articulis 7-11 planatis, pallidioribus; abdomine elevato-villoso, segmentis omnibus flavo fasciatis, fasciis 1-3 late interruptis, 4-5 in medio coarctatis, 6-7 integris aequalibus; alis flavescenti-hyalinis, venula transverso-cubitali secunda parum sinuosa.* — Long. mill. 15.

Capo e torace di color nerastro matto, stivatamente punteggiati, rivestiti di peluria cenerina folta ed elevata: nel primo vi ha le orbite anteriori, il clipeo, il labbro e le mandibole (meno l'estremità); nel secondo il margine posteriore del pronoto, di color giallo. L'addome è di color nero più intenso e splendente, tutto egualmente rivestito di peluria elevata simile a quella del torace, soltanto un poco più corta. Gli anelli addominali tutti con fascia gialla: le fasce de' tre primi anelli largamente interrotte e convertite ciascuna in due macchie trasversali ristrette da fuori in dentro; la quarta e la quinta ristrette ed appena interrotte nel mezzo; la sesta e la settima intere ed occupanti tutto il dorso de' rispettivi anelli. Le antenne hanno la faccia inferiore dello scapo di color giallo e quella del flagello ferruginosa, gli ultimi cinque articoli da sotto sono spianati, ma nè scavati, nè arcuati. Le ali sono tinte leggermente di giallo: la seconda venetta trasverso-cubitale è poco sinuosa. I piedi sono neri con i ginocchi, le tibie e i tarsi, gialli. Delle tre spine anali, le due laterali sono nere, la mediana gialla con la sola estremità nera.

Raccolto in Sicilia, nelle adiacenze di Acireale.

Osservazioni. Questo *Stizus* simiglia a primo aspetto allo *integer* ed al *ruficornis*. Differisce da entrambi per tre essenziali caratteri: 1° per le antenne nere, con solo la faccia inferiore dello scapo giallo, e quella del flagello ferruginosa; 2° per l'addome tutto egualmente rivestito di peluria folta ed elevata simile a quella del capo e torace, mentre nelle specie affini citate il solo primo anello ha peluria elevata; ne' rimanenti vi ha pubescenza corta e coricata; 3° per l'ultimo articolo delle antenne inferiormente spianato, non scavato.

Vogliamo a tal proposito notare che la distinzione fatta dal Dahlbom nelle tavole sinottiche, in specie con scutello giallo e specie con scutello nero, non regge. Dappoichè nello stesso *ruficornis*, di cui possediamo parecchi individui d'ambo i sessi, lo scutello è nero nei maschi, giallo nelle femmine.

Volendo intercalare questa specie con le altre italiane del genere *Stizus*, p. d. [1]), sinora conosciute della Fauna italiana, esse potrebbero andare così distribuite e distinte:

[1]) Noi persistiamo nella opinione che lo *St. tridens* ed altri affini debbano formare un gruppo generico a parte.

a. alae nigro-violaceae; abdomen fasciis duabus integris flavis. — *bifasciatus*

aa. alae flavescenti-hyalinae; abdomen fasciis flavis pluribus, plus minusve interruptis.

b. venula transverso-cubitalis secunda vix sinuosa.

c. antennae in utroque sexu fulvae (in ♂ articulo ultimo infra arcuato-excavato); abdomen, praeter basim, pube adpressa vestitum. — *ruficornis*

cc. antennae in mare (♀ ignota) dorso nigrae, articulo ultimo infra planato; abdomen totum elevato-villosum. — *villosus*

bb. venula transverso-cubitalis secunda valde arcuata: antennae fulvae, in ♂ dorso nigro variae, articulo ultimo infra arcuato-excavato. — *terminalis*

Harpactes transiens, n.

Tav. I, fig. 2.

Niger, nitidus, orbitis anticis, clypeo (in ♀ macula nigra basali notato), labro, antennarum scapo infra, pronoti margine postico interrupto, callis humeralibus maculaque scutelli, albidis; abdominis segmentis primis duobus rufis, ♀ immaculatis, ♂ secundo margine postico late interrupto albo; segmento tertio fascia postica marginali, quinto fascia basali (in ♀ in medio posterius quadrato-producta), albis; pedibus testaceo variis, femoribus anterioribus extus macula apicali oblonga eburnea notatis; alis hyalinis, cellula radiali parum fumata. — Long. mill. 7-8.

Maschio. Capo con due strisce orbitali, le quali cominciano dal basso in contatto del clipeo più ampie e si vanno restringendo in alto, terminandosi poco al di sopra della metà dell'orbita; ed una macchia triangolare al di sopra del clipeo, di color giallo. Clipeo leggermente sinuoso nel mezzo del margine inferiore, interamente giallo. Antenne crasse; gli articoli 3° a 10° poco più lunghi che larghi: lo scapo inferiormente giallo. Torace col margine posteriore del pronoto, interrotto nel mezzo, ed una macchia sullo scutello di color giallo di crema. Addome coi due primi anelli rossi, il secondo col margine posteriore, interrotto nel mezzo, bianco; il terzo anello con una fascia intera sul margine posteriore, il quinto con una fascia basilare accorciata a' due estremi, bianche. Il dorso degli anelli sesto e settimo è più stivatamente punteggiato che negli altri. Le ali sono trasparenti, vitree; la cellula radiale un poco ombrata. I quattro piedi d'avanti hanno la faccia anteriore delle tibie e della metà apicale de' femori ed i tarsi testacei; più, una macchia ovale d'un bianco d'avorio nella faccia esterna apicale dei femori. I due di dietro hanno soltanto la faccia anteriore delle tibie testacea.

Femmina. Antenne meno crasse ed un poco più lunghe. Il clipeo ha una macchia nera nel mezzo della base. Il secondo anello addominale manca del margine bianco. La fascia bianca del quinto anello nel mezzo si prolunga verso dietro. La valvola anale dorsale ha i margini elevati, la superficie coriacea sparsa di punti impressi.

Trovata in Sicilia ne' contorni del Lago di Lentini, ove non sembra raro. Ne abbiamo raccolti contemporaneamente il signor De Stefani e noi.

Osservazioni. È molto affine all'*Harp. elegans*, sopratutto per la macchia bianca d'avorio de' quattro femori anteriori. Ne differisce: 1° per la diversa posizione delle

fasce bianche addominali; 2° pel flagello delle antenne interamente nero; 3° per la diversa colorazione de' piedi. De' quali tre caratteri, il primo è quello che principalmente ci ha determinati a considerare questo *Harpactes* come specie distinta, e non varietà dell'*elegans*.

Le specie del g. *Harpactes* che ora possediamo d'Italia sono otto, e possono andare distinte nel modo seguente:

a. corpus varimode pictum.
b. abdomen, praeter picturam flavam, totum nigrum.
c. thorax rufo pictus.
d. abdominis segmentum primum albo bimaculatum, secundum et quintum albo fasciata. — *formosus*
dd. abdominis segmentum primum immaculatum, secundum et quintum albo fasciata. — *laevis*
cc. thorax niger; abdomen basi (segm. 1-2) rufum.
e. femora anteriora extus ante genu macula oblonga eburnea notata.
f. abdominis segmentorum 3-6 unum alterumve albo notata.
g. segm. secundum tertium et quartum albo fasciata. — *elegans*
gg. segm. (secund. ♂) tertium et quintum albo fasciata. — *transiens*
ff. segm. 3-6 immaculata; primum et secundum albo notata. — *4-signatus*
ee. femora anteriora macula eburnea nulla.
h. abdominis segm. 3, 4 et 5 (et 6 ♂) albo fasciata. — *affinis*
hh. abd. segm. 2 et 5 albo notata. — *tumidus*
bb. abdomen fere totum fulvo-castaneum, albido pictum. — *pulchellus*
aa. corpus totum nigrum. — *niger*

N. B. Kohl [1]) preferisce il nome *cruentatus*, Fab., al *laevis*, Latr. Però, come abbiamo notato nel Prospetto degl'Imenotteri Italiani, il nome di Latreille è del 1792, quello di Fabricio del 1798.

L'*Harpactes formosus*, Jur., potrebbe considerarsi come una varietà del *laevis*: però è una di quelle varietà costanti per le quali vi ha bisogno d'un nome. Per tal ragione le abbiam lasciato un posto nel quadro delle specie.

Mutilla bison, n.

Tav. I, fig. 3.

♀. *M. nigra, cinereo hirta, capitis disco amplo thoraceque rufis; abdominis fasciis tribus argenteo pilosis, prima angusta aequali in segmenti primi margine postico, secunda in medio angulato-aucta in margine postico segmenti secundi, tertia latiore segmenti tertii dorsum totum occupante; capite super antennas bicorne; abdominis segmento primo basi utrinque plerigio parvo externe truncato-emarginato, praedito, infra carinato, carina humili aequali.* — Long. mill. 8.

[1]) Die typen zu Jurine's werk, ecc.

Capo più ampio del torace, quadrato, stivatamente punteggiato, nero con ampio disco fronto-facciale rosso-ferruginoso. Superiormente alla inserzione delle antenne si elevano due cornetti quasi conici, ottusi all'estremità, che incurva leggermente in fuori. Mandibole robuste, fortemente dilatate all'estremità, terminate in due validi denti divergenti; nere, rosse soltanto innanzi i due denti terminali. Antenne robuste; scapo un poco arcuato, nero; flagello ferruginoso oscuro. Torace rettangolare, di un terzo più lungo che largo, non ristretto nel mezzo, con un tubercolo calloso obliquo a ciascun estremo della sutura meso-metatoracica; interamente di color rosso mattone. Addome col primo anello campanulato: alla base fornito da ciascun lato di una piccolissima aletta esternamente troncato-smarginata, rossa come l'estremità di attacco dell'anello: la sua carena ventrale estesa pe' due quinti della lunghezza, tutta di eguale altezza. Nel resto l'addome è nero, sparso di cigli bianchicci; il margine posteriore del primo anello ha una delicata frangia bianca; il secondo ha una fascia marginale, avanzata angolarmente nel mezzo; il terzo ha una fascia che ne occupa tutto il dorso. Piedi neri con peluria cenerina; tarsi picei.

Raccolta in Sicilia, nelle adiacenze di Girgenti.

Osservazione. Guardando superficialmente e ad occhio nudo questa Mutilla si giudicherebbe facilmente la *cornuta* o la *corniculata*. Però, indipendentemente dal colorito del capo non uniformemente rosso, distinguesi da ambedue per la carena del primo anello ventrale bassa e tutta di eguale altezza, e più ancora perchè la base dell'addome è fiancheggiata ne' due lati non da un dente ottuso, ma da una piccola espansione depressa, esternamente troncato-smarginata.

Pterochilus meridionalis, n.

Tav. I, fig. 4.

♀. *Niger, antennarum scapo basi rufo-ferrugineo; maculis duabus clypei, macula in oculorum sinu alteraque pone oculos, pronoti lobis, macula sub alarum radice, maculis duabus scutelli postscutelli et metanoti, abdominis segmentorum 1-5 fascia marginis postici omnino aequali maculaque segmenti sexti, flavis; palpis fulvis; pedibus fulvo-ferrugineis, coxis, trochanteribus et femorum summa basi nigris; alis flavescenti-hyalinis, vena subcostali stigmateque testaceis, tegulis albis; clypeo leviter arcuato-emarginato, angulis rotundatis.* — Long. mill. 13.

Femina. Capo punteggiato, a punti ineguali assai ravvicinati, taluni confluenti. Una delicata carena tra la base delle antenne. Clipeo levigato, splendente, con forti punti impressi: il margine inferiore a leggiera curva rientrante. Torace punteggiato come il capo; il mesonoto con due delicati solchi paralleli mediani che cominciano al livello degli omeri e terminano alla base dello scutello, più risentiti nella metà posteriore. Addome a superficie finissimamente coriacea, poco splendente.

Il colore fondamentale del corpo è nero, con la seguente macchiatura gialla. Nel capo: una macchia nel fondo de' seni oculari ed un'altra più grande dietro ciascun occhio; due macchie ovali nella metà superiore del clipeo, una per lato; il labbro superiore; una macchia sulla faccia esterna della base delle mandibole. Nel torace: i lobi laterali del protorace, una macchia sotto la inserzione delle ali, due macchie quadrate sullo scutello, due trasversali sul dietroscutello e due piccole nel metatorace. Nell'ad-

dome: una fascia sul margine posteriore de' primi cinque anelli dorsali esattamente di eguale ampiezza, senza alcuna traccia di sinuosità, ed una macchia sul sesto anello; una trasversale da cadaun lato degli anelli ventrali secondo a quinto. Antenne nere; lo scapo rosso-ferruginoso alla base, talvolta fino alla metà della lunghezza. Palpi di color giallo-fulvo. Piedi fulvo-ferruginosi; ànche, trocanteri ed origine de' femori, neri. Ali tinte di giallo; le vene e lo stigma testacei, le tegole bianche.

Varietà. Clipeo ed ultimo anello addominale interamente neri.

Raccolta nella provincia di Lecce e nelle montagne di Cava de' Terreni. In quest'ultima località ne ha pur rinvenuto individui il prof. G. Palma.

Osservazioni. Le maggiori affinità di questo Pterochilo sono col *numida* descritto da Lepelletier con individui di Orano; ne differisce per due essenziali caratteri: 1.° per lo scapo delle antenne rosso-ferruginoso alla base, non nero nel dorso e giallo inferiormente; 2.° per le fasce addominali tutte di eguale ampiezza, mentre nel *numida* si dicono dilatate ne' lati e ristrette nel mezzo. Aggiungasi: le ànche interamente nere; le tibie e i tarsi fulvi.

Genere EUCERIBANCHUS, nob.

Antennae validae, cylindraceae, corporis dimidio parum longiores. Alarum anticarum cellula cubitalis secunda (areola) triangularis. venulam recurrentem secundam in angulo externo excipiens; cellula discoidalis media trapezina, angulo infero ab alae margine postico valde remoto; venula prima recurrens (*n. recurrens discoidalis*, Holmg.) *in medio distincte geniculata. Abdomen basi depressiusculum, posterius compressum.* ♀. *Habitus gen.* Banchus.

Sebbene l'Icnemonideo per lo quale istituiamo questo nuovo genere a guardarlo superficialmente simigli molto a' *Banchus*; pure esso ne differisce per due essenziali caratteri: 1.° per le antenne proporzionalmente corte e robuste; 2.° per una diversa disposizione delle vene delle ali anteriori. In questo la seconda cellula cubitale ha forma di triangolo, di cui la base, leggermente arcuata, guarda la estremità dell'ala, e l'apice la base di questa; la detta cellula riceve la seconda vena ricorrente presso l'angolo esterno. Mentre ne' *Banchus* e negli affini *Exetastes* la detta cellula è trasversale e riceve la seconda venetta ricorrente nel mezzo della base. Inoltre la seconda cellula dissoidale è più accorciata, trapezoidale, ed il suo angolo inferiore è più distante dal margine posteriore dell'ala; la prima vena ricorrente è piegata ad angolo proprio nel mezzo.

Euceribanchus maculipennis, n.

Tav. I, fig. 5.

Niger, antennis fulvis, orbitis anticis, pronoti maculis duabus, mesonoti vitta utrinque ante alas, scutello, metathoracis macula media dorsali maculisque duabus lateralibus, abdominis segmentorum omnium fascia marginis postici, flavis; pedibus flavo-fulvescentibus, coxis et femorum posticorum dorso obscure brunneis; alis flavescenti-hyalinis, macula apicali fumata; stigmate flavo-testaceo. — Long. mill. 11.

Antenne giallo-fulve, robuste, lunghe un poco meno del corpo: il primo articolo rigonfiato, gli altri cilindracei strettamente connessi tra loro: ciascun articolo, dal ter-

zo in poi, non più lungo che grosso. Capo nero; le orbite anteriori gialle. Clipeo trasversale; nella base levigatissimo con scarsi punti impressi, giallo; inferiormente scavato da grossi punti, nero; il margine inferiore rossiccio. Mandibole rosse alla base, nere nel resto. Palpi giallo-fulvi. Torace stivatamente punteggiato, nero; una piccola macchia su cadaun lobo laterale del pronoto, due strisce longitudinali, una per lato, sulla metà anteriore del mesonoto, fiancheggianti il margine interno del rispettivo lato del pronoto, lo scutello, un punto sul dietroscutello, una macchia quadrata nel mezzo del metanoto, la quale inferiormente si prolunga da cadaun lato in linea orizzontale, una grande macchia su ciascun fianco, di color giallo leggermente tendente al testaceo. Addome ovato-ellittico, avendo la massima ampiezza tra il margine posteriore del secondo segmento e la base del terzo; il primo segmento convesso-depresso, con solco longitudinale poco profondo, non prolungato fino al margine posteriore; i due segmenti seguenti piano-convessi nel dorso; i rimanenti un poco compressi: nero splendente; tutti i segmenti con largo margine posteriore giallo. Piedi giallo fulvicci; le ànche tutte, i trocanteri ed il dorso de' femori posteriori, di color bruno castagno. Ali tinte di gialliccio con lo stigma giallo-fulviccio; le anteriori con una macchia fuliginosa quasi circolare presso la estremità, contigua al margine costale.

Raccolto in Sicilia, nelle adiacenze di Piazza Armerina intorno gli ombrelli della Tapsia Garganica, negli ultimi giorni di maggio.

Crypturus siculus, n.

Tav. I, fig. 6.

Niger, subopacus, orbitis, palpis, abdominis segmentorum 1-3 margine postico tenuissimo albis; pedibus (coxis et primis trochanteribus exceptis) rufis; tarsis posticis articulis duobus vel tribus primis albis; alis hyalinis vena costali testacea, stigmate venisque ceteris nigricantibus. — Long. mill. 8-9.

Antenne discretamente robuste, filiformi, lunghe quanto i tre quarti del corpo, nere. Corpo di color nero carbone, con le orbite anteriori, i palpi ed il lembo posteriore esilissimo de' tre primi segmenti addominali, bianchi; Piedi: ànche e i primi trocanteri neri; nel resto di color rosso chiaro, che nelle tibie e ne' tarsi passa al testaceo verso l'estremità ne' quattro piedi anteriori, ed al nerastro ne' posteriori; tarsi di questi ultimi neri coi due o tre primi articoli, meno la base del primo, di color bianco latteo.

Faccia assai stivatamente puntinata, inferiormente con due fossette oblunghe che toccano la base del clipeo, e superiormente si prolungano in delicate linee impresse; superiormente alla inserzione delle antenne un delicato solco mediano e da cadaun lato un incavo a superficie splendente. Clipeo trasversale, elevato-convesso, con una profonda fossetta nel mezzo della parte inferiore. Metatorace punteggiato-rugoso, con le aree incomplete. Spiracoli ovali. Addome col primo segmento angusto, con gli spiracoli posti quasi nel mezzo della lunghezza: in un individuo ha un solco longitudinale ampio, ma poco profondo, nella prima metà. Il resto dell'addome quasi in forma di clava allungata, tutto stivatamente punteggiato. Carena ventrale estesa dal secondo al quinto segmento. Ali trasparenti, incolori; la vena costale testacea; lo stigma bruno-nerastro: le tegole nere, stivatamente punteggiate.

Ne possediamo parecchi individui, raccolti da un nostro corrispondente nelle campagne di Castelvetrano.

Osservazioni. Abbiamo ascritto quest'Ieneumonideo al genere *Crypturus*, come quello, tra i conosciuti, cui più si avvicina. Del resto, il Sig. Kriechbaumer dubita non convenga per esso costituire un gruppo generico distinto.

Megastylus multicolor, n.

Tav. I, fig. 7.

Niger, ore, antennarum scapo infra, pleuris anterioribus abdominisque incisuris omnibus, albis; scutello, postscutelli parte media, maculis duabus metanoti, pedibus posticis (exceptis tibiarum apice tarsisque) abdominisque segmentis tertio et quarto in disco, cinnamomeis; alis vitreis, stigmate triangulari venisque nigris. — Long. mill. 7.

Vallombrosa in Toscana.

Antenne assai delicate, un poco più lunghe del corpo; il solo primo articolo grosso, dilatato alla base: nere, il primo articolo inferiormente bianco. Corpo angusto, gracile. Capo sensilmente ristretto dietro gli occhi, nero, splendente; la faccia, dal livello della inserzione delle antenne in basso, bianca. Clipeo trasversalmente ovato-ritondato, molto convesso, bianco. Mandibole bianche co'denti terminali rossicci. Palpi bianchi. Pronoto bruno-rossastro col margine posteriore, più ampio ne' lobi laterali, bianco. Dorso del mesotorace di color rosso-cannella, con tutto il contorno nero; i solchi che separano il lobo medio da' laterali, delicati ma ben pronunziati. Scutello elevato, convesso, del colore del mesonoto; così pure il mezzo del dietroscutello. Metanoto finamente coriaceo, con peluria poco stivata ma lunghetta, bianchiccia; senza aree distinte. Prosterno e propleure bianchi; mesosterno e mesopleure di color rosso-cannella: metapleure con grande macchia rosso-cannella: metasterno nero. Piedi: i quattro anteriori con le ànche e i trocanteri bianchi di neve; il resto di color bianchiccio sporco; i due posteriori di color rosso-cannella con la metà inferiore delle tibie ed i tarsi neri. Ali vitree; lo stigma triangolare e le vene, neri; tegole bianche. Addome spatolato, stretto; il primo segmento assai angusto, più lungo del secondo, con i tubercoli spiracoliferi posti precisamente nel mezzo della lunghezza; nero, col margine posteriore di tutti i segmenti bianco: il terzo e quarto segmento rossicci nel mezzo.

Raccolto nei boschi di Vallombrosa, nel mese di luglio.

Osservazione. Le poche specie conosciute del gen. *Megastylus* [1]) pare siano tutte del settentrione di Europa. In Italia, per quanto sappiamo, non erasi prima trovato alcun rappresentante di questo genere. Le differenze che distinguono la specie presente dalle altre note sono molteplici, sì da non voler la pena di andarle tutte numerando, non essendovi alcuna specie cui possa dirsi in preferenza affine.

[1]) Vedi Holmgren, *Monographia Tryphonidum Sueciae*, p. 128 e 129.

Agathis imperialis, nob.

Tav. I, fig. 8.

Rubra, capite cum ore antennisque, scutello, metathorace, pectore, coxis et trochanteribus anticis tarsisque omnibus, nigris; alis nigro-purpurascentibus, guttis duabus pellucidis pone stigma. ♂ — Long. mill. 10.

Maschio. Antenne molto robuste, fortemente contorte nel disseccamento naturale, nere. Capo nero, splendente, con corta pubescenza dello stesso colore. Faccia nel mezzo elevata in ottusa carena; la fronte ed il vertice con rughe o pieghe rilevate: lo spazio compreso tra le inserzioni delle antenne a curva rientrante. Il labbro superiore quasi circolare, levigatissimo, con punti impressi sparsi. Protorace (meno il prosterno) e mesonoto di un bel color rosso. Il resto del torace nero. Metatorace con grosse pieghe rilevate. Addome piano convesso nel dorso; inferiormente un poco compresso, soprattutto nella parte posteriore. Piedi rossi: le ànche e i trocanteri de' quattro anteriori, la base de' trocanteri e la estremità delle tibie de' due posteriori e tutti i tarsi, neri. Ali di color nero-porporino intenso, splendenti; due areole trasparenti dietro lo stigma; la cellula radiale di color meno intenso del resto dell'ala: la seconda cellula cubitale quadrata.

Raccolto in Sicilia nel bosco S. Pietro presso Caltagirone, sui fiori della Tapsia Garganica negli ultimi giorni di maggio.

Osservazioni. Evidentemente pe' caratteri essenziali delle parti boccali e delle cellule alari questo Braconideo si appartiene al genere *Agathis*. Nondimeno vi ha una differenza nelle nervature alari. Nelle ali anteriori dalla seconda cellula cubitale parte un nervo che scorre tra la vena radiale e la cubitale perdendosi verso la metà del campo che percorre. Vedi fig. cit. *A*,x. Di questa vena soprannumeraria non si osserva alcuna traccia nelle vere *Agathis*. Aggiungi a questo, che la sua statura, che sorpassa di molto quella delle specie tutte innanzi conosciute, la robustezza delle antenne, la natura dei colori gli dànno un abito molto singolare. Per siffatte ragioni crediamo che di questa potrebbe formarsi una sezione speciale col nome di *Megagathis*. Probabilmente quando sarà conosciuta la femmina potrà in questa trovarsi qualche altro carattere che giustifichi la nostra proposta.

Crambus italellus, n.

Tav. I, fig. 9.

Argenteus, alis anticis fasciis duabus angulatis, striga subcostali a basi ad angulum primae fasciae decurrente, margineque apicali ad costae apicem triangulariter dilatato, fusco-cinnamomeis; alis posticis cinereis. — Long. cum alis flexis, mill. 13; exp. alar. mill. 24.

Ali anteriori argentine, traversate da due fasce angolose e tra loro parallele di color bruno cannella, formanti un angolo che guarda il margine apicale dell' ala e presso il margine posteriore (considerando l'ala spiegata) si raddrizzano divenendo verticali. La prima fascia, ossia quella più vicina alla base, è situata in modo che il

suo angolo esterno ricade nel mezzo della lunghezza dell'ala ed al terzo anteriore dell'ampiezza: nel terzo posteriore poi si raddrizza e scende dritta quasi perpendicolare al margine posteriore. La seconda fascia è posta poco oltre la metà dello spazio tra la prima ed il margine apicale: i due lati che formano l'angolo sono paralleli a quelli della prima fascia, ma posteriormente invece di scendere diritta al margine, forma un altro piccolo angolo, e si prolunga obbliquamente in dentro fino ad incontrare il predetto margine posteriore. Dalla base dell'ala alla prima fascia corre una striscia quasi parallela alla costa, che si termina entro l'angolo della fascia. Fra la seconda fascia ed il margine apicale vi ha una zona dello stesso color cannella, più oscuro sulle coste, ove all'estremità vi ha un trattolino nero. Le ali posteriori sono di color cenerino a splendore argentino, tinte leggermente di cannella verso il margine. Corpo, antenne, palpi e piedi, argentini.

Raccolto negli Abruzzi.

Osservazione. Sono già molti anni da che possediamo questo bellisssimo Crambo; la difficoltà di giudicare della novità in fatto di Microlepidotteri ce lo ha fatto tenere inedito. Avendolo infine comunicato al giudice più competente, Sig. Staudinger, siamo stati assicurati essere specie non conosciuta; onde ci siam determinati a pubblicarla.

Systellonotus venustissimus, n.

Tav. I, fig. 10.

Brunneo-niger, capite, antennis pedibusque obscure rufis, elytris fascia triangulari nivea basi marginem externum, apice internum tangente, antice posticeque a linea atra cincta: elytris ♂ cum membrana completa albida basi fuscescente abdomen superantibus, ♀ cum membrana abbreviata corpore brevioribus. — Long. mill. 7.

Maschio. Corpo gracile, angusto. Capo ovoidale, allargato gradatamente dall'occipite fino agli occhi, che sono distanti dalla base del capo tanto, quanto dalla estremità dell'epistoma; bruno rossiccio, levigato, splendente. Occhi neri. Rostro eccedente di poco le ànche anteriori. Antenne delicate, esattamente filiformi; il secondo articolo un poco più lungo del terzo: i due primi articoli rossicci, il terzo ed il quarto pallidi. Protorace in avanti ristretto e quasi cilindraceo, indi un poco allargato-rotondato; un poco compresso ne' fianchi; posteriormente allargato verso gli angoli posteriori; con una impressione trasversale ben marcata dietro il margine anteriore; superficie finissimamente coriacea: nero-brunastro, poco splendente. Scutello proporzionalmente grande, a superficie e colore simili al protorace. Elitre con la membrana normale, superanti l'estremità dell'addome: il corio ha color bruno-cannella, con una fascia d'un bianco di neve, in forma di triangolo posto a traverso, di cui la base tocca il margine esterno dello esocorio e l'apice il margine suturale poco dietro l'estremità dello scutello: questa fascia nivea è fiancheggiata avanti e dietro da una linea di un nero profondo, che la fa maggiormente risaltare. Squama nerastra. Membrana con la metà basilare bruna, nel resto cenerina. Piedi rossicci, i femori più o meno oscuri. Ventre nero ne' lati, rossiccio nel mezzo.

Femina. Differisce dal maschio per la membrana delle elitre sviluppata a metà e quindi per l'elitre intere più corte dell'addome. Ultimo anello dorsale con forame po-

steriore circolare per l'apertura anale. La rima vulvare si prolunga fino alla base dell'antipenultimo anello ventrale.

Ne abbiamo raccolto i due sessi su' monti della Majella, negli Abruzzi. Sembra abbastanza raro, avendone potuto rinvenire un'unica coppia.

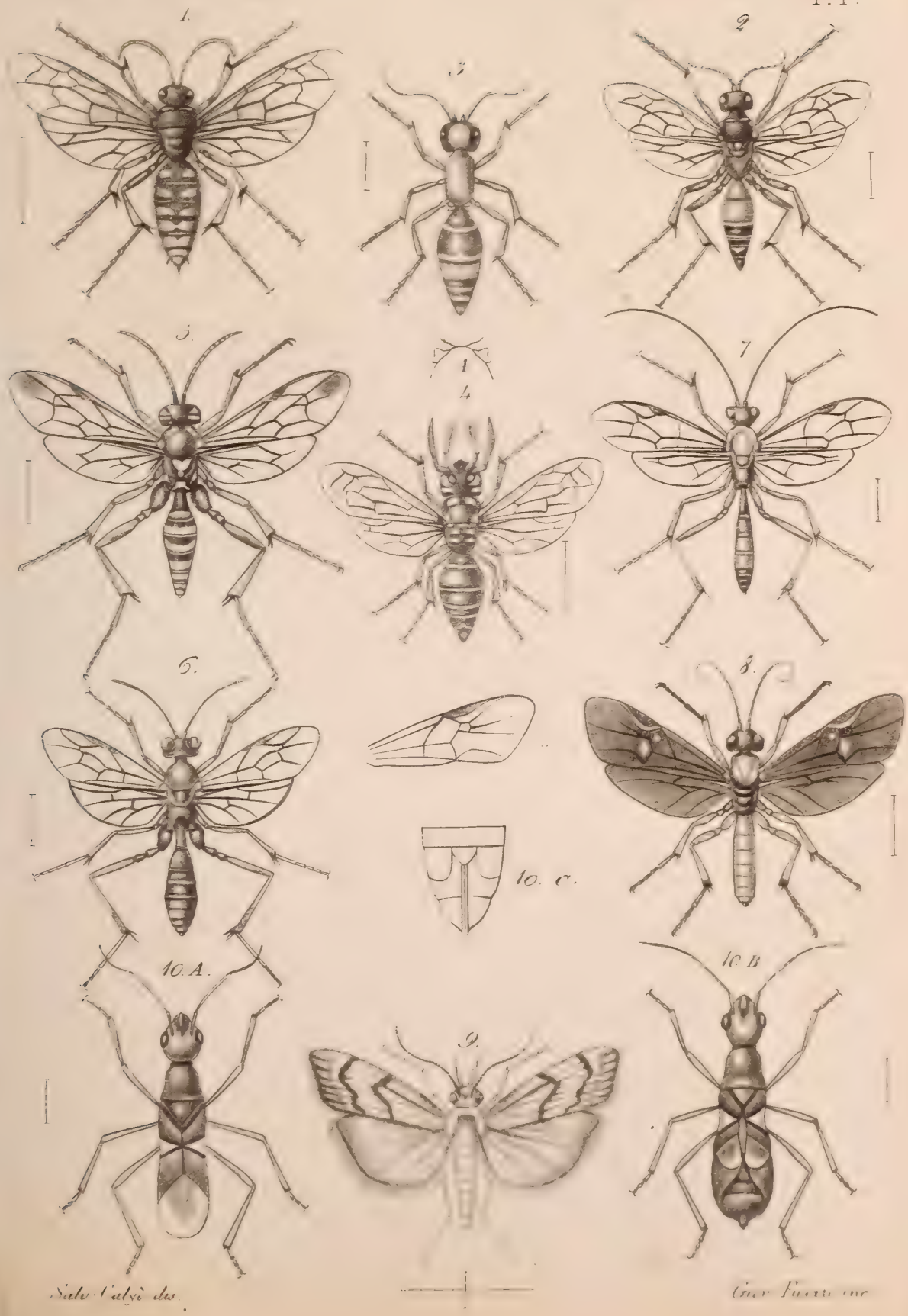
Osservazione. Registriamo questo grazioso Capsideo nel genere *Systellonotus*, Fieb., come quello cui maggiormente si avvicina. Però paragonandolo con la specie servita di tipo a Fieber per fondare questo genere, il S. *triguttatus*, Lin., vi si riscontrano differenze, che secondo taluni sistematici potrebbero avere valore generico. Il capo è più ovoidale; gli occhi equidistanti dal margine occipitale e dalla estremità dell'epistoma. Nel *S. triguttatus* il capo è più accorciato e gli occhi più sporgenti e più vicini al margine occipitale che all'estremità dell'epistoma. Anche il protorace ha forma diversa.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Figura 1.ª Lo *Stizus villosus*.
» 2.ª L'*Harpactes transiens*.
» 3.ª La *Mutilla bison.* : A, il primo anello addominale.
» 4.ª Lo *Pterochilus meridionalis*.
» 5.ª L'*Euceribanchus maculipennis*.
» 6.ª Il *Crypturus siculus*.
» 7.ª Il *Megastylus multicolor*.
» 8.ª L'*Agathis imperialis:* A, l'ala anteriore, *ϖ* la vena soprannumeraria.
» 9.ª Il *Crambus italellus*.
» 10.ª Il *Systellonotus venustissimus:* A, il maschio; B, la femmina; C, gli ultimi segmenti ventrali di questa.

---

finita stampare a 10 gennaio 1888.
Le diagnosi specifiche però
sono state pubblicate nel *Rendiconto* di decembre 1887.



Salv. Calyò dis. Gior. Fusari inc.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULL'ANATOMIA E FISIOLOGIA DEL FRUTTO NELL'*ANONA RETICULATA*, L., E NELL'*ASIMINA TRILOBA*, DUN.;

RICERCHE

del Socio Ordinario GAETANO LICOPOLI

(Memoria con una tavola).

Nello stato presente della scienza fitologica non basta conoscere che nella cellula vegetale si trovi la tale e la tal'altra sostanza, ma è necessario sapere come, quando, e perchè vi si formi; giacchè solo allora potrà dirsi che la fisiologia della cellula sarà conosciuta.

A questo fine furono indirizzati alcuni miei studî sul frutto dell'uva e di alcune palme, i cui risultati, raccolti in due memorie separate, oramai figurano negli Atti di quest'Accademia [1]). A questo stesso fine ho rivolte le indagini che riassumo nel presente lavoro. Esse hanno avuto per tema il frutto di due anonacee: dell'*Asimina triloba*, Dun., e dell'*Anona reticulata*, L., quantunque molte volte nell'interesse della ricerca avessi dovuto esaminare altri organi ed altre piante.

Il lavoro che vi presento, Onorandi Colleghi, non risponde pienamente al titolo che l'impronta, giacchè della parte fisiologica non tratta che la sola virtù formativa e secretiva della cellula ed è, a senso mio, lavoro micro-fito-chimico, che, per ragion di metodo, volle essere preceduto d'alquante osservazioni organografiche che qui toccherò di volo; le quali osservazioni, mentre chiariscono il concetto morfologico dei due frutti, mi spianano la via alla loro descrizione istologica. Così è ch'io comincio a trattare:

Della costituzione organografica del frutto dell'Asimina triloba e dell'Anona reticulata.

Tutti e due questi frutti sono riferiti dagli Autori al tipo *bacca*. Però quello dell'*Asimina* deriva da gineceo di quattro-cinque carpelli liberi, ciascuno con ovario uniloculare sormontato da stilo ricurvo e stimma papilloso. La placenta n'è parietale corrispondente ad un solco longitudinale; ed il pericarpio è rientrante nell'intervallo dei semi, i

[1]) Licopoli, *Sul frutto dell'Uva e sulle principali sostanze in esso contenute.* Vedi Atti della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Vol. VII, 1876.
— — *Sulla Chamaerops humilis*, L., *ed altre Palme.* Idem, Vol. IX, 1881.

quali hanno episperma coriaceo di color bruno ed endosperma con albume carnoso e *ruminato*. L'altro dell'*Anona* è, a rigore, *frutto multiplo* anzichè *bacca*, essendo proveniente da pistillo fatto di molti carpelli connati sopra ricettacolo carnoso e conico, il quale pure piglia parte alla costituzione del frutto. Tale frutto è chiamato volgarmente [1]) *Corossol reticolato*, *cuore di bue*, *piccolo corossollo*, la cui superficie è divisa in areole pentagonali ed irregolari. È frutto mangiativo pel principio zuccherino che contiene, ma è poco stimato per un certo aroma che sa di resinoso. Leggesi, e giova qui ricordarlo, che le foglie, la corteccia e tutti gli altri organi della pianta contengono un principio acre narcotico che gli abitanti dell'Arcipelago malese adoperano per uso esterno. — Le semenze contengono un olio grasso ed un principio emetico. I frutti, le semenze e la corteccia dell'*Asimina triloba* godono le medesime proprietà.

Tutte e due queste specie sono originarie della parte più meridionale dell'America del nord. Si suppone che l'uomo le abbia diffuso in altre parti, fin anco nel vecchio continente. L'Anona reticolata, coltivata, prospera in Sicilia e nell'estrema Calabria. L'Asimina trovasi negli orti botanici d'Italia, ed io l'ho veduta in piena fruttificazione in quello di Padova e nelle reali delizie di Caserta.

E qui sento l'obbligo rendere sincere azioni di grazie ai chiarissimi professori P. A. Saccardo e Nicola Terracciano che dell'Asimina hanno voluto somministrarmi tanta copia di frutti quanto me ne occorse pel presente lavoro. Ed ora dirò

Della costituzione istologica dei due frutti in esame.

Nel frutto dell'Anona reticolata la sezione longitudinale *(fig. 17)* presenta un corpo centrale che come asse ne congiunge l'apice alla base; è desso un prolungamento del ricettacolo fiorale che, fattosi molle o carnoso, si unisce alla polpa proveniente dai numerosi carpelli originalmente saldati fra loro; dei quali carpelli nel frutto già formato e cresciuto non si veggono che le sommità rimaste come facce di troncatura in seguito alla caduta dello stilo e dello stimma. E sono queste facce pentagonali che giustificano il nome specifico: *reticulata* assegnato a questa pianta.

Nell'Asimina triloba *(fig. 9)* ove ciascun carpello libero diventa un frutto indipendente, manca l'asse centrale, e la polpa è costituita dalle sole pareti dell'ovario. Malgrado queste differenze organografiche, tutte e due le specie hanno pericarpio, ad epoca di maturità, carnoso, molle, ed esalante odore grato e soave. La loro polpa si compone di due principali tessuti: cellulare e fibroso-vascolare; questo è scarso, ridotto a pochi fascetti esili, quello è copioso e fatto di parecchie modalità di cellule.

Difatti nella polpa resa molle e diffluente per innoltrato processo maturativo o per effetto di macerazione se ne scorgono delle seguenti maniere: cellule parenchimatiche, tubulose, sclerenchimatiche, fibriformi, collenchimatiche, spirali, punteggiate ed ancora d'un'altra maniera, che non veggo descritta dagl'Istologi, e che chiamerò provvisoriamente *cellule speciali*. Tutte queste forme non vi sono sparse alla rinfusa, invece vi sono disposte con ordine che di poco varia passando dall'uno all'altro frutto. Le cellule parenchimatiche sono tondeggianti, ovali, oblunghe, claviformi e tutte queste con pareti sottili ed uniformemente traslucide *(fig. 7)*. Esse compongono la base della polpa. Le sclerenchimatiche sono ove solitarie ed ove raccolte in gruppi o granulazioni, delle quali alcune sono semplici altre ramose.

[1]) Vedi Baillon, *Histoire des plantes, etc.*

Ciascuna cellula sclerenchimatica o ciascun gruppo sta nella polpa come piccolo centro di formazione istologica *(fig. 8)*, in quanto che su di essa veggonsi impiantate intorno intorno altre cellule parenchimatiche, e con sì forte presa che la lunga macerazione nell'acqua o negli acidi non giunge a distaccare. Tali granulazioni, massime nel frutto dell'Anona, abbondano nella zona periferica, scarseggiano mano mano verso il centro dello stesso, sono mediocremente diffuse in quello dell'Asimina.

Le cellule collenchimatiche compongono l'endocarpio, il quale ad epoca di maturità facilmente si stacca dal mesocarpio e si presenta come membrana molle addossata alle semenze così d'assumere l'aspetto di falso avillo; e però tali cellule sono relativamente poche *(fig. 21, 22)*.

Le cellule spirali sono di tre maniere: semplici, ramose e vasiformi. Giacciono in quelle parti della polpa ove vanno a terminare i fascetti fibro-vascolari, e quivi sono, come le sclerenchimatiche, circondate da cellule ordinarie *(fig. 19)*.

Le cellule tubulose fiancheggiano le ramificazioni dei fascetti fibro-vascolari, ove pare che la natura si serva di esse invece di fibre propriamente dette.

Le cellule fibriformi *(fig. 20)* si trovano soltanto nel seme e segnatamente nell'episperma, la struttura del quale sarà descritta più oltre.

Intanto giova considerare che fra gli elementi istologici fin'ora menzionati rinvengonsi negli stessi frutti altre modalità intermedie, le quali se qui fossero descritte, varrebbero a dimostrare come la natura, anche in fatto d'istologia, da una forma cellulare tipica passi ad un'altra gradatamente e non per salti. Ma su questa tesi generale non è qui il luogo fermarmi di vantaggio.

Le cellule *speciali (fig. 2)* sono solitarie, qualche volta appajate, mai raccolte in gruppi. Rispetto al numero relativo in una data quantità di polpa, esse vengono dopo le cellule parenchimatiche e vi sono sparse dovunque è tessuto cellulare molle, così nel frutto, come negli altri organi della rispettiva pianta. Nella polpa matura o rammollita dai reagenti esse veggonsi *(fig. 1)* circondate immediatamente da cellule parenchimatiche, come è stato notato innanzi per le cellule spirali *(fig. 19)* e per le cellule sclerenchimatiche *(fig. 8)*. La specialità di tali cellule io la riconosco nel loro potere rifrangente, nella resistenza delle loro pareti rispetto ai reattivi distruttori e nella qualità del loro contenuto. La macerazione nell'acqua, nella potassa e nel liquore maceratore di Schultze rammollisce, amplifica le loro pareti ma non le dissolve. Che anzi, dopo tali azioni, si presentano costituite di due membrane una esterna e l'altra interna, entrambe sottili, incolori e della stessa natura chimica. L'acido nitrico, l'acido idroclorico, l'acqua regia, il liquore cupro-ammoniacale, il cloruro di zinco-jodurato, tutti agenti distruttori dei tessuti vegetali, non distruggono le cellule speciali; solo ne deformano le pareti e ne guastano il contenuto *(fig. 4, 5, 6, 11 e 12)*. Un'altra e più chiara pruova della loro resistenza la porge l'acido solforico, il quale, mentre agisce sul preparato giacente nel campo del microscopio e disorganizza e distrugge ogni maniera di cellula ordinaria, mette in maggiore rilievo le cellule speciali, le quali in questo caso appariscono anche all'occhio dell'osservatore non prevenuto, come corpi splendenti e galleggianti in un liquido verdastro. Quando però quest'acido è molto concentrato ed agisce bruscamente e con impeto, allora le riduce in brandelli, il che mi sembra accadesse più per azione meccanica dilatativa che per altro. E se all'azione di quest'acido succede quella della tintura di jodio, quelle membrane o quei brandelli di membra-

ne non si colorano in azzurro, come quando fossero di cellulosa, ma si tingono appena in giallo. Questo fatto, che accenna alla presenza della silice, è avvalorato da altre esperienze microchimiche eseguite col cloruro di zinco jodurato e col cupro ammoniacale. Per la qual cosa mi sento forzato a riconoscere nelle pareti delle cellule speciali la presenza della silice, nonchè a ravvisare in esse un esempio di *cuticulazione* non ancora riconosciuto in cellule facienti parte di tessuti molli e centralizzati, come sono appunto quelli che compongono la polpa nel frutto dell'Asimina triloba e dell'Anona reticolata.

Nelle pareti di tali cellule oltre le due membrane, rese distinte dall'azione della macerazione, se ne scorge ancora una terza anch'essa *silificata* o *cuticulata*, tutte le volte che l'acido solforico agisce lentamente e per lungo tempo. Ma qui giova soggiungere che questa terza membrana, o perchè troppo sottile o perchè racchiude una sostanza fatta dal reagente finamente granellosa ed opaca, sembra d'essere la superficie di questa sostanza medesima anzichè una membrana propria. Ma quest'illusione sparisce allorquando la detta sostanza si contrae in massa più piccola e nucleiforme *(fig. 4ª, e 12)*.

Nelle condizioni normali il contenuto di queste cellule si presenta dapprima come sostanza semifluida intorno al nucleo originario; indi si raccoglie in due, tre, quattro e talvolta anche cinque masse tondeggianti e d'aspetto gelatinoso *(fig. 2, 3, e 10)*, le quali masse sono ordinariamente involte da grossa bolla gassosa *(fig. 14)* che ne accresce il potere refrangente. Ma della natura chimica di queste masse tratterò in seguito. Delle cellule spirali dico soltanto che sono rare, rarissime le spirali vasiformi. Non ha veruna importanza nel presente lavoro la descrizione dell'epidermide e del tessuto fibroso-vascolare. E però, conosciuta la qualità dei tessuti che compongono il pericarpio dell'*Asimina triloba* e dell'*Anona reticulata*, ho creduto rifarmi sull'organogenia del rispettivo pistillo, all'oggetto di conoscere quale ordine di successione genetica la natura serba nel produrre tante modalità di cellule quante ne ho riconosciuto nei frutti presi a completo sviluppo; stimando che una tale disamina m'avrebbe spianata la via alla conoscenza dei rispettivi attributi fisiologici. A tal uopo ho fatto cadere le maggiori osservazioni sui carpelli dell'*Asimina triloba*, i quali per la loro indipendenza si porgevano acconci. Dall'esame eseguito su di essi ho raccolto i seguenti fatti: Nello stadio mammellonare ciascun carpello si compone d'un mucchio di cellule meristematiche. Le più superficiali di esse, ben tosto differenziandosi, si fanno cellule epidermiche. Durante tale stadio si formano al di sotto di esse le cellule *speciali*, che in questo stato per nulla si distinguerebbero dalle altre cellule attigue se non fosse il forte potere rifrangente del loro contenuto. — Indi a poco, ed a misura che il carpello piglia forma propria, si genera il parenchima verde; ed in esso appariscono i vasi; ed intorno a questi le fibre. Da questo momento in poi le cellule speciali si fanno più numerose e più appariscenti; si formano le cellule sclerenchimatiche, le cellule spirali, le punteggiate, le vasiformi e da ultimo si distinguono le collenchimatiche. Tutto ciò avviene nello spessore della parete dell'ovario, mentre nella sua cavità si organizzano gli ovoli ed in questi le cellule fibriformi. È inutile affermare che tutti questi elementi istologici si moltiplicano continuamente fino a crescenza finita dell'organo. Ma giova soggiungere che alcune di esse, come le cellule sclerenchimatiche, le spirali e le speciali, nel formarsi, si costituiscono centri d'attività formativa in tutto l'organo crescente. E qui vuol essere notato il fatto che tutte le modalità di cellule di sopra descritte, meno le cellule collenchimatiche, rinvengonsi altresì in tutti gli organi assili ed appendicolari della pianta così nell'Asimina triloba come nell'Anona reticolata.

Sostanze che si formano nei due frutti innanzi descritti.

I frutti maturi di queste due specie contengono, oltre la clorofilla e la materia colorante gialla, *tannino, amido, zucchero*, *sostanza grassa* e *principio aromatico*. Di tutte queste solo la sostanza grassa non è comune a tutti i frutti carnosi, e però essa mi parve degna delle maggiori osservazioni.

La prima sostanza a formarsi, dopo la clorofilla, è il tannino, la cui presenza è rivelata dalla soluzione di solfato di ferro, colorandolo in bruno dovunque lo trova: nelle cellule tubulose e nelle fibre, dove la soluzione di potassa determina invece una colorazione gialla. Queste due reazioni caratteristiche del tannino si ripetono negli altri organi della pianta, segnatamente nelle fibre e nelle cellule delle specie anzidette.

L'amido si forma in qualunque parte della polpa e nelle stesse cellule da tannino, ove assume forma di minimi granelli sferici. Essi durante il periodo accrescitivo del frutto ricolmano interamente la cavità delle cellule; mentre nel corso della maturazione vanno mano mano scemando in numero fino a ridursi in pochi. In quest' epoca la reazione del tannino riesce debole.

Lo zucchero si forma dovunque si trova tannino ed amido. Il reattivo di Trommer ne rivela l'esistenza allo stato di glucosio; e la reazione n' è tanto più evidente per quanto più il frutto è vicino a perfetta maturità; riesce debole ed incerta a misura ch'esso entra in fermentazione. Nel frutto imputridito non si ripete più. Le cellule parenchimatiche sono le più numerose e le più produttive, perchè in esse si formano successivamente tannino, amido e zucchero; ove per giunta la coesistenza di queste tre sostanze non esclude ancora la presenza d'una piccola quantità di materia azotata, che come avanzo del protoplasma originario si scorge, ove verso il centro ed ove verso le pareti delle cellule, sotto forma di sprazzi di materia finamente granellosa.

La sostanza grassa è di due qualità ed ha due sedi distinte: una si contiene nelle cellule speciali, che sono in tutti gli organi della pianta, l'altra nel solo albume.

Nelle cellule speciali si forma colle cellule stesse e però si rinviene in qualunque organo ed in qualunque epoca di vegetazione; essa nel formarsi assume caratteri fisici non per anco attribuiti alle materie grasse di natura vegetale: è dapprima fluida, semifluida, indi d'aspetto e consistenza gelatinosa, ed in ultimo vedesi raccolta in due,-tre,-quattro,-cinque masse solide, ialine, sempre dotate di forte potere refrangente. Ed in vero quando, durante le ricerche pel presente lavoro, mi trovai la prima volta in presenza di cellule le cui pareti per la loro resistenza non mi parevano fatte di cellulosio, ed il cui contenuto mostravasi d'insolita natura, dubitai molto se si fosse trattato o no di cellule vegetali; e mi balenò alla mente l'idea di qualche parassita animale. Ma l'esame istologico successivo e le reazioni microchimiche rimossero tosto la strana idea. Osservai che tre mesi di macerazione nell'acqua comune distrussero la polpa dell'Asimina e dell'Anona, ma non distrussero le cellule speciali ch'erano in essa; anzi queste mi presentarono le loro pareti ed il loro contenuto come sono abitualmente nel frutto allo stato di protratta maturità. Nelle condizioni ordinarie, trattate coi reattivi si comportano nel modo seguente: il liquore maceratore di Schultze amplifica le pareti cellulari e ne rammollisce le masse interne colorandole in rosso-mattone. Però alcune d'esse masse si fanno granellose.

L'acido azotico produce gli stessi effetti.—La potassa sforma e fluidifica le masse, separa le tre membrane della parete cellulare e mette in evidenza il nucleo *(fig. 4, 12)*.

L'acido acetico converte le dette masse in sostanza omogenea e rammollisce le pareti delle rispettive cellule.

L'acido osmico (soluzione al 5 %) raggrinza alquanto le pareti e rende oscure le masse.

L'alcool bollente non altera punto le pareti, ma fluidifica le masse. La Benzina e l'olio essenziale di trementina producono gli stessi effetti.

Il solfuro di carbonio fluidifica e disperde le masse tanto che, dopo reiterate azioni, le cellule ne rimangono vuote.

L'acido solforico v'esercita la più energica azione, perchè penetra immantinente nella cavità cellulare, attacca le masse, le converte in sostanza granellosa e ne determina la formazione di numerose gallozzole d'aspetto oleoso, le quali si colorano in giallo-rossigno. — Ho notato ancora che quando nelle cellule speciali, che hanno patito l'azione dell'acido nitrico o del liquore maceratore dello Schultze, si fa arrivare la soluzione di potassa, allora s'apre nelle pareti un piccolo forellino dal quale tutta la materia contenuta esce a getto-filiforme e flessuoso. Questo fenomeno, benchè determinato dalle condizioni fisiche a cui soggiacciono le cellule speciali, permette all'osservatore di sperimentare l'azione immediata dei suoi reattivi direttamente sulla materia evasa anzichè attraverso le pareti cellulari che la contengono *(fig. 13)*.

Tutte queste reazioni confermano pienamente l'idea che le masse d'aspetto gelatinoso contenute nelle cellule speciali, sono di materia grassa. Ma che specie di materia grassa essa sia, fino al punto ove sono arrivate le mie indagini, non saprei dichiarare. Dell'altra sostanza grassa contenuta nell'albume sarà detto più oltre.

Nell'Asimina triloba il principio aromatico s'annunzia al senso olfattivo dacchè l'epicarpio (dell'Asimina triloba) assume colore giallognolo. Questo fenomeno, dovuto alla trasformazione della clorofilla in materia colorante gialla, coincide col cominciare del processo maturativo; mentre nell'Anona reticolata tale processo viene segnalato da una speciale nitidezza che acquista l'epicarpio e non da particolare colorazione. Ho seguito quanto ho potuto in tutti e due i frutti questo processo maturativo e coll'analisi istologica e colle reazioni microchimiche, ma dai fatti fin'ora raccolti non mi risulta che il detto principio aromatico venga da un tessuto speciale o che abbia una sede speciale. Esso si sente in tutto lo spessore del pericarpio, ove credo che sia elaborato dalle ordinarie cellule parenchimatiche. Nessun fatto ho raccolto che attestasse del principio acre che si vuole contenuto nella corteccia e nelle foglie delle due anonace, e passo ad altro soggetto.

Particolarità istologiche del seme e sostanze in esso contenute.

Il seme di queste due Anonacee viene da ovolo anatropo, il quale, finchè ovolo, nulla offre di particolare; ma nel divenir seme le sue parti si modificano in maniera assai caratteristica e degna di nota. L'episperma si fa tenace, coriaceo e di color marrone; la mandorla racchiude albume ruminato con due qualità di principio grasso ed embrione piccolissimo.—Ad epoca di maturità l'episperma si scinde naturalmente nelle sue due parti: *testa* e *tegmen;* e dopo ciò si vede chiaro che la tenacità, la consistenza ed il

color marrone sono del primo e non del secondo. Questo è tenue, biancastro; quello è spesso e costituito di cellule oblunghe, cilindriche, con pareti spesse ed unite capo a capo come nei filamenti confervoidei; sì ch'io stimo nel presente lavoro chiamarle *fibro-cellule*. Esse vengono dalla *primina* dell'ovolo e per la virtù riproduttiva delle sue cellule fondamentali; sono munite di pori-canali, molti dei quali terminano al vertice di piccole prominenze coniche *(fig. 20)*. Cosiffatte fibro-cellule nel *testa* si dispongono a zone, le quali s'inflettono e s'intrecciano in sensi diversi per modo che la sezione trasversale dell'episperma presenta in quella parte una struttura così complicata, che senza l'ajuto della potassa o del liquore maceratore che ne allargasse l'intreccio non si potrebbe riconoscere *(fig. 18, n)*. — La *secondina* costituisce il *tegmen*, come d'ordinario, il quale in questo caso si rimane sottile ed incolore. Ma ciò che mi parve più degno di nota in queste semenze s'è che l'episperma crescendo mette dalla faccia interna parecchie espansioni membranose, che, a guisa di tramezzi rivolgendosi verso il centro, rendono il perisperma anfrattuoso e *ruminato*. Queste espansioni membranose, benchè comuni ad altre piante con albume ruminato, sono qui degne di nota per la loro struttura anatomica. Ed in vero *(fig. 24 e 18, l, e 27 f)*, vedute nel taglio trasversale, si mostrano costituite di due suoli di fibro-cellule e d'una membrana sottile fatta di cellule angolari molto appiattite; mentre le fibro-cellule sono di quelle stesse che compongono il testa, sebbene molto più lunghe ed in alcuni punti ramose. Esse vi sono disposte con mirabile regolarità sì da formar rete a maglie di figura romboidale. I loro pori-canali sono più appariscenti che in quelle del testa ed i loro rapporti anastomotici più evidenti *(fig. 24)*.

L'albume o perisperma a sua volta è rivestito da una membrana assai sottile *(fig. 16 m, e 18 m.)*, la quale in origine è la faccia esterna della nocella. Sulla faccia rivolta all'interno essa membrana porta un gran numero di cellule speciali quivi alquanto più grosse di quelle vedute nel pericarpio ed in altri organi della pianta *(fig. 16 s, s)*. La loro origine è contemporanea alla formazione dell'albume, il quale nei suoi primordii si presenta alla vista naturale come sostanza gelatinosa, ma che in realtà è fatta di cellule poliedriche con pareti assai delicate.—Nulla m'occorre aggiungere intorno alla struttura dell'embrione e delle altre parti del seme. Dirò in vece delle sostanze in esso elaborate.

A misura che gli elementi dell'episperma giungono a perfezione, alla tinta bianco-verdastra succede il colore marrone, ch'è dovuto ad una materia colorante amorfa, la quale si forma entro la cavità delle fibro-cellule e ne colora anche lo spessore delle rispettive pareti. In questo stato il solfato di ferro rivela la presenza del tannino, più negli elementi del testa che in quelli del tegmen. Nella mandorla, e segnatamente nell'albume, vengono elaborate le due specie di materia grassa: una alla superficie dell'albume medesimo entro le cellule speciali *(fig. 16 s, s)* l'altro nel corpo di esso *(fig. 16 o, o)*. Quella nelle cellule speciali si forma fin dall'origine delle cellule stesse e vi si presenta coi caratteri fisici e chimici già innanzi descritti. L'altra, nell'albume, si forma col rassodarsi delle cellule perispermiche, perciocchè in quelle di recente formate non si vede che una sostanza liquida ed affatto ialina, nella quale pel progresso della vegetazione si formano numerosi corpuscoli puntiformi ed opachi. Sono questi corpuscoli che a crescenza finita dell'organo si raccolgono in gruppi, si fluidificano e si convertono in gallozzole oleose.

Questo modo di produzione del principio oleoso è oramai noto per le osservazioni

d'insigni osservatori, fra i quali il nostro Socio prof. Pasquale; ed è osservabile in tutte le piante oleifere [1]).

La sostanza grassa delle cellule speciali, come appena si forma, si raccoglie in tre-quattro masse permanenti, omogenee e d'aspetto gelatinoso, le quali conservano questo stato per tutta la vita della cellula da cui sono contenute e solo per l'azione dell'acido solforico, della potassa e di qualche altro reagente si fluidificano e si convertono in gallozole oleose. E questa conversione procede dal centro di ciascuna massa anzicchè da qualsivoglia parte; mentre nelle cellule perispermiche l'aggruppamento dei corpuscoli puntiformi e la loro fluidificazione s'effettuano in tutto l'ambito della cavità cellulare. Tutti questi fatti sono ancora conseguenze necessarie dell'accrescimento e della maturazione dell'organo cui appartengono. Oltre a queste differenze lo stesso acido solforico me ne ha fatto scovrire un altra, la quale consiste nei seguenti fenomeni. Allorchè tale acido penetra nelle cellule perispermiche fluidifica immantinenti tutti i corpuscoli o granuli oleosi che incontra e ne determina la formazione di gallozzole limpidissime; e queste gallozzole, dopo alquanti momenti, si colorano d'un bel roseo chermisino. Un tal fatto non si ripete nelle cellule speciali ove le gallozzole, pur producendosi dopo l'azione dell'acido suddetto, pigliano una debole tinta giallognola anzichè rosea chermisina.

E qui cade apportuno aggiungere che tale colorazione rosea chermisina prodotta dall'acido solforico s'ottiene costantemente trattando il principio oleoso nei semi dell'Amygdalus communis e d'altre Amygdaleae. Il che dimostra che l'olio grasso di questi semi è come quello che viene somministrato dal perisperma delle anonacee e non come l'altro che deriva dalle cellule speciali.

Diversità di cellule, diversità di reazione, sono a mio credere due circostanze più che bastevoli per ammettere nei semi dell'Anona reticolata e dell'Asimina triloba due specie di sostanza grassa: una contenuta nelle cellule speciali e l'altra nel corpo dell'albume. È questo a senso mio un altro punto importante del presente lavoro!

CONCLUSIONI

Dai fatti esposti nella presente memoria mi sembra si possano ricavare le seguenti conclusioni:

1° Esiste nell'organismo dell'Anona reticolata e dell'Asimina triloba, una modalità di cellule le cui pareti sono siffattamente cuticulizzate da resistere agli agenti chimici più energici. Esse trovansi in tutti gli organi della pianta, più abbondantemente nel pericarpio, e contengono una sostanza particolare grassa d'aspetto e consistenza gelatinosa, la quale conserva per tutta la vita della pianta e dell'organo in cui si trova le sue qualità originarie senza punto dar segni di trasformazione fisiologica. Tali cellule sono per ora denominate *cellule speciali.*

2° All'organizzazione del pericarpio, oltre le cellule speciali ne concorrono molte altre, tra cui le parenchimatiche semplici e punteggiate, le sclerenchimatiche, le collenchimatiche, le spirali, le tubulose e le fibriformi per non dire ancora dei vasi e delle fibre propriamente dette.

3° Le cellule parenchimatiche sono le più numerose e godono delle maggiori

[1]) Pasquale G. A. — *Sui corpuscoli oleosi delle Ulive.* Vedi Rend. della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Vol. XII, pag. 144. Napoli 1873.

virtù fisiologiche, in quanto a che servono alla produzione della clorofilla, del tannino, dell'amido, dello zucchero, della materia colorante e fors' anche del principio aromatico, sostanze che vi si formano, giusta il responso dei reattivi microchimici, con lo stesso ordine con cui sono stati quassù rammentati.

4° Il seme ha l'episperma fatto di cellule cilindracee con parete spessa più dell'ordinario, unite capo a capo come per formar fili confervoidi e molto strettamente congiunte nel testa. Esse contengono tannino e materia colorante bruno-marrone. Quale episperma porta alla faccia interna numerose lamine trasversali, che rendono anfrattuoso e lobato l'endosperma.

5° L'endosperma contiene due specie di sostanza grassa: una scaturisce dal corpo dell'albume, ed è olio grasso come quello che viene dai semi di mandorle dolci; l'altro deriva dalle cellule speciali che giacciono alla superficie dell'albume medesimo.

6° Tutte le forme istologiche che si raccolgono nel frutto dell'Anona reticolata ed Asimina triloba sono quali più e quali meno rappresentate in tutti gli altri organi della pianta, per modo che i frutti di queste due specie possono essere considerati, in un senso teoretico, come la sintesi anatomica delle rispettive piante.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

N. B. — Tutte le figure, meno la 9ª e la 17ª si possono riferire indifferentemente all'Asimina triloba ed all'Anona reticolata, giacchè nell'una e nell'altra specie rinvengonsi tessuti identici.

Fig. 1. Gruppo di cellule parenchimatiche con una cellula speciale nel mezzo.

« 2. Tre cellule speciali contenenti ciascuna tre-quattro masse di sostanza grassa.

« 3. Cellula speciale veduta dopo lunga macerazione nell'acqua. Contiene quattro masse di materia grassa, le quali conservano ancora la consistenza e l'aspetto gelatinoso; mentre la parete cellulare s'è amplificata e pieghettata.

« 4. Due altre cellule simili alle precedenti vedule dopo l'azione dell'acido solforico del commercio. La parete è scissa in due membrane distinte; mentre una terza aderisce ancora alla sostanza da essa contenuta. In *a* questa sostanza è granellosa ed opaca, in *b* è semitrasparente per le gallozzole che vi si sono formate.

« 5. Due cellule speciali recenti, tolte da un carpello ch'era in via di formazione. Dopo lunga macerazione nell'acqua, il loro contenuto, divenuto granelloso, giace intorno a vacuole, tra le quali vedesi il nucleo vescicoloso *z*.

« 6. Cellula speciale trattata coll'acido nitrico bollente. La sua membrana esterna è squarciata e la media e l'interna, formanti ancora un sol corpo, sono in atto d'uscirne.

« 7. Cellule parenchimatiche di varia forma: *a* e *b*, prese nella polpa già matura, contengono avanzi di materia azotata, le rimanenti amido granelloso.

« 8. Una cellula sclerenchimatica in sezione. È circondata da cellule parenchimatiche contenenti amido.

« 9. Frutto dell'Asimina triloba giunto a metà della sua naturale grossezza. Sezione longitudinale. Mostra in *v* accenni di fasci vascolari; in *s* le semenze con albume ruminato.

« 10. Cellula speciale veduta dopo quattro mesi di macerazione nell'acqua. Contiene cinque masse di materia grassa ancora allo stato gelatinoso.

« 11. Altra cellula simile alla precedente con sostanza grassa divenuta granellosa, entro cui vedevasi per trasparenza il nucleo vescicoloso.

« 12. Cellula speciale tolta da una foglia allo stato mammellonare dell'Asimina triloba sottoposta all'azione dell'acido solforico; essa mostra chiaramente le tre membrane che costituiscono la parete, il principio grasso fatto granelloso e vescicoloso, ed il nucleo aderente alla membrana interna.

« 13. Cellula speciale trattata con soluzione di potassa, previa bollitura nell'acido nitrico diluito. È rappresentata nell'atto d'emettere da un forellino il suo contenuto fatto semifluido.

« 14. Cellula speciale con grossa bolla gassosa nel centro.

« 15. Cellula sclerenchimatica claviforme rappresentata in sezione longitudinale.

« 16. Sezione orizzontale e superficiale nell'albume: *m*, *m* membranella perispermica veduta di prospetto; *r*, *r* margine della stessa in sezione trasversale; *o*, *o*

frammento d'albume fatto di cellule poliedriche con parete alquanto spessa. Le quali cellule contengono gallozzole e granuli oleosi; *s*, *s* cellule speciali nascenti dalla faccia interna della membranella perispermica.

Fig. 17. Sezione longitudinale nel frutto dell'Anona reticolata. È destinata a mostrare l'asse conico *a*, la disposizione delle semenze *x* col loro albume ruminato. La figura è ridotta a metà della grandezza naturale.

« 18. Sezione orizzontale nel seme dell'Asimina triloba. È destinata a mostrare a forte ingrandimento la struttura dell'episperma *ep*, delle sue lamine epispermiche *l l* e dell'albume *a a*. In *n* sono indicate le cellule fibriformi; in *n'* le stesse in sezione trasversale; in *f f* le sezioni trasversali di cellule fibriformi disposte in due serie per ciascuna lamina epispermica *l*, *l*; *r*, *r*, membrana perispermica, come nella *fig. 16*, *r*, *r*, la quale riveste l'albume *a a*; *s s* cellule speciali contenenti masse d'aspetto e di consistenza gelatinosa. La figura è tolta da preparato eseguito in un seme ancora tenero.

« 19. Una cellula spirale ramosa circondata da cellule parenchimali contenenti amido.

« 20. Due cellule fibriformi collegate ed anastomizzate pei loro pori-canali.

« 21. Frammento d'endocarpo fatto di cellule collenchimatiche disposte in un sol piano come fossero cellule epidermiche.

« 22. Lo stesso della figura precedente veduto in sezione trasversale.

« 23. Una cellula collenchimatica isolata pel naturale disfacimento dell'organo cui apparteneva.

« 24. Cellule fibriformi disposte in due suoli formanti la parte dura delle lamine epispermiche rappresentate con *l*, *l*, nella fig. 18.

« 25. Una cellula spirale vasiforme con rare punteggiature.

« 26. Altra cellula simile a quella della precedente figura avente però nella parete maggior numero di punteggiature e di fili spirali.

« 27. Un frammento di lamina epispermica veduta nel taglio trasversale. Le cellule *m m* che fiancheggiano le cellule fibriformi *f f* sono depresse ed infossate nel mezzo.

« 28. Sezione trasversale d'un rametto tenero dell'Anona reticolata, che mostra: *e* epidermide; *m* tessuto sugheroso; *s*, *s* cellule speciali; *n* fibre legnose tagliate trasversalmente; *v* vasi. Le cellule speciali *s s* giacciono sì nel parenchima corticale verde, come nel parenchima midollare amilifero.

finita di stampare il dì 22 dicembre 1884

A. Serino inc.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CENNI SULLA FLORA DI ASSAB

MEMORIA

del Socio Ordinario G. A. PASQUALE

(Adunanza del dì 13 Dicembre 1884)

Sono così scarse le notizie che vado a dare in questa nota intorno alla vegetazione della nostra colonia di Assab, che io mi sarei astenuto d'intrattenervene, se essa nota, nella sua scarsezza, non mi avesse offerte parecchie relazioni e confronti con altre opere, le quali nello aver trattate di quelle rimote contrade, sono nella scienza stimate come classiche, e divenute storiche, pel posto eminente che godono. Con queste stesse opere alla mano io mi feci a studiare una collezione di piante che il benemerito viaggiatore G. B. Licata, della Società Africana d'Italia, con gran cura vi raccoglieva e seco lui portava a Napoli, dove la illustre Società Africana intende fare un gabinetto di Storia Naturale Africana. Or la collezione di piante, dal Licata fatta e da me qui illustrata, è forse il primo nocciuolo di detto gabinetto, che inaugura presso noi gli studî di quelle regioni che dànno sempre a guadagnare qualche cosa alla scienza: come in altre occasioni ha già guadagnato; perchè: *Ex Africa semper aliquid novi.*

Nella scienza le cose africane sono state studiate da sommi botanici Italiani di data più o men remota. Tra i quali si è reso celebre Prospero Alpino nel secolo XVII con la sua opera intitolata: *Historiae aegypti naturalis, Lugduni batav.* 1735 in 8°, con figure. E poi il Rheede [1]), il Rumph [2]), il Forskal uno de' più distinti discepoli di Linneo; il Vahl [3]), il Delile [4]), il Raddi [5]), il Beccari [6]), l'Ascherson [7]), lo Schimper [8]), il Boissier [9]), ed ultimamente i nostri socii Costa e Comes.

[1]) *Hortus indicus malabaricus.* Amstelodami 1678, Vol. XII in fol., cum tabulis.

[2]) *Herbarium amboinense.* Amstelaedami 1750, Vol. VI in fol., cum tabulis.

[3]) Vahl (Martinus). *Symbolae botanicae*, sive plantarum tum earum, quas in itinere, imprimis orientali, collegit Petrus Forskal quam aliarum recentius detectarum. Hauniae 1790 in fol., cum tabulis.

[4]) *Fl. d'Égypte* in fol. avec planches 1813.

[5]) Savi (Gaetano). *Biografia* di G. Raddi.

[6]) Beccari (O.). *Cenni sulla flora di Assab*, Bollettino della R. Soc. Toscana di Orticoltura, anno VI, pag. 108.

[7]) Anderson. *Florula Adenensis.* A systematic account with descriptions of the flowering plants hitherto found at Aden. London, tip. Taylor, and Francis 1860, 8, XXIV, 47 p., 7 tab., Proeed. Linn. Soc. Vol. V. Supplemento II.

[8]) Ascherson (P.). *Fanerogame marine.* Nel nuovo giornale bot. it. Vol, III, pagine 326 e seguenti.

[9]) *Flora orientalis*, III vol. in 8°, Generae et Basileae 1872.

La collezione, di che vado a darvi conto, comprende circa cento specie, raccolte nelle campagne della Colonia di Assab, tra le sue piante spontanee, e nelle isole comprese in quella baja.

Il suolo è generalmente salso pel cloruro di sodio; e tutto attesta che la terra con le isole sia provenuta dal mare per emersione.

Le piante che vi presento sono nella loro composizione predominanti di soda, ed attestano perciò la natura del suolo. Tali sono le specie di Chenopodium, di Salicornia, di Salsola, di Tamarix, di Avicennia, di Suaeda, ecc.

Le piogge vi sono scarse e rare, e le piante vi si mostrano rigogliose solo dopo qualche pioggia di recente caduta.

La linea isotermica di Assab è rispondente alla equatoriale; quantunque Assab rimonti al grado 13° di latitudine settentrionale.

Le sue piante spesso son comuni con quelle di Egitto, Arabia, Etiopia, ecc. Onde molto mi han servito le opere qui sopra citate, e che ho riscontrate nel presente lavoro.

Queste opere mi son servite di materiale bibliografico per determinare le piante, l'enumerazione delle quali vi presento e che debbo all'amicizia del lodato sig. Licata. Oltre di che ho consultate le collezioni del nostro R. Orto, tra le quali spiccano gli Erbarî Gussoniano e Tenoreano. L'Erbario Gussoniano possiede molta parte delle piante orientali, mandate dal Sieber, dal Raddi per mezzo di Gaetano Savi, dallo Hochstetter (Christian Friderich) dallo Schimper, dal Kralick, ecc.

Indice delle Famiglie delle piante di Assab

Dicotyledoneae

Nymphaeaceae
Capparideae
Caryophylleae
Portulacaceae
Tamariscineae
Malvaceae
Zygophylleae
Zantoxyleae
Simarubeae
Ampelideae
Leguminosae
Nyctagineae
Urticaceae
Rhizophoreae
Cucurbitaceae
Compositae
Apocynaceae
Asclepiadeae
Boragineae
Convolvulaceae
Verbenaceae
Scrophularineae
Amarantaceae
Chenopodiaceae

Monocotyledoneae

Palmae
Najadeae
Cyperaceae
Gramineae

Acotyledoneae

Fungi
Gasteromycetes
Algae
Diatomaceae
Chlorosporaceae
Phaeozoosporeae
Fucaceae
Dictyoteae
Corallineae
Characeae

DICOTYLEDONEAE

Sez. I. — Thalamiflorae.

Nymphaeaceae.

1. Nymphaea Lotus, Lin. DC. prodr. 1. 115. Est λωτος αιγυπτιος di Erodoto; *Lotus aegyptia* di Plinio.
   In aquis lente fluentibus; in palustribus, Aestuarium Harsi-Lee prope Assab.

Capparideae.

2. Maerua uniflora Vahl, symb. 1. p. 36; DC. prodr. 1. pag. 254.
3. — racemosa Vahl, symb. 1. p. 36; DC. prodr. 1. pag. 254.
4. Cadaba rotundifolia Forsk. descr. 68; DC. prodr. v. 1. pag. 244.
   In Dàncali dicta *Anagallì*, utitur coriariis.
   Invenitur inter Ganga et planitie Màcaca.
5. Cleome droseraefolia Delile. Fl. aegypti, tab. 36.
   Fructus in icone Delil. sunt acuti: in nostro specimine sunt obtusi. Folia in illo opere sunt rotundato-bilobae, quasi latiora quam longiora, in nostris rotundata, quandoque rotundato-ovata.
6. Cleome brachycarpa Vahl, inedit. DC. prodr. v. 1. pag. 240.
   Cl. ornithopodioides Forsk, fl. arab. n. 402.

Caryophylleae.

7. Indeterminata.

Portulacaceae.

8. Portulaca oleracea L. DC. prodr. v. III. pag. 353. Venit prope Buiam.
9. — parvifolia Haw. DC. prodr. l. cit. Nascitur ad Buiam.

Tamariscineae.

10. Tamarix passerinoides Delile fl. aeg. tab. 5.
    appropinquatur ad T. senegalensem.
    Nascitur abundantius in planitie dicta Chilúma
    ad Buiam, Assab.

Malvaceae.

11. Sida mutica Delile fill. aeg. n. 633.
ad Buiam.
12. Hibiscus (indeterminata).
13. (Indeterminata).

Zygophylleae.

14. Zygophyllum simplex L. DC. prodr. v. I. pag. 705.
Forsk. descr. aeg. 88. Herb. Gusson, fasc. 32.
In sabulosis ad Buiam.
15. Zygophyllum decumbens Delil. fl. aeg. 77, t. 27, f. 3. Herb. Gusson. fasc. 32.
Abundantius venit ad litora Insulae Sanabúr.

Simarubeae.

16. Balanites aegyptiaca Delil. fl. aeg. p. 77, t. 28, f. 1. Ximenia aegyptiaca L., Prosp. Alpin. aeg. 20, t. 11.

Ampelideae.

17. Cissus ternatus Gmel? vulgo in Dàncali dictus *Surrùga* in Merghèbla.
foliolis rotundato-spathulatis, in petiolo longe attenuatis.
18. — quadrangularis L. vulgo in Dàncali dictus *Surrùga* ad margines Harsi-Lee et super Palmas et Sycomoros scandens.

Sect. II. — Calyciflorae.

Leguminosae.

19. Cassia angustifolia Vahl, symb. I. p. 29, arabice *Séna* (in Dàncali Sànu).
20. — lanceolata Forsk., Aeg. Arab. n.° 158, Cassia acutifolia Delil. fl. aeg. 75, t. 27, f. 1. Senna Alessandrina officin.
glandulas exiguas non vidi.
Nascitur in Merghèbla. Indigeni agnoscunt virtutem purgantem foliorum hujus plantae.
21. — obovata Collad., Cassia Senna Lam., ill. t. 332.
in Merghèbla. Senna italica officin.
22. — lenitiva Bichoff.
— — var. B. acutifolia, Cassia acutifolia Delil. Walpers ann. t. 2, pag. 444. Cassia acutifolia Del., ill. aeg. 75, t. 27, f. 1. Senna alexandrina officin.
23. — lanceolata Forsk., aeg. n.° 158.
24. Acacia horrida W. var.
In Dàncali audit *Macànni*.
25. — spirocarpa Hochst. In Dàncali *èebi*, elata 4-5 metra in Merghèbla plus quam in remanenti colonia. Inservit pabulo camelorum et capellarum.

Rhizophoreae.

26. Rhizophora Mangle L., DC. prodr. v. 3, p. 32, Iacq. amer. p. 141, t. 89, optima.
Venit in palustribus maritimis, abundantius in Insula Hàleb, in sinu Assab.

Cucurbitaceae.

27. Colocynthis officinarum Schrad., Cucumis Colocynthis Schrad., Cucumis Colocynthis Lin. DC., prodr. Suites, Vol. III, pag. 510, 511; Herbar. Gusson., fasc. 59.

Nascitur ad Buiam ad aquarum cursus, in tempore pluviarum in Merghèblai fertilioribus Coloniae.

28. Luffa aegyptiaca Mill.? Luffa cylindrica Roem., Syn. fasc. 2. Cogniaux in DC. prodr. monog. cucurb. Vol. III, nascitur ad Buiam: in Dàncali audit *Banch*. Scanditur super Sycomoros.

Compositae.

29. Echinops spinosus L.

Sect III. — Corolliflorae.

Salvadoraceae.

30. Salvadora persica Lin., arab. *Rac*. Ramuli exsiccati ad dentiscalpia struenda inserviunt et baccae manducantur in valle Ganga.

Apocynaceae.

31. Strophanthus. sarmentosus DC.

In lingua dàncali *sàaru* nuncupatur.

Caule filiformi scandente volubili. Corolla quinqueloba, lobis angustissimis contortis.

Scandet super Acacias, et cameli ex eo pabulum faciunt.

Asclepiadeae.

32. Cynanchum pyrotechnicum Forsk., Sarcostemma pyrotechnicum Schult.

Frutex hic genistam junceam refert, et ab antiquo esca inservit indigenis, unde nomen pyrotechnicum. Licata noster proposuit, sua experientia, ad plantam tiliosam optime adhibendam.

33. Calotropis procera R. Br., DC. prodr. vol. 8°, pag. 535. Prosp. Alpini, hist. aegypti nat. pag. 86, 87. Editio altera Patavini, 1640, cum fig. (optima). Erìcu, Rheed, hort. malabar. v. 2, t. 3, fig. 1 (optima).

Apocynum syriacum, Clus., hist. 2, pag. 87, cum figura, quae non bene quadrat cum nostra planta.

Asclepias gigantea, Linn., ex synon. Prosp. Alp., cit.

Nascitur ad oras Harsi-Lee ad Buiam, vulgo in lingua Dàncali nuncupatur *Gala* (forte a graeco nomine γάλα, latte vegetale); propter copiam lactis quod e planta manat caustici. Producit lanam ex seminibus, e qua conficiunt cubilia (vide. Prosp. Alp., op. l. cit.).

Boragineae.

34. Echinospermum Vahlianum, Lehm. Anchusa spinocarpos, Forsk. Delile. flora aeg. tab. 17 fig. 3.

Nascitur ad basim Montis Sella.

Verbenaceae.

35. Avicennia officinalis, Lin.

Crescit in aestuariis, et litoribus Insularum, sinu Assab. Plantae sunt basi immersae in alta marea uti e mari emergerent. Semina facile germinant in litoribus inter testas et glareas: ita ut abundantissime plantae veniunt.

Labiatae.

36. Fragmentum ignotum habeo huius familiae, et nihil amplius.

Convolvulaceae.

37. Convolvulus Forskahlei, Delile. fl. aeg. p. 46. t. 18 f. 3.

in lingua Dàncali *aculà* nuncupatur — Nascitur in planitie Marghèbla.

Planta subfruticosa a camelis ramis et frondibus amputata remanet basi coespitosissima ramosissima.

38. Cressa cretica Lin. Sibth. fl. gr. tab. 256, C. humifusa Lam.

Nascitur in Merghébla.

Planta comunis cum Siciliae et Graeciae argillosis et inundatis: dum in Assab sylvas humbrosas subfrigidas praediligit.

Scrophularineae.

39. Peplidium humifusum Delile fl. aeg. p. 148. t. 4.

fragmentum habeo bene constatatum huius plantae a sinu Assab receptum, ab ipso Licata lectum.

Sect. IV. — Monochlamydeae.

Plumbagineae

40. Statice axillaris Forsk descr. aeg. 58, n. 99.

Vahl, symbolae I. pag. 26, tab. IX.

Nascitur ad Buiam.

41. — cylindrifolia Forskal. descriz. pag. 59.

Vahl, symbolae I. pag. 26, tab. X.

Nascitur in Insula Omm-el-Sciorab.

42. Aerva javanica Juss. Ann. trans. II. pag. 131 — Herbar. Gusson. ubi a Raddi recepta. — A. tomentosa Forsk. aeg. arab. — A. aegyptiaca, Gruel.

In aegypto pulvinaria et sellae equestres spicis lanatis infarciuntur.

43. Rumex abyssinicus Jacq., h. vindob. 3. p. 48, tab. 93.

valvis basi minute graniferis, excepto una ubi granulus major, reticulatis subcordatis.

Specimen nisi fragmentum inflorescentiae sistit.

Chenopodiaceae.

43. *bis* Salicornia herbacea, L. In palustribus maritimis, Assab.

44. Salsola fruticosa. Suaeda fruticosa

Nascitur insula Musta-Kiliof ad oras Harsi-lee; in lingua Dàncali dicta *éulum*.

45. Suaeda altissima Pall. ill. pl. p. 49, t. 42 var. sessiliflora, Moq. Chenopodium altissimum, Linn. Salsola altissima, Lin. Schanginia altissima, C. A. Mey. In arvensis salsuginosis.

45. *bis* Schanginia baccata, Moq. Chenopodium aegyptiacum, Hassely. Abundantius in arenosis insularum.

Amarantaceae.

46. Amarantus albus Lin.
ad Buiam in cultis.

Urticaceae.

47. Forskohlea tenacissima Linn.

48. Ficus Sycomorus (Harsi-lee).
Haec arbor maxima et utilis forsitan introducta in colonia.

Nyctagineae.

49. Boerhavia africana Lour? an Boerhavia dichotoma.
Nascitur in palmetis prope domum Giulietti, post pluvias.

Euphorbiaceae.

50. Euphorbia Chamaesyce Lin.
Nascitur in Merghèblain, in arenosis.

MONOCOTYLEDONEAE

Gramineae

51. Rottböllia hirsuta, Vahl, symb. I, pag. 11.; Delile, fl. aeg. tab. XIV. fig. I. Triticum aegylopoides Forsk. descr. pag. 26; Steudel (E. G.) syn. pl. gr. pag. 361 n. 12.
In agrostographia aegyptiaca Figari et De Notaris de hac specie nullum verbum. Pabulo inservire potest.

52. Dactylis mucronata Steudel (E. G.) syn. gram. pag. n. 21.
Festuca mucronata Forsk. fl. aeg. arab. p. 22; Festuca pungens Vahl, symb. I. pag. 10 tab. 2ª.
Nascitur in Merghebla, ubi pabulum copiosissimum praebet bobus. Dicta in dàncali *arcà*.

53. Dactylis repens Desf. fl. atl. tom. I. pag. 79 tab. 15; Steudel (E. G.) syn. gram. pag. 298 sub. n. 16. Calotheca niliaca. Herbr. aeg. un. it. m. 587.
Propria haec planta Africae borealis, Graeciae, Caucas, Sicil. (Guss.).
Nascitur in arenosis salsis ad Buiam.
In memoria cit. Figari et De Notaris nullum verbum de hac planta.

54. Dactylis brevifolia Koenig in Willd. sp. I. pag. 410; Steud. sin. gramin. p. 298. sub. n. 17. Aeluropus brevifolius Nees; Calotheca niliaca Herbr. arab. un. it. n. 204 non 587 Hrbr. aeg. Haec species habet culmum indutum foliis usque ad

inflorescentiam contra praecedentem quae habet culmum nudum. In nostro specimine rami steriles sunt arcuatim reflexi, unde nomen aptius esset Dactylis recurvata.

55. Cynodon glabratus Steud. (E. G.) gram. pag. 212 n. 2. Cynodon Dactylon Hrbr. un. it. in Arab. n. 311. Hrbr. nub. 421 [1]).
Nascitur ad Buiam ubi supplet gramen nostrum dictum Cynodontem Dactylon.

56. Panicum Petiverii Trin, ic XV t. 176 (monente amico Hakel botanico St. Pelten). Gramen elatius pabulo perenni inserviendum. Nascitur ad Caput Luma (Capo Luma) prope Assab.

Cyperaceae.

57. Cyperus flavescens L., an C. conglomeratus, Rottb., qui cum nostro Cypero convenit, quamquam sit hic elatior et umbella composita.
Nascitur in depressis post pluvias.

Palmae.

58. Phoenix Dactylifera, L. an Phoenix sylvestris.
Sylvestris Roxb. in depressis simul cum Hyphaene.

59. Hyphaene Cucifera Pers. Cucifera thebaica Desf; Douma thebaica Duham.
Arbor quae sponte venit in sinu Assab et colitiur propter fructus edules.

Najadeae.

60. Potamogeton fluitans, L.
In aquis lente fluentibus, in aestuariis, in Harse specimina quae possideo ex Assab floribus ac fructibus carent.

ACOTYLEDONEAE

Fungi.

61. Battarrea phalloides Pers.
Haec species cosmopolita de qua ill. Cesati scripsit in « Rendiconto della R. Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli, Marzo 1873 ».
In loco paludoso ad pedes arborum, semel invenit Cl. Licata.

[1]) Notandum Steudelius dicit hanc speciem annuam ut C. Dactylon: dum evidenter perennes sunt.

Alghe della Baja di Assab

RACCOLTE DAL VIAGGIATORE PROF. G. B. LICATA

nel 1883.

Tra le piante che l'Egregio Professor Giovan Battista Licata recava testè da Assab, figurano alcune specie di alghe marine. Avendo avuto la opportunità di studiarle ne ho esteso un elenco, che rappresenta un picciol contributo per la conoscenza della flora marina assabese, dopo il bel lavoro del Piccone non ha molto pubblicato nel Nuovo Giornale Botanico Italiano[1]. E poichè mi prese vaghezza di conoscere alcun chè delle forme di Diatomee marine di quelle regioni (sul quale argomento, per quanto io sappia, pochissime note si hanno) cercai di trar partito da alcuni pezzettini di alghe, quasi irriconoscibili, che si trovavano nel materiale preso a studiare. Da queste e da lavande di altri esemplari ottenni infatti del materiale, che mi fornì diverse specie di diatomee, le quali figurano nel presente catalogo. Una preparazione contiene specie marine e fu ricavata dalle alghe; un'altra, risultato di lavande fatte su di una *Chara*, racchiude alcune specie di diatomee proprie delle acque salmastre. F. Balsamo

I.

Diatomaceae

1. *Amphora marina*. Sm. Rabh. Fl. Eur. I, p. 95. — Fortmorel. Diat. Ceyl. 18. — Van Heurck. Syn. pl. I, fig. 16. — A. dubia Greg.? Diat. of the Clyde, p. 42.
   Osservazione. — È molto vicina all'*Amph. affinis*. L'ho trovata nel deposito delle alghe marine (Isola Sanabùr) rappresentata da scarsissimi individui.
2. *Cocconeis diaphana*. Sm. Brit. Diat. I, p. 22, pl. 30, fig. 254. — Rabh. Eur. I, 100. Fortm. Ceyl. p. 1.
3. *Cocconeis Scutellum*. Ehr. Infus. 194, tav. 14, fig. 8. — Kutz. Bacill. pag. 73, tav. 5, fig. VI, 3-6. — Rabh. l. c. 101. — Van Heurck. l. c. pl. XXIX, fig. 1-2. — Fortm. Ceyl. p. 1.
   Osservazione. — Rinvenuto soltanto qualche frustulo nella preparazione.
4. *Cocconeis Placentula*. Ehr. Inf., pag. 194. — Rabh. Eur. I, 99. — Kutz. Bacill., tav. 28, fig. 13. — Fortm. Ceyl. 10, tav. 1, fig. 4.
   Osservazione. — Questa specie rinviensi non raramente tra le altre nella preparazione. Sebbene creduta esclusivamente di acqua dolce, trovasi pure tra le specie marine, come nota anche il Fortmorel, l. c. Le forme *euglypta* e *striolata* possono riportarsi alla specie tipica.
5. *Epithemia gibba* (Ehr.). Ktz. Bacill. 35, tav. 4, fig. XXII. — Rabenh. Eur. I, 64. Van Heurck. Syn. pl. XXXII, fig. 1-2.
   Eunotia gibba Ehr. — Cymbella incrassata Bréb.
   Sulla *Chara*, allo sbocco dell'Harsi-lee.

[1]) Piccone A. *Contribuzioni all'Algologia eritrea*. Nuovo Gior. Bot. Ital. vol XVI. (1884) pag. 281-332 con 3 tav.

6. *Cymbella affinis*. Ktz. Bacill. 80, tav. 6, fig. 15.—Rabh. Süsw. Diat. tav. VII, fig. 13.—Ejusd. Eur. I., 81.—Van Heurck. Syn. pl. II, fig. 19.—Cymbella ventricosa, Bréb. Cons.

7. *Cymbella leptoceras* (Ehr.). Rabh. Diat., tav. VII, fig. 14, *a*.—Rabh. Eur. I, 81.—Van Heurck. Syn. pl. II, fig. 18.—Cocconema leptoceras Ehr.—Cymbophora maculata Bréb. Colla precedente sulla *Chara*.

8. *Navicula dydima* Ehr. Ktz. Bac. tav. 28, fig. 75, e tav. 4, fig. 7 (non 17 ut in Fortm. citatur).—Rabh. Eur. 203.—Fortm. Ceyl. 26.—Jan. et Rabh. Beitr., p. 10, tav. 4, fig. 14.

Dall'isola Sanabùr.

Osservazione. — La striazione, a luce obliqua e coll'oggettivo 7 Prazm., è assai evidente e spiccatamente granulare.

9. *Stauroneis pulchella* Sm. Brit. Diat. I, p. 61, tav. 19, p. 194.—Rabh. Eur. I, 251. Jan. in Rabh. Beitr. p. 12, tav. 4, fig. 5.—Fortm. Ceyl. p. 36.

Nel deposito dall'isola Sanabùr.

10. *Pleurosigma sp.?*

Osservazione. — Un pezzettino di frustulo intraveduto nella preparazione, non mi ha permesso di definire con certezza la specie. Per la striazione e per l'inclinazione del rafe mediano credo potersi riferire al *Pl. formosum* Sm.

11. *Nitzschia macilenta* Greg. Micr. Journ. 1859, p. 83, tav. 6, fig. 89.—Rabh. Eur. p. 155.—Fortm. Ceyl. p. 40.—Van Heurck. Syn. pl. 64, fig. 6-7.

Rara nel deposito dell'isola Sanabùr.

12. *Nitzschia Sigma* (Kg.) Sm. Brit. Diat. I, 39, tav. 13, fig. 108.—Rabh. Eur. I, 156.—Fortm. Ceyl.—40. Synedra Sygma.—Colla precedente.

13. *Campylodiscus sp.?*

Osservazione. — È impossibile definire la specie, trovandosi appena un frammento di frustulo, che non mostra l'area centrale.

14. *Synedra Acus*. Ktz. Bacill. 68, tav. 15, fig. 7.—Rabh. Eur. I, 136. Sulla *Chara*.

15. *Synedra splendens*, var. *e interrupta* (Awd), Rabh. Eur., l. c. 134.—Rabh. Alg. Eur. n. 403.

16. *Synedra Ulna* Ehr. Rabh. l. c. 133.—Bacillaria Ulna Nitzch. Colla precedente sulla *Chara*.

17. *Biddulphia pulchella* Gray. Sm. Brit. Diat. II, 48, tav. 44, 46, fig. 321.—Mont. Fl. Alger. 196.—Rabh. Eur. I, 310.—Fortm. Ceyl. 56.—Van Heurck. Syn. pl. XCVII.

Rarissima nel deposito dell'isola Sanabur.

18. *Biddulphia aurita* Bréb. Cons., p. 12.—Sm. l. c., tav. 45, fig. 319.—Rabh. Eur. 311.—Fortm. Ceyl. 57.—Van Heurck. Syn. pl. XCVIII, fig. 9.—Denticella aurita Ehr.

19. *Biddulphia Tuomeyi* Pritch. Roper. Trans. of. Roy. Micr. Soc. 1859, p. 8, pl. 1, fig. 1-2.—Fortm. Ceyl. 57.—Van Heurck. Syn. pl. 98, fig. 3.—Denticella tridens Ehr.—Zygoceros Tuomeyi Bayley.

Osservazione. — Di tutte e tre le Biddulfie sono appena reperibili alcuni esemplari; dell'ultima ne ho osservato un solo individuo, nel deposito dell'isola Sanabùr.

II.

Chlorosporeae

20. *Ulva Lactuca*. Le Jol. Alg. Cherb., pag. 38. — Picc. l. c. p. 292. Ulva Lactuca L. Sp. plant. II, 1163 (ex p.).—Phycoseris gigantea Kg. (ex p.). Isola Sanabùr.

21 *Ulva reticulata* Forsk. Fl. Aegypt. Arab., p. 187. — Decaisne Pl. Arab., p. 117. — Zanard. Phyc. maris rubri (1858), p. 86. — Picc. l. c. p. 292. Phycoseris reticulata Kg. Sp. Alg. p. 478. Isola Sanabùr.

Osservazione. — Ho potuto confermare la diagnosi fatta di questa specie, su di un esemplare raccolto dal Martens nel Mar Rosso, e che esiste nello Erbario del R. Orto Botanico.

22. *Cladophora Forskalii*.—Ktg. Sp. Alg. 416.—Zanard. Phyc. mar. rubr. 87. Conferva Forskalii.

Osservazione. — La diagnosi di questa specie è data con riserva, non avendola potuto identificare con esemplari autentici.

III.

Phaeozoosporeae

23. *Asperococcus clathratus*. J. Ag. Sp. Alg. I, p. 75. — Figari et De Not. Algolog. del Mar Rosso, p. 33. — Zanard. Phyc. mar. rubri, p. 41. Harv. Nereis boreali-americana I, p. 120, tav. 9, fig. 2. A. — Encoelium clathratum Ag. Sp. Alg. II, 413. Hydroclathrus cancellatus Bory Dict.—Mont. Syll. 398. — Fl. Alger. p. 35, 36. Ktz. Tab. Phyc. IX, t. 52, p. II.

Capo Caribàl. Rigettato dal mare.

Osservazione. — Di questa specie, frequente nel Mar Rosso, la figura che ho potuto riscontrare dall'Harvey, non ritrae perfettamente il colore e la grandezza delle maglie, come quella del Kutzing. Un esemplare del Martens, che esiste nell'erbario del nostro Orto Botanico, toglie ogni dubbio sulla diagnosi di questa specie.

IV.

Fucaceae

24. *Sargassum latifolium*. J. Ag. Sp. Alg. I, 336.—Figari et De Ntr. Algol. Mar Rosso, p. 18. — Zanard. Phyc. maris rubri, p. 32. Picc. l. c. p. 310.

Isola Omm-el-Bàccar.

25. *Sargassum subrepandum?* (Forsk) J. Ag. Sp. Arg. I, 319. — Ktz. Tab. Phyc. XI, t. 2. fig. I—Picc. l. c. pag. 301.

Isola Omm-el Bàccar. Oss. L'esemplare insufficiente non permette una diagnosi certa.

26. *Sargassum....*

Osservazione.—Dalla sola descrizione ed ispezione di figure, riportate negli au-

tori, non è facile determinare le specie di questo intricatissimo genere, senza ricorrere ad esemplari autentici. Mancandomi l'opportuno materiale di riscontro, non posso definire con certezza questa forma, che per i caratteri sta tra i *Sarg. virgatum, Acinaria,* e *Boveanum.*

27. *Turbinaria vulgaris B. decurrens.* J. Ag. Sp. Alg. I, 267 — Turbinaria decurrens Bory. Picc. l. c. p. 300. — Fucus Turbinatus Turn. Zanard. Phyc. Mar. rubr. pag. 34.

Isola Sanabùr. Rigettata dal mare.

V.

Dictyoteae

28. *Stoechospermum marginatum.* Ag. Syst., pag. 266.—J. Ag. Sp. Alg. I, 99.—Zanard. Phyc. mar. rubr. p. 39.—Dictyota marginata. Decaisne Arab. pag. 138 (exl. syn. monente J. Ag.).

Isola Sanabùr.

29. *Padina Pavonia* (L.) Gaill. Dict. Picc. l. c. p. 298. — J. Ag. Sp. Alg. I, 113 — Figari et De Ntr. Alg. Mar Rosso, pag. 26.— Zanard. Phyc. mar. rubr. 36. — Ulva Pavonia, L., Zonaria Pavonia, Ktz.

Isola Sanabùr.

VI.

Corallineae

30. *Melobesia membranacea* Esp. Zooph., tav. 12, pag. 1-4.—J. Ag. Sp. Alg. II, 512. Hauck in Rabh. Krypt. Flora, p. 265, fig. 104. Picc. l. c. p. 318. — Corallina membranacea Esp.

Sullo *Stoechospermum marginatum.*

31. *Melobesia farinosa* Lamour., Polyp. 315, tav. 12, fig. 3.—J. Ag. Sp. Alg. pag. 512.— Hauck in Rabh. l. c., p. 263.— Zanard. Phyc. mar. rubr. 44. Picc. l. c. p. 318.— Melobesia granulata, Menegh.

Sulle foglie della *Zostera oceanica.*

VII.

Characeae

32. *Chara vulgaris*, L., *forma?*

Sbocco dell'Harsi-Lee.

Osservazione. — Lo stato dell'esemplare, mancante di fruttificazione, ed in frantumi, nonchè la deficienza di materiale di riscontro, non mi permettono di determinare esattamente questa specie. Differisce alcun poco dalla *Chara vulg.* (L.), A. Br. per l'abito e per la forma dei rami dei verticilli.

Finita di stampare il dì 6 febbrajo 1885

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIE ED OSSERVAZIONI SULLA GEO-FAUNA SARDA

MEMORIA QUARTA

del Socio Ordinario ACHILLE COSTA

Letta nell'Adunanza del dì 13 Dicembre 1884

Non volendo desistere dallo studio della Geo-Fauna Sarda erami proposto nella decorsa estate recarmi ancora per una quarta volta in Sardegna a fine di esplorarne qualche altra parte non visitata ne' viaggi precedenti. Mentre però tutto teneva pronto per la partenza, fissata pe' primi giorni di luglio, la manifestazione di casi di cholera, già esistente a Tolone e Marsiglia, in taluni paesi della costa mediterranea d'Italia, spinse ragionevolmente gli abitanti delle due maggiori nostre isole, Sicilia e Sardegna, a reclamare dal Governo disposizioni energiche valevoli a garentirli dalla importazione del morbo. Di qui la disposizione di una quarantena di dieci giorni, che per coloro che avessero voluto recarsi alla seconda delle enunciate isole passar si dovevano presso l'isola di S. Stefano. Siffatta misura proclamata tre giorni innanzi quello da me fissato per la partenza turbò evidentemente il mio progetto. E ciò non tanto pel noioso disagio cui avrei dovuto sottostare; chè, l'ansietà di appagare il desiderio delle nuove ricerche mi avrebbe forse fatto subire il sacrificio. Quello che principalmente mi fece senza alcuna esitanza deporre diffinitivamente il pensiere del viaggio fu il convincimento acquistato per propria esperienza che in tempi di guerre interne o vicine, come in quelli di ricorrenze epidemiche di cholera, sia un esporsi ad indubbio pericolo il viaggiare da naturalista esploratore, a causa della sinistra interpretazione che dal volgo ignorante può darsi allo scopo di quelle innocenti esplorazioni [1]).

[1]) Potendo riuscire vantaggioso a' naturalisti esploratori, stimo non inutile il riferire brevemente i fatti pe' quali ho detto aver acquistato *per propria esperienza* il convincimento che in tempi di guerre interne o vicine, come in quelli di epidemia colerica è pericoloso eseguire ricerche.

Nel 1859 percorsi buona parte delle Calabrie, e fra le altre volli visitare le Sile, che innanzi quell'anno nessun Naturalista aveva ancora perlustrate. Onde poter rimanere alcuni giorni nel vastissimo altipiano che trovasi al disopra de' monti mi provvidi in Cosenza di lettere di diversi proprietarii che tengono lì sopra le loro terre e case per poter avere ospitalità dai loro amministratori. Tra le altre ne ebbi una da' signori Lupinacci. In fatti, rimasi tre giorni nella loro tenuta. Ritornato in Cosenza fui a ringraziare que' signori per l'ospitalità procuratami. Ed allora ebbi ad apprendere che per somma fortuna avevo campata la vita. Que' villani, non potendo persuadersi che uno si esponesse a recarsi sulle Sile allora infestate da una comitiva di briganti sol per raccogliere insetti, poichè in quell'epoca i francesi erano discesi in Italia per combattere con

Costretto per tali ragioni a rimanere in Napoli, pensai che senza deviare dal lavoro che da quattro anni mi occupa, avrei potuto ancora utilmente proseguirlo impiegando quel tempo, che doveva consagrare a far nuove raccolte, nello studio di tutto il materiale de' viaggi precedenti, che sia per la premura di pubblicare anno per anno i principali risultamenti ottenuti, sia per la mancanza di talune opere speciali era stato lasciato in dietro. In fatti, riscontrando le tre memorie già date alla luce si rileva quante cose vi siano rimaste o dubbie, o del tutto non definite. Ora un novello e più posato studio fatto di quel materiale mi ha messo nel caso di ben accertare parecchie delle specie dubbie e di determinare molte di quelle che giacevano non definite. Dal che è derivata una novella e non indifferente contribuzione alla Geo-Fauna Sarda, la quale forma il soggetto della presente memoria. Non debbo pertanto tacere che, oltre allo studio che direttamente ho potuto fare, anche questa volta mi sono stati di grande utilità gli schiarimenti avuti da varii distinti colleghi specialisti, quali sono il conte Baudi di Selve ed Edm. Reitter (Coleotteri); Dott. Gius. Kriechbaumer (Imen. Icneumonidei); Dott. Otto Schmiedeknecht (Imen. Apidei); prof. Rob. Latzel (Miriapodi); Eug. Simon (Araneidi); Dott. Ant. Berlese (Acaridei); Marchesa Paulucci (conchiglie).

Mancando in questa memoria la relazione del viaggio, essa sarà divisa in due sole parti, la prima delle quali registrerà le specie da aggiungere a quelle già nominate nelle tre precedenti memorie, la seconda conterrà la descrizione delle specie che stimo nuove.

gl'italiani contro gli austriaci, concepiron l'idea ch'io fossi un emissario de' francesi, che sotto l'aspetto di Naturalista avessi per vero scopo quello di rilevare le posizioni strategiche. Per lo chè, non essendo in essi spenta l'avversione per i francesi, avevan deliberato fucilarmi. E lo avrebbero senz'altro eseguito se il fattore in capo non avesse pensato conveniente attingere prima dagli stessi padroni notizie precise sul mio conto. E non fu senza fatica che i signori Lupinacci potettero rassicurarlo sulla realità del mio scopo, ingiungendogli i massimi riguardi per me.

Nel 1866 vagava il cholera per le provincie napoletane. Ciò non ostante mi proposi fare un viaggio di esplorazioni nella parte littoranea della provincia di Terra d'Otranto. Capitato in Galatone, ove era allora un mio fratello, la combinazione volle che nel giorno stesso del mio arrivo si manifestasse un primo caso di cholera. Ciò bastò perchè nel piccolo paese si cominciassero a fare de' comenti sulla coincidenza dell'arrivo di uno sconosciuto con la manifestazione di un primo caso di cholera. Benchè tali comenti non mi fossero rimasti occulti, essendone stato informato dalla domestica che raccoglieva le voci della piazza, non ne feci alcun caso. Per varii giorni, in compagnia di mio fratello, eseguii peregrinazioni in luoghi più o meno distanti dal paese. In quello precedente alla mia definitiva partenza, avendo poche ore disponibili per la caccia, le passai percorrendo un viale a qualche chilometro dal paese, lungo il quale come in altri cresce una specie di Cicoria commestibile, della quale si fa molto uso da quegli abitanti. Mentre era così intento alla mia caccia passa un villano a cavallo con fucile, il quale nel vedermi si ferma, e con viso accigliato mi chiede lo scopo di quelle mie operazioni. Avendo io compreso ben presto a che tendessero quelle interrogazioni, cercai in bei modi accontentarlo; ma non ne rimase soddisfatto. Chiamò contadini dei vicini poderi per sapere se mi conoscessero, e taluni di questi lo assicurarono del vero ed innocente scopo di quelle mie indagini. Neppure con ciò si mostrò convinto; nondimeno riprese il suo cammino, lasciandomi in pace. Il dì seguente ripartii per Napoli. Poche ore dopo il mio arrivo una lettera di mio fratello mi comunicava che era *vivo per miracolo*. Quel villano, dopo avermi lasciato, si appiattò dietro una siepe lungo la via che doveva battere per tornare al paese, ed al mio passaggio due volte cercò di tirarmi, ma tutte le due volte il fucile non prese fuoco!

PARTE PRIMA

Elenco delle specie da aggiungere

INSETTI

Coleotteri.

Notiophilus biguttatus, Fab. — Rinvenuto nei boschi delle vicinanze di Tempio: giugno.

Ophonus complanatus, Dej. — Lo abbiamo raccolto nelle adiacenze di Alghero nel settembre 1881.

Harpalus semipunctatus, Dej. — Raccolto presso Oristano e sul monte Limbara: giugno.

Stenolophus discophorus, Fisch. — Trovato a Scala di Giocca: agosto.

Acupalpus notatus, Muls. — Raccolto nelle vicinanze di Muravera in aprile 1882: poco frequente.

Orthomus Varini, Gaut. — Specie finora esclusiva della Sardegna: trovata non rara nelle adiacenze di Cagliari in aprile 1882.

Amara dalmatina, Dej. (Amara...? mem.ª 2ª). Specie assai poco diffusa. Nell' aprile 1882 l'abbiam raccolta presso Muravera. Nel viaggio del 1883 non ne abbiamo incontrato alcun individuo.

Pristonychus terricola, Herbs. — Incontrato in varie parti dell'isola, fin presso le falde del Gennargento.

Tachyta fulvicollis, Dej — Specie non ancora segnata della Sardegna: trovata presso le sponde del Tirso vicino Oristano, poco frequente.

Aleochara bisignata, Erich. — Raccolta sulle montagne di Limbara: giugno.

— **binotata**, Krtz. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari.

— **nitida**, Grav. — Trovata presso le sponde dello stagno di Pilo.

Oxypoda ambigena, Fauv. — Specie descritta recentemente come propria della Sicilia. Rinvenuta nel Campidano di Oristano.

Quedius abietum, Kiesw. — Specie non ancora notata nè per la Sardegna, nè per l' Italia in generale [1]). Ne abbiamo rinvenuto un individuo nei boschi di Elci delle vicinanze di Tempio, nel settembre 1881.

Ocypus ater, Grav. — Neppure questa specie trovavasi segnata tra le abitatrici della Sardegna. L'abbiamo rinvenuta presso Oristano, nel settembre 1881.

Xantholinus graecus, Krtz. — Specie non ancora notata come inquilina della Sardegna. Ne abbiamo rinvenuto un individuo sulle montagne di Desulo.

Lathrobium lusitanicum, Grav. — Specie abbastanza rara: l' abbiam rinvenuta una sola volta presso la stazione di Chilivani nel settembre 1881.

Trogophloeus memnonius, Er. — Raccolto nelle adiacenze di Decimoputzu, in prossimità di un pantano.

— **nitidus**, Baud. — Specie non ancora segnata inquilina della Sardegna. Trovata con la precedente.

Xestobium tessellatum, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio in maggio 1882.

Rhizophagus dispar, Payk. — Ne abbiamo rinvenuto due individui sotto le cortecce di vecchie Elci sulle montagne del Limbara, nel giugno 1881.

Dichillus pumilus, Sol. — Raccolto ne' luoghi sabbiosi delle adiacenze di Oristano.

Scaurus striatus, var. sardous. n. — Ne abbiamo raccolto un individuo presso Oristano nel settembre 1881, ed un altro nel Campidano di Cagliari nel giugno 1882.

Cataphronetis brunnea, Luc. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari nel luglio 1883.

Abdera quadrifasciata, Curt. — Rinvenuta sulle montagne del Limbara sotto le cor-

[1]) Nel Catalogo de' Coleotteri Italiani del Bertolini dicesi trovata in Trieste.

*

tecce di vecchie Elci insieme al *Rhizophagus dispar:* rara.

Scraptia ophthalmica, Muls.—Specie non prima trovata in Sardegna: raccolta sulle montagne di Desulo in luglio: rara.

Xylophilus atomus, nob.—Rinvenuto nel Campidano di Oristano.

Mordellistena pumila, Gyll.—Raccolta presso Cagliari ed Oristano: giugno, luglio.

Anaspis suturalis, Em.—Raccolta nelle adiacenze di Sassari: maggio.

Zonitis quadripunctata, Fab.—Rinvenuta nel Campidano di Cagliari: luglio [1]).

Brachycerus barbarus, Lin.—Raccolto presso Tempio nel settembre 1881 e sul Limbara nel giugno 1882.

Apion nigritarse, Kir.—Rinvenuto sulle montagne di Desulo: luglio.

— **curtulum**, Desbr.—Raccolto ne'medesimi luoghi che il precedente.

Peritelus sardous, nob.—Trovato nelle adiacenze del Gennargento e nella valle di Correboi: agosto.

Sitones ophthalmicus, Desbr.—Raccolto sulle montagne di Desulo.

— **puncticollis**, Steph.—Raccolto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **gemellatus**, Gyll.—Trovato sulle montagne di Aritzo, di Aggius, nella valle di Correboi: giugno, luglio, agosto. Non ancora segnato di Sardegna.

— **lividipes**, Fahrs.—Specie diffusa per parecchie parti dell'isola.

Otiorhynchus Lefeburei, Schnr. (Otior....? mem.ª 2ª).—Raccolto presso Iglesias in Maggio, Tempio in settembre.

— **tomentosus**, Gyll.—Rinvenuto nelle spiagge sabbiose di Alghero presso le radici delle piante nel settembre 1881.

Phytonomus pastinacae, Ross.—Specie poco facile a trovarsi: raccolta nelle vicinanze di Oliena.

— **trilineatus**, Mars.—Trovata nella valle di Correboi.

Dorytomus villosulus, Gyll.—Raccolto presso Domusnovas: maggio.

Larinus flavescens, Germ. (Larinus.....? mem.ª 2ª)—Trovato presso la spiaggia di Alghero.

Lixus sanguineus, Ross.—Raccolto nelle adiacenze di Sassari.

[1]) Ne abbiamo ancora un individuo ricevuto dal sig. Lostia, che ha pure raccolto questa specie presso Cagliari.

Lixus nanus, Bob.—Raccolto nel Campidano di Cagliari e nelle vicinanze di Bosa: luglio, agosto.

— **filiformis**, Fab.—Diffuso per molte parti dell'isola.

Cleonus cunctus? Schnr. (Cleonus.....? mem.ª 2ª).—Raccolto sulle vie di campagna presso Sassari.

Sibinia primita, Herbs.—Raccolta nelle praterie presso lo stagno di Cabras nel settembre 1881.

Tychius siculus, Boh.—Trovato nelle vicinanze di Oliena in giugno 1882.

— **pusillus**, Germ.—Specie non ancora registrata nè della Sardegna, nè dell'Italia intera: rinvenuta nelle vicinanze di Macomer.

Thamnurgus Kaltenbachi, Bach.—Specie non trovata prima nè in Sardegna, nè nel resto d'Italia; rinvenuta presso Oristano: maggio.

Clytus arvicola, Oliv.—Raccolto nella valle di Correboi: agosto.

Colaspidea metallica, Ross. (*aeruginea*, Fab.).—Raccolta nelle adiacenze di Tempio in settembre 1881.

Stylosomus minutissimus, Germ.—Rinvenuto abbondante sulle montagne di Desulo: luglio.

Phaedon cochleariae, Fab.—Sebbene sia specie in generale non rara, pure non trovavasi segnata della Sardegna. L'abbiamo raccolta nelle vicinanze di Cagliari: giugno.

Chrysomela Schottii, Suffr.—Raccolta presso Tempio in settembre 1881 ed Oristano in maggio 1882.

Prasocuris vicina, Luc.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo assai piccolo presso Sassari in maggio 1882.

Phylotreta variipennis, Boï.—Raccolta nelle adiacenze di Cagliari.

— **cruciferae**, Goez, (*obscurella* Ill.).—Rinvenuta sulle montagne attigue al Gennargento nel settembre 1881.

Aphthona euforbiae, Fab.—Raccolta nelle adiacenze di Sassari: maggio.

Psylliodes circumdata, Redt.—Specie non ancora notata di Sardegna: trovata nella contrada Orri.

Thyamis tabida, Fab.—Trovata in diversi luoghi: non rara.

— **brunnea**, Duft.—Rinvenuta nelle adiacenze di Tempio in giugno, nella valle di Correboi in agosto.

Thyamis aeruginosa, Foud.—Raccolta presso Iglesias ed Oristano.

— **subterlucens**, Foud. — Diffusa per varii luoghi: raccolta sul Limbara, presso Desulo, Oristano, Terranova.

Ortotteri.

Pterolepis umbilicata, nob. — Raccolta presso la vetta del Gennargento in settembre 1881.

Nevrotteri.

Lestes viridis, Fonsc. — Raccolto nelle adiacenze di Laconi.

Agrion coerulescens, Fonsc. — Sembra meno diffuso delle altre specie congeneri: l'abbiamo trovato soltanto lungo il fiume della Valle Canonica presso Iglesias.

Chrysopa septempunctata, Wesm. (Chrysopa.....? mem.ª 3ª). — Specie poco diffusa: rinvenuta a Scala di Giocca in agosto.

Hydropsyche fulvipes, Curt. — Raccolta presso i rivoli delle montagne di Desulo: luglio.

Corrodenti.

Graphopsochus cruciatus, Lin. (*quadripunctatus*, Fab.). — Raccolto nelle vicinanze di Oristano: agosto.

Coecilius abiectus, nob. — Raccolto ne' boschi della valle di Correboi; agosto.

— **flavipennis**, nob. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.

Psochus funerulus, nob. — Rinvenuto nella medesima località del precedente.

Cyrtopsochus (n. g.) **irroratus**, nob. — Ne abbiamo un individuo, che conserviamo freschissimo in alcool, raccolto sulle montagne di Desulo: luglio.

Thorectes divinatorius, Mull. (*pulsatorius*, Lin). — Registriamo questa specie, sebbene comunissima, non solo per completare la serie, ma ancora per notare un fatto speciale. Nella estesissima collezione entomologica delle provincie napoletane, che data già oltre quaranta anni, e nella collezione entomologica generale iniziata nel Museo zoologico della Università nel 1860, non mai abbiam trovato uno Psoco. Invece, nella collezione sarda, che teniamo a parte, lo Psoco vi è abbondantissimo e si moltiplica incessantemente, non ostante la nostra continua opera di distruzione. Ed esso è venuto dalla stessa Sardegna, essendo sempre apparso nelle raccolte mentre eravamo tuttavia nell'isola.

Imenotteri.

Tachytes obsoleta, Ross. — Raccolta nelle campagne di Iglesias, Oristano e Fordongianus: agosto, settembre.

Crabro striatus, Lep.—Rinvenuto presso Monastir in luglio 1883: poco frequente.

Pompilus haematopus, Lep. — Ne abbiamo rinvenuto soltanto un individuo nella campagna di Tissi: agosto.

— **melanarius**, V. d. Lind. — Raccolto nel Campidano di Oristano in settembre del 1881.

— **concinnus**, Dahlb. — Ne abbiamo un individuo solo raccolto nelle montagne attigue al Gennargento in settembre 1881.

Pseudomutilla (n. g.) **sardiniensis**, nob. ♀. —Ne abbiamo rinvenuto un individuo nell' isola dell'Asinara in maggio 1882.

Mutilla Spinolae, Lep. (Mutilla....? *Spinolae* aff. mem.ª 2ª). — Macomer, Cabras, spiaggia dello Stagno di Pilo.

Colletes marginata, Lin. — Diffusa in diverse contrade (Cagliari, Oristano, Tempio): primavera ed està.

Hylaeus rhodius, Lep. — Specie che pare non ancora segnata d'Italia. L'abbiamo raccolta nelle adiacenze di San Lussurgio in maggio 1882: rara.

— **plumicornis**, nob.—Trovato piuttosto abbondante nelle adiacenze di Oristano in agosto 1883.

— **cornutus**, Smith. — Ne abbiamo raccolta una femina, con la specie precedente.

— **strigulosus**, nob. — Raccolto nelle adiacenze di Tempio in giugno 1882.

— **annularis**, Kirb. — Raccolto nelle adiacenze di Fonni in settembre 1881.

Sphecodes hispanicus, Wesm. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo tipico nelle vicinanze di Oristano in maggio 1883.

Halictus leucozonius, Kirb. — Diffuso per diverse parti dell' isola (raccolto presso Cagliari, Oristano, Fonni): aprile ed agosto.

— **lineolatus**, Lep. — Frequente in diversi

luoghi (Samassi, Laconi, Meana, Fonni, Nuoro): luglio, agosto.

Halictus interruptus, Panz.—Raccolto nelle campagne di Samassi e di Nuoro: luglio, agosto.

— **tumulorum**, Lin. — Frequente in diversi luoghi (Cagliari, Oristano, Fordongianus): luglio, agosto.

— **longulus**, Smith. — Raccolto nelle adiacenze di Oschiri; luglio.

— **cilyndricus**, Fab. — Raccolto presso Iglesias ed Alghero in settembre: non raro.

— **clypearis**, Schk. — Raccolto nel Campidano di Oristano in agosto.

— **cariniventris**, Mor. — Specie descritta da Morawitz tra gl'Imenotteri del Turkestan, e posteriormente trovata in Ungheria. L'abbiamo raccolta in diversi luoghi (Cagliari, Oristano, Terranova); aprile, giugno, agosto.

Lucasius uniformis, Mor. — Specie non prima trovata in Italia: l'abbiamo rinvenuta soltanto presso Alghero in maggio 1882.

Andrena bucephala, Sm. — Specie molto diffusa: raccolta presso Cagliari, Decimoputzu, Oristano: da aprile ad agosto.

— **hipopolia**, (Per.) Schmkt.—Trovata non rara a Monte Narba in aprile 1882.

— **fulvago**, Chris. — Specie piuttosto rara; ne abbiamo un individuo femina raccolto presso Decimoputzu in aprile 1882.

— **nigroaenea**, Kirb.— Raccolta nel Campidano di Cagliari: luglio.

— **rufula**, (Per.) Schmkt. — Specie descritta da Schmiedcknecht sopra individui ricevuti da Perez da Bordeaux: noi l'abbiamo rinvenuta nella tenuta del Marchese di Nissa a Orri e presso Pula: aprile.

— **fulvicrus**, Kirb. — Raccolto nelle adiacenze di Tempio: giugno.

— **erythrocnemis**, Mor.—Specie conosciuta finora soltanto della Russia. Ne abbiamo rinvenuti due individui maschi presso San Lussurgio in maggio.

— **convexiuscula**, Kirb. var. [1]). — Raccolta nella montagna di Tonara: luglio.

Anthocopa papaveris, Latr. — Raccolta nel Campidano di Cagliari: luglio.

Osmia adunca, Panz. — Raccolta in diversi luoghi (Milis, San Lussurgio, Domusnovas, Alghero): maggio.

[1]) *femoribus posticis flavo fulvescentibus.*

Osmia vidua, Gerst. — Trovata non rara presso Cagliari e Monastir in luglio.

— **laterefasciata**. nob. (Osmia...? mem.ª 2ª). — Raccolta in diversi luoghi, sopratutto montuosi (San Lussurgio, Desulo, Nuoro); maggio, luglio, agosto.

— **crenulata**, Mor. — Specie trovatasi finora a Creta, Epiro, Corfù e Corsica. In Sardegna non è rara; l'abbiam trovata presso Oristano, S. Lussurgio, Oschiri, Desulo: maggio, giugno, luglio.

— **bihamata**, nob. — Raccolta nelle adiacenze di Siliqua e San Lussurgio: maggio.

Chalicodoma Lefeburei, Lep. (*luctuosa*, Dours.) — Trovata non rara nelle vicinanze di Milis: maggio.

Megachile ericetorum, Lep. — Raccolta presso Milis, Tissi, Alghero; maggio.

— **Schmiede cknechtii**, nob. — Diffusa per molte parti (Cagliari, Aritzo, Fonni, Orgosolo).

Trypetes truncorum, Lin.—Trovata non rara in diversi luoghi nella state.

Anthidium melanostomum, nob. ♂. — Ne abbiamo un individuo raccolto sulla montagna di Laconi in luglio 1883.

— **peregrinum**, nob. (Ant. . . . ? mem. 2). — Trovato abbondante presso Nuoro ed Oristano in agosto 1883.

Ceratina coerulea, Will. — Raccolta nelle dipendenze del Gennargento in settembre 1881.

Eucera oraniensis, Lap. — Raccolta presso Cagliari in aprile, presso Porto Torres e nell'isola dell'Asinara in maggio: non rara.

Pezomachus vagans, Grav.—Ne abbiamo rinvenuto un individuo ne' luoghi sabbiosi del Campidano di Oristano in settembre 1881.

Ichneumon zonalis, Grav. — Raccolto nelle adicenze di Porto Torres.

— **similatorius**, Fab. — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.

— **chionomus**, Wesm. — Raccolto nelle adiacenze di Porto Torres.

— **delicatellus**, nob. — Trovato nella foresta di Laconi in luglio.

Apaeleticus sardous, nob.—Ne abbiamo un individuo femina raccolto nelle adiacenze di Oristano: maggio.

— **Kriechbaumeri**, nob. — Ne abbiamo un individuo maschio rinvenuto nella valle di Correboi: agosto.

Oronotus thoracicus, nob. — Rinvenuto nelle campagne di Sassari, in maggio.

Ischnus ridibundus, nob. — Lo abbiamo trovato non raro presso il littorale di Alghero in settembre 1881 e presso Oristano in maggio 1882: la femina molto più rara del maschio.

— **proximus**, nob. — Ne abbiamo una femina raccolta nelle adiacenze di Fonni in agosto.

Cryptus fuliginipennis, nob. — Ne abbiamo un individuo femina rinvenuto presso le vette del Gennargento in contrada denominata *campu alàse*: luglio.

Bassus insignis, Grav. — Raccolto nelle adiacenze di Sassari.

Limneria crassicornis? Grav. — Raccolta nelle vicinanze di Porto Torres.

— **mutabilis**? Holmg. — Rinvenuta nelle vicinanze di Cagliari, nel mese di aprile.

Cremastus decoratus, Grav. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo femina presso Porto Torres in settembre.

Pimpla examinator, Fab. Grav. — Raccolta nella foresta di Laconi nel mese di luglio: poco frequente.

— **apricaria**, nob. — Specie diffusa per varii luoghi, sebbene ovunque poco frequente: raccolta presso Oristano, Laconi e Porto Torres: maggio, luglio, agosto.

— **cingulatella**, nob. — Rinvenuta presso lo stagno di Sassu ed a Porto Torres: agosto, settembre.

— **turionellae**, Lin. — Specie poco diffusa: rinvenuta sulle montagne di Laconi e di Desulo: luglio.

— **cercopithecus**, nob. — Ne abbiamo una femina raccolta presso Iglesias: settembre.

Lissonota bistrigata, Holmg. — Raccolta nelle adiacenze di Porto Torres in maggio.

— **pectoralis**, nob. — Rinvenuta nelle adiacenze di Alghero: settembre.

Tryphon luteomarginatus, Grav. — Raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio in maggio 1882.

Campoplex pugillator, Lin. — Raccolto insieme al precedente.

Meteorus splendens, nob. — Raccolto nelle adiacenze di Decimoputzu in aprile 1882.

— **scutatus**, nob. — Ne abbiamo un individuo femina raccolto presso Oristano in maggio 1882.

Dinocampus pallidipes, nob. — Raccolto ne' boschi delle adiacenze di Aritzo in luglio 1883.

Macrocentrus procerus, nob. — Ne abbiamo un individuo femina rinvenuto presso Simaxis sopra i fiori delle Tapsie in maggio 1882.

Microdus tumidulus, Nees. — Rinvenuto nelle campagne di Silìqua e Domusnovas in aprile 1882.

Microgaster ochrostigma, Wesm. — Raccolto nelle adiacenze di Fonni in luglio.

Bracon castrator, Fab. — Rinvenuto nelle adiacenze di Silìqua in aprile.

— **geniculator**, nob. — Raccolto nelle adiacenze di Nuoro in giugno.

— **humerator**, nob. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Domusnovas ed un altro a Simaxis, su' fiori delle Tapsie in maggio.

Rogas (Alejodes) reticulator, Nees (Alejodes . . . .? mem.ª 2ª). È la specie del genere più diffusa.

— **gasterator**, Jur. — Trovato in diversi luoghi (Cagliari, Oristano, Porto Torres): aprile ed agosto.

— **basalis**, nob. — Raccolto nelle adiacenze del Gennargento in settembre 1881.

— **testaceus**, Spin. — Rinvenuto ne' boschi di Aritzo, di Correboi e di Ploaghe: luglio, agosto.

Spathius erythrocephalus, Wesm. — Lo abbiam trovato una volta sola, sul Montenuovo presso Correboi: agosto.

Foenus rugidorsum, nob. Rinvenuto nella contrada Tissi in giugno ed agosto.

Emitteri.

Cydnus nigrita, Fab. — Rinvenuto nella spiaggia sabbiosa di Alghero alla radice delle piante: settembre.

Dalleria pusilla, H. Sch. — Raccolta nelle adiacenze di Tempio in luglio.

Platyplax inermis, Ramb. (*fuscatus* n. mem.ª 1ª). — Specie rara, descritta primamente da Rambur, dell' Andalusia.

Plociomerus calcaratus, Put. (*Plociom* . . . ? mem.ª 2ª). — Specie conosciuta prima di Algeria, ed in Europa trovata soltanto in Apt (Vaucluse). In Sardegna è frequente nelle vicinanze di Cagliari in giugno.

Rhiparochromus dilatatus, H. Sch. — Raccolto nella contrada Tissi presso Sassari in agosto.

Piezostethus galactinus, Fieb. — Rinvenuto nelle adiacenze di Decimoputzu: aprile.

Nabis lativentris, Boh. (*Nabis*... ? *mem.* 1ª). — Raccolto presso Cagliari, Inglesias, Tempio.

Oliarus signatus, Fieb. — Rinvenuto nella foresta di Laconi: luglio.

Issus coleoptratus, Fab. — Specie poco diffusa: l'abbiam trovata presso Tempio in settembre 1881.

Phlepsius intricatus, H. Sch. — Raccolto nelle vicinanze di Cagliari in settembre.

Lepidotteri.

Saturnia pyri,, Schiff. — Registriamo questa specie per sola formalità.

Brotolomia meticulosa, Lin. — Trovata nelle adiacenze di Sassari.

Mamestra Treitschkei, B. — Ne abbiamo raccolto un individuo entro la stanza dello albergo in Nuoro in settembre 1881.

Ligia Jourdanaria, Vill. — L'abbiam trovata abbondante nelle attinenze del Gennargento e sopratutto nella valle di Correboi in settembre 1881.

Macaria aestimaria, Hub. — Rinvenuta nelle adiacenze di Alghero, in settembre 1881.

Crambus delicatellus, Zell. — Raccolto nelle vicinanze di Terranova; luglio.

— **inquinatellus**, Schiff. — Rinvenuto nelle colline di Lanusei in settembre 1881.

— **geniculeus**, Hw. — Raccolto nel Campidano di Oristano in settembre 1881.

Omoeosoma binaevella, Hubn. — Raccolta nelle adiacenze di Sassari: giugno.

Ematheudes punctella, Trtz. — Rinvenuta nei dintorni di Tempio in giugno 1882.

Sciaphila wahlbomiana, Lin. var. *minorana*, H. Sch. — Raccolta presso Siliqua e nell'isola dell'Asinara: maggio.

— **longana**, Hw. var. *luridalbana*. H. Sch. — Trovata presso Simaxis e nell'isola dell'Asinara: maggio.

Grapholita mancipiana, Mn. — Specie propria della Corsica e della Sardegna: trovata presso Simaxis in maggio ed Oristano in settembre.

Cochylis contractana, Zell. — Raccolta presso Cabras in settembre 1881.

— **francillana**. Fab. — Rinvenuta nelle adiacenze di Cagliari: aprile.

Crocidosema plebejana, Zell. — Raccolta nel luogo stesso della precedente: aprile.

Aphelia lanceolana, Hubn. — Diffusa in diversi luoghi (Iglesias, Oristano, S. Lussurgio, isola dell'Asinaria): maggio.

Tinea panormitella, Mann. — Specie conosciuta solo della Sicilia; raccolta presso Muravera: aprile.

Plutella cruciferarum, Zell. — Raccolta presso Cagliari in aprile e San Lussurgio in maggio.

Gelechia plutelliformis, Staud. — Rinvenuta nelle adiacenze di Pula: aprile.

Bryotropha plebejella, Zell. — Raccolta nella contrada Orri: aprile.

Teleja fugitivella? Zell. — Rinvenuta nelle adiacenze di Terranova: luglio.

Stagmatophora pomposella, Zell. — Specie piuttosto rara: raccolta nella valle del Galogone in giugno.

Butalis chenopodiella, Hubn. — Raccolta nelle vicinanze di Alghero.

Cosmopteryx scribaïella? Zell. — Rinvenuta ne' dintorni di Oristano: maggio.

Ditteri.

Volucella zonaria, Poda (*bifasciata*, Scop.). Diffusa per varii luoghi, spesso insieme alla *inanis*.

Merodon trochantericus, nob. (Merodon...? mem.ª 3ª). — Ne abbiamo rinvenuto due individui sulle massime alture del Gennargento: luglio.

— **rubidiventris**, nob. — Raccolto nelle dipendenze del Gennargento in settembre 1881.

Eumerus argyreus, Lw. (*exilipes*, Rond.). — Diffuso per varie parti (Cagliari, Oristano, Gennargento).

— **crassitarsis**, nob. (Eum ... ? mem.ª 1ª). Raccolto nelle pianure di Samassi ed Oristano: luglio, agosto.

Phasia crassipennis, Fab. (Ph...? mem.ª 2ª). Rinvenuta in diversi luoghi (Simaxis, Aggius, Sassari); giugno, luglio.

Hyalomyia semicinerea, Mgn. — Raccolta presso Oristano in maggio ed Aggius in giugno.

Gymnosoma nitens, Mgn. — Trovata una volta sola, presso Iglesias in settembre.

Masicera scutellata, Rob. — Raccolta presso Sassari in agosto e Fonni in settembre.

Clytia helvola, Mgn. — Trovata una volta sola nelle adiacenze di Tempio in giugno.

Parhydra litoralis, Lw. — Abbondantissima nella foresta di Laconi e presso Aritzo, intorno le acque: luglio.

Sciara morio, Fab. — Diffusa per varie parti dell'isola.

MIRIAPODI

Scutigera coleoptrata, Lin. — Raccolta nelle adiacenze di Sassari: trovasi però in varii luoghi.

Lithobius lapidicola, Mein. — Rinvenuto nelle campagne di Cagliari e di Portoscuso.

— **audax**, Mein. — Raccolto in vicinanza di Aritzo, presso il Gennargento nella valle *Sa Minda* e presso Fonni.

— **impressus**, C. Koch. — Sembra sia la specie maggiormente diffusa nell'isola: l'abbiam trovata presso Cagliari, Pula, Meana, Oristano.

— **oligoporus**, n. sp. — Rinvenuto soltanto sulle montagne di Desulo, ove pare non sia molto raro.

Geophilus ferrugineus, C. Koch. — Raccolto nel Campidano di Cagliari e più abbondante presso Portoscuso.

— **sodalis**, Berg. Mein. — Specie piuttosto rara: rinvenuta soltanto nelle adiacenze di Fonni.

Stigmatogaster gracilis, Mein. — Diffuso per buona parte dell'isola, in luoghi piani del pari, che montuosi; raccolto sulle montagne di Desulo e del Limbara, presso Tempio, nella pianura di Portoscuso.

Chaetechelyne vesuviana, Newp. — (*Geophilus Canestrini*, Fed.). — Raccolta sulle montagne di Desulo.

Polydesmus complanatus, Lin. — Trovato nelle adiacenze di San Lussurgio, poco abbondante.

— **edentulus**, C. Koch. — Specie più diffusa della precedente: raccolta presso Iglesias, Pula, nell'isola dell'Asinara.

Julus fallax, Mein. — Ne abbiamo raccolto qualche individuo giovane presso San Lussurgio.

ARACNIDI

Araneidei

Aepicephalus brevidens, Auss. — Specie assai rara, conosciuta sinora soltanto della Sicilia. Ne abbiamo rinvenuto un individuo solo errante nelle campagne di Oristano in settembre 1881.

Synageles venator, Walck. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari.

Hyctia Canestrinii, Can. Pav. — Ne abbiamo un individuo raccolto nel Campidano di Oristano.

Menemerus semilimbatus, Walck. — Rinvenuto nelle montagne di Desulo.

Dendryphantes nidicolens, Walck. — Trovato non raro nelle adiacenze di Tempio.

Phileus chrysops, Poda. — Rinvenuto nelle campagne di S. Lussurgio e sulle montagne di Desulo.

Icius striatus, Walck. — Raccolto nelle adiacenze di Laconi.

Pellenes arcigerus, Walck. — Raccolto nel Campidano di Cagliari e sulle montagne di Desulo.

Yllenus univittatus, E. Sim. — Rinvenuto nelle adiacenze di Cagliari.

Heliophanus cupreus, Walck. — Raccolto nelle campagne di San Lussurgio.

— **recurvus**, E. Sim. — Elegante specie descritta sopra individui del Cantone di Valais nella Svizzera [1]). Ne abbiamo raccolto un individuo nel Campidano di Oristano

— **rufithorax**, E. Sim. — Il Simon segna soltanto la Corsica come patria di questa specie, ove la dice assai comune. In Sardegna è anche frequente e diffusa per molte parti.

Euophrys sulphurea, Lin. — Pare non ancora sia stata notata tra gli abitanti della Sardegna: rinvenuta nelle vicinanze di Oschiri.

Lycosa albofasciata, Br. (*sagittata* K.). — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari e di Iglesias.

— **pulverulenta**, Cl. (*cuneata*, K.) — Trovata nel Campidano di Cagliari e presso la cantoniera di *Campiomu*.

[1]) Ecco come sul proposito di questo araneideo si esprime il sig. E. Simon. «*tres interessant, car jusqu'ici je ne connaissais cette espèce que du Canton du Valais en Suisse.*

Lycosa leopardus, Sund. — Rinvenuta soltanto nelle adiacenze di Portoscuso.

— **personata**, L. K. — Raccolta nelle adiacenze di Pula e di Sassari.

— **ruricola**, De Geer. — Raccolta sulle montagne di Desulo: luglio.

Pirata piscatorius, Cl. — Raccolta nelle adiacenze di Iglesias.

— **piraticus**, Cl. — Rinvenuto nel Campidano di Oristano.

Micrommata virescens, Cl. — Trovata in diversi luoghi.

— **ligurina**, C. Koch. — Raccolta nelle adiacenze di San Lussurgio; maggio.

Xysticus acerbus, Thor. — Diffuso per varii luoghi: raccolto a Cagliari, Aritzo, Desulo.

— **caperatus**, E. Sim. — Raccolto su' monti del Limbara; giugno.

Philodromus bistigma, E. Sim. — Specie non ancora segnata della Sardegna: rinvenuta nelle campagne di Oristano.

— **glaucinus**, E. Sim. — Neppur questa specie troviamo notata come abitante la Sardegna; l'abbiamo raccolta nei dintorni di Iglesias.

— **lividus**, E. Sim. — Raccolto nelle adiacenze di Iglesias.

— **constellatus**, E. Sim. — Specie non prima trovata in Sardegna. Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Iglesias ed un altro su' monti Limbara.

Tibellus oblongus, Walck. — Diffuso per diversi luoghi: raccolto a Pula, Siliqua, Sassari.

Thanatus oblongiusculus, Luc. — Raccolto nelle vicinanze di Pula e Muravera: aprile.

Heriaeus hirsutus, Walck. — Raccolto sulle montagne di Desulo.

Epeira acalypha, Walck. (*genistae*, Hhn.). — Diffusa per varii luoghi: Iglesias, Laconi, Aritzo, Tempio.

— **patagiata**, Cl. (*dumetorum*, Hhn.). — Raccolta nel Campidano di Oristano.

— **ceropegia**, Walck. (*sclopetaria*, K.). — Rinvenuta in diversi luoghi.

— **dioidia**, Walck. — Raccolta presso Iglesias e Tempio.

— **Redii**, Scop. — Diffusa per buona parte dell'isola: raccolta presso Pula, Muravera, Oristano; aprile, maggio.

— **armida**, Sav. — Raccolta presso S. Lussurgio: rara.

— **gibbosa**, Walk. — Rinvenuta sulle montagne di Desulo e nelle vicinanze di Fonni; luglio, agosto.

Epeira dalmatica, Dls. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Singa sanguinea, C. Kock. — Rinvenuta nella pianura maremmosa di Portoscuso: settembre.

— **Simoniana**, nob. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Singa pygmaea, Sund. — Raccolta nel Campidano di Cagliari e nelle adiacenze di Oristano.

— **albovittata**, West. — Specie assai poco diffusa nell' isola: rinvenuta soltanto presso Oristano.

Zilla atrica, C. Koch. — Raccolta nelle adiacenze di Cagliari.

Pachygnatha De Geeri, Sund. — Rinvenuta a Scala di Gioca.

— **Clercki**, Sund. — Raccolta presso Oristano ed a Scala di Giocca.

Theridion pulchellum, Walck. — Specie poco diffusa; raccolta nelle adiacenze di Cagliari.

— **tinctum**, Walck. — Ne abbiamo rinvenuto un individuo presso Oristano.

— **aulicum**, C. Koch. — Raccolto ne' boschi delle vicinanze di Tempio.

— **vittatum**, C. Koch. — Rinvenuto nel Campidano di Oristano.

— **riparium**? var. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari.

— **bimaculatum**, Lin. var. *pellucidum*, E. Sim. — Raccolto su' monti del Limbara: giugno.

— **musivum**, E. Sim. — Raccolto nell'isola dell'Asinara: maggio.

Enoplognatha mandibularis, Luc. — Rinvenuta nelle adiacenze di Oristano.

— **nigromarginata**, Luc. — Rinvenuta presso Iglesias e su' monti Limbara.

Euryopis acuminata, Luc. — Raccolta sulla montagne di Desulo e presso lo Stagno di Sorso.

Teutana triangulosa, Walck. — Raccolta nelle adiacenze di Oristano.

Linyphia phrygiana, C. Koch. — Rinvenuta nelle vicinanze di Tempio e di Porto Torres.

— **triangularis**, Cl. — Sembra poco diffusa: l'abbiamo incontrata soltanto sulle montagne di Desulo.

— **frutetorum**, C. Koch. — Specie sparsa per buona parte dell'isola.

Gonatium nemorivaga, Cambr.—Anche questa specie sembra piuttosto rara: l'abbiam trovata soltanto sulle montagne di Desulo.

Pholcus phalangioides, Fuessl. — Raccolto nelle adiacenze di Pula: aprile.

Textrix coarctata, L. Duf.—Raccolta nel Campidano di Oristano: settembre.

Dictyna viridissima, Walck.—Raccolta sulle montagne di Desulo.

— **puella**, E. Sim. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Titanaeca albomaculata, Luc. — Rinvenuta nelle adiacenze di Terranova: giugno.

Prosthesima barbata, C. Kock. — Raccolta soltanto nelle adiacenze di Iglesias: nei primi giorni di settembre.

— **rustica**, L. Koch. — Raccolta nel Campidano di Cagliari.

Drassus severus, C. Koch. — Rinvenuto nelle pianure di Muravera.

Clubiona neglecta, Cambr. — Rinvenuta sulle montagne di Desulo: luglio.

Cheiracanthium Mildei, L. Koch. — Trovato presso le sponde del Tirso a Fordongianus e sulle montagne di Desulo: luglio, agosto.

— **Siedlidzi**, L. Koch.—Raccolto nelle adiacenze di San Lussurgio: maggio.

— **striolatum**, E. Sim. — Raccolto nel Campidano di Cagliari: luglio.

— **pelasgicum**, C. Koch.— Rinvenuto nelle adiacenze di Oristano; maggio.

Loxosceles rufescens, L. Duf. — Rinvenuto presso Cagliari e Pula: aprile.

Dysdera erythrina, Walck. — Trovata in diversi luoghi: non rara.

— **crocata**, C. Koch. — Raccolta nell'isola dell'Asinara.

Filistata testacea, Latr. — Raccolta nell'Isola dell'Asinara: maggio.

Opilionidei.

Phalangium opilio, Lin. — Diffuso in ogni parte dell'isola, in pianure ed in monti.

Dasylobus argentatus, Can. — Raccolto in diversi luoghi.

— **Gestroi**, Thor.—Specie finora propria della Sardegna e della Corsica: rinvenuta nell'Isola dell'Asinara.

Acantholophus horridus, Bosc.—Raccolto nel Campidano di Oristano.

Nemastoma argenteolunulatum, Can. — Specie poco frequente: rinvenuta presso Tempio ed a Scala di Giocca.

Dicranolasma latifrons, E. Sim. — Specie conosciuta sinora soltanto di Corsica. Ne abbiamo rinvenuto due individui nella foresta di Laconi, in luogo ombroso sotto le pietre.

Chernetidei.

Obisium muscorum, Leach.—Raccolto presso Iglesias e Sassari.

— **alpinum**, Kock.—Rinvenuto nelle montagne di Desulo.

Chelifer lamprosalis, L. Kock. — Raccolto nelle vicinanze di Bosa.

— **cimicoides**, Fab.—Rinvenuto in diversi luoghi.

Acaridei.

Nothrus theleproctus, Herm. — Trovato fra detriti vegetali presso Oristano.

Gamasus coleoptratorum, Lin.—Raccolto nelle adiacenze di Aritzo.

— . . . . ? — Rinvenuto nella contrada Tissi.

Rhyncholophus phalangioides, Herm.— Rinvenuto presso le sponde de' fiumi Temo a Bosa e Coghinas sotto Tempio.

— var. **acis**, Berl.—Trovato sotto i sassi su la montagna di Aritzo.

— **regalis**, Koch. — Specie nuova per l'Italia; rinvenuta presso Ozieri e Sassari.

— **siculus**, Can. — Raccolto presso il Tirso in Oristano.

— **electoralis**. — Rinvenuto nelle adiacenze di Aritzo.

— . . . ? — larve abbondanti attaccate allo *Stauronotus cruciatus*.

Erythraeus aequipes ? — Raccolto nelle adiacenze di Oristano.

Actineda vitis, Schr. — Rinvenuta fra detriti vegetali nelle campagne di Iglesias.

Eylais . . .? (an *extendens*, var.). — Trovato entro letame nelle vicinanze di Muravera.

Ophionyssus n. sp. — Raccolto nelle adiacenze di Cagliari.

Hydrachna globosa, Deg. — Trovata non rara nel Rio Manno presso Decimoputzu: le larve parassite della *Naucoris minuta* nello stesso fiume a Monastir in luglio.

Hydrotoma umbrata, Mull. — Specie nuova

per l'Italia: trovata non rara in un piccolo pantano presso Oristano.

Trombidium holosericeum, Lin.—Diffuso per varie parti.

MOLLUSCHI

Helix Carae, Cant. var. *adiacensis* Paul. — Questa distinta varietà non era stata innanzi trovata nell'isola di Sardegna propriamente detta, ma solo nella piccola isola adiacente della Maddalena. L'abbiamo raccolta su' monti Limbara.

— **maritima**, Drap.—Raccolta nelle adiacenze di Osilo.

Helix Hillyeriana, Paul.— Trovata soltanto presso Decimoputzu: poco abbondante.

Amnicola physaeformis, nob.— Trovata nel Rio Coghinas in tenimento di Perfugas unitamente alla *Physa saeprusana*, con la quale ha di comune la tinta esterna della conchiglia.

AGGIUNGASI

Agl' Imenotteri

Hemiteles collinus, nob. — Ne abbiamo un individuo femina raccolto nelle adiacenze di Alghero in settembre 1881.

A' Tisanotteri

Phloeothrips albosignata, Reut. 1884 (*Phloeothrips bigemmata*, nob. Memoria 2ª 1883 [1]).

[1]) Nel pubblicare la seconda memoria venuta in luce in giugno 1883 registrammo come nuova una specie di *Phloeothrips* chiamandola *bigemmata:* però obbliammo di darne la descrizione. Pertanto la stessa specie è stata descritta sopra individui di africa (Tlemcen) dal signor Reutter nel fascicolo di Ottobre 1884 della *Revue d'Entomologie* di Caen.

PARTE SECONDA

Descrizione delle specie nuove e note sopra altre già conosciute.

Coleotteri

Scaurus striatus, var. sardous, nob.

S. minus angustatus, elytris planiusculis, costis exilibus et parum elevatis, interstitiis subtilissime vage punctatis: ♂ femorum anticorum dente validissimo, valde incurvato. — Long. mill. 18.

Non ostante lo *Scaurus striatus* offra una certa variabilità nello sviluppo delle carene dell'elitre, nella grandezza del dente de' femori anteriori del maschio e nella grandezza degli individui, pure quello di cui parliamo presenta un insieme di caratteri che dànno all' insetto un aspetto particolare, e che senza una considerazione filosofica, lo farebbero giudicare una specie distinta.

Esso supera in grandezza i maggiori individui dello *striatus*; le elitre sono spianate; le loro carene sono sottilissime e poco rilevate; gl' intervalli sono finamente e assai scarsamente punteggiati. Ne' maschi il dente de' femori anteriori è assai sviluppato e fortemente incurvato, per modo che la parte piegata forma quasi angolo retto con la basilare.

Non ne abbiamo che due individui, identici, provenienti da due località diverse, come trovasi indicato nel catalogo; ma forse molti altri avremmo potuto raccoglierne, se avessimo sopra luogo posto mente alla loro importanza. E non è fuori probabilità che in seguito si trovi conveniente considerarlo come specie distinta, cui potrebbe darsi il nome stesso adoperato per la varietà.

Xylophilus (*Olotelus*) atomus, nob.

X. minutissimus, pronoto transverso, ante basim profunde transverse impresso; totus obscure testaceus, oculis tantum nigris. — Long. mill. 1 $^1/_6$.

Per colorito questo *Olotelus* si avvicina al *flaveolus;* però, oltre che per la assai maggior piccolezza, se ne distingue nettamente per il solco del metatorace intero.

E il più piccolo di quanti nella intera famiglia degli Anticidei finora si conoscono.

Anaspis suturalis.

Come altre specie congeneri questa è soggetta a variazioni di colorito, ed il sig. Emery ne menziona diverse. Però tutte le varietà da lui indicate sono per melanismo, successivamente più esteso. In Sardegna pertanto è frequente una varietà nella quale per lo contrario vi ha deficienza di melanismo in rapporto al tipo. In essa in fatti il protorace e le elitre rimangono interamente testacei.

Peritelus sardous, nob.

P. ovatus, convexiusculus, squamositate in dorso cinerea fusco-alboque variegata, infra albida vestitus, brevissime hispidus; pronoto subcylindrico, latitudine parum breviore, basi apiceque truncato, remote profunde punctato; elytris profunde striato-punctatis; antennis crassis, flagelli articulo 1° duobus sequentibus simul sumptis subaequali, clava subovata; tibiis anticis apice incurvis. — Long. mill. 3 $^1/_4$.

Il dorso dell'elitre è ricoperto di squamette di color fosco variato di cenerino: la sutura è bianchiccia articolata di bruno: altre macchioline bianchicce formano due serie oblique nella metà posteriore. Il protorace è bianchiccio con due strisce brune. Tutto il di sotto del corpo è rivestito di squamette bianchicce.

Tenendo presente la interessante monografia del genere *Peritelus* pubblicata dal Seidlitz [1]) questa specie entra nel gruppo settimo, avendo grandi affinità col *parvulus* e con l'*Echidna*; dal primo dei quali differisce pel protorace meno corto, dal secondo per la clava delle antenne meno grossa e pel secondo articolo del flagello delle stesse poco più corto del primo.

Ortotteri

Pterolepis pedata, A. Costa (mem. 1ª, pag. 33).

Fin dalla prima memoria imponemmo questo nome a una specie che giudicammo nuova, facendo rilevare i caratteri che la distinguono dalla *Pt. spinibrachia*, senza fare alcun cenno delle sue affinità con la *Pt. spoliata*, Ramb. Nell'attualità, essendo stato il genere *Pterolepis* quale lo ritenne il Fischer scisso in due, e conservato il nome per la sola specie per la quale lo stabiliva il Rambur nella Fauna dell' Andalusia, ci conviene notare che la nostra specie deve ascriversi precisamente nel genere *Pterolepis* propriamente detto quale lo ha ristabilito il Brunner [2]). E poichè esso non comprende che la sola specie sopramenzionata della Spagna, possiamo confermare che la *Pterolepis pedata* è da questa ben distinta e costituisce una seconda specie da aggiungersi a tal genere. Le differenze si rivelano sopratutto nella femina, la cui trivella nella *spoliata* è, come dice il Rambur, *moins longue que le ventre*, *renflée à la base*, *un peu courbée*, mentre nella *pedata* essa è più lunga dell'addome e quasi diritta.

Il Rambur non parla del numero delle spine dei femori posteriori. Il Brun-

[1]) Monographie der Curculioniden-gattung Peritelus.—Berlin. Entom. Zeitschr., anno IX, 1865.
[2] Prodr. der Europ. Orthopt.

ner li dice armati di due o tre piccole spine. Nella nostra specie i femori posteriori hanno inferiormente sei ad otto spine sulla carena interna, e due o tre sulla esterna.

Platycleis umbilicata, nob.

Raccogliemmo questa Locusta nel settembre 1881 presso una delle vette del Gennargento, e ci avvedemmo della singolare fattezza del settimo anello ventrale, molto caratteristico nelle specie di questo genere, la quale ci fece pensare aver tra mani una forma non conosciuta. Nondimeno ci astenemmo dal farne parola nella memoria relativa a quel viaggio, per attendere che altri individui ci avessero mostrata la costanza di quel carattere, e ci avessero potuto ancora far conoscere il maschio, essendo femina quella che possedevamo. Nel viaggio del 1883 trovandoci in Sardegna nella state inoltrata, che è appunto la stagione favorevole per i Locustidei, e nella regione medesima del Gennargento, raccogliemmo quante *Platycleis* ci si presentavano, ma nessuna apparteneva alla forma desiderata. Non ostante però rimasti col solo primo individuo, crediamo utile darne la descrizione, perchè possa servire a farla riconoscere qualora altri se ne trovassero.

La specie in parola appartiene al gruppo che comprende la *intermedia* e la *laticauda*, anzi a guardarla da sopra non si saprebbe distinguere dalla prima di esse. Però è diversa da ambedue e da altre affini per questo, che il settimo anello ventrale ha nella metà anteriore un rilievo anulare ovato-triangolare, il quale cinge uno spazio incavato, dal cui fondo si eleva una piccola prominenza, simulando esattamente un ombelico umano. Il margine posteriore di detto anello è leggermente elevato ed un poco ottusamente angoloso. La lamina sottogenitale è scanalata per lo lungo, smarginata, ed i lobi sono ampii e ritondati. La trivella è lunga una volta e mezzo il protorace ed incurvata in sopra come nella *intermedia*.

La frase specifica può essere così formolata.

♀ *Pl. habitu, colore et statura* Pl. intermediae *similis, segmento ventrali septimo basi gibbo, annulo ovato-triangulari elevato, disco annuli excavato et in medio tuberculato.*

Long. corp. exicc.	mill.	18
pron.		5
tereb.		7
elyt.		27
femor. postic.		19.

Corrodenti

Coecilius abiectus, nob.

C. brunneo-rufescens, pedibus pallidis; alis sordide hyalinis, venis crassis fuscis, pterostigmate in parte arcuata fusco cincto, pedunculo cellulae furcalis furca fere duplo longiore. — Long. cum alis fl. mill. 3.

Specie affine al *C. Burmeisteri*, dal quale differisce per le ali che non sono affatto ferruginose e mancano de' due punti neri. Esse invece sono vitree e tinte assai legger-

mente in gialliccio; sotto la porzione arcuata del nervo che chiude lo pterostigma questo è fiancheggiato esternamente di fosco in modo assai pronunziato, ed i rametti del ramo esterno della vena sottomediana sono anche fiancheggiati da leggiera ombra.

Coecilius flavipennis, nob.

C. testaceus, oculis tantum nigris; alis flavescenti-hyalinis, immaculatis, venis concoloribus, ramulis tantum rami externi venae submedianae fuscis. — Long. cum. al. fl. mill. 2,5: alar. m. 2.

Affine al *C. flavidus;* diverso principalmente per le ali prive assolutamente di qualunque punto nero, con le vene assai pallide: i soli rametti del ramo esterno della vena sottomediana sono un poco oscuri, ma in nessun modo fiancheggiati di fosco.

Psochus funerulus, nob.

Ps. fusco-castaneus, subnitidus, pedibus pallidioribus; alis hyalinis, venis nigris, pterostigmate in dimidio apicali maculaque minuta in venae dorsalis apice saturate fuscis; areola discoidali latitudine maxima parum longiore. — Long. corp. c. al. fl. mill. 2,8; alae m. 2.

Gl' individui che possediamo di questa specie ci danno una prova della non esatta costanza della disposizione ed andamento delle vene alari. In alcuni il ramo interno della vena mediana e l'esterno della sottomediana si uniscono direttamente e per brevissimo tratto camminano anche fusi insieme; in altri si uniscono mediante una brevissima vena trasversale, la quale nondimeno non può paragonarsi a quella per la quale que' due rami sono congiunti nelle *Amphigerontia* [1]).

Gen. Cyrtopsochus, nob.

Corpus apterum. Mesothoraxæ et metathoraxæ sejuncti. Palpi articulo ultimo cylindraceo. Antennae corpore longiores, gracillimae, articulis valde elongatis.

Per il mesotorace separato dal metatorace questo Psocideo si avvicina al genere *Hyperectes* nel gruppo de *Atropini*, cui appartiene per la mancanza assoluta di ali. Ne differisce per l'ultimo articolo de' palpi mascellari non scuriforme, ma cilindraceo, e per molti altri caratteri che si rilevano dalla estesa descrizione dell' insetto che ne andiamo a dare. Aggiungeremo essere questo il più grosso Psocideo attero indigeno che ora conoscasi.

Cyrtopsochus irroratus, nob.

C. cinerascens, nigro irroratus, palpis pedibusque albis, palporum ac tibiarum summo apice tarsorumque articulis duobus ultimis nigris. — Long. corp. mill. 3, anten. m. 4.

Capo proporzionalmente grande, posteriormente più largo del torace.

Antenne filiformi, assai delicate, d'un quarto più lunghe del corpo, finamente pelacciute, composte di 13 o 14 articoli: il primo articolo breve non eccedente il muso, il secondo mediocre, i tre seguenti assai lunghi, i rimanenti meno lunghi.

[1]) Per la nomenclatura delle vene alari adottiamo quella stabilita dal Kolbe nella sua monografia degli Psocidi alemanni: *Monogr. der Deutsche Psociden.* (Faresber der Zool. section für Wertfalen, 1880).

Palpi mascellari con l'ultimo articolo tutto di eguale grossezza con l'estremità ritondata, fornita di corti peli setolosi.

Torace quasi quadrato; i tre anelli brevi trasversali; il margine posteriore del mesotorace un poco sinuoso nel mezzo, ed inversamente il margine anteriore del metatorace un poco arcuato.

Addome grosso, rigonfiato, gibboso nel dorso.

Piedi discretamente lunghi; femori non rigonfiati; tibie vedute al microscopio quasi tetragone, i due spicoli esterni finissimamente e stivatamente seghettati, in ciascuno intacco forniti di breve pelo setoloso. I tarsi di 3 articoli; il primo un poco più lungo del secondo, il terzo lungo quanto i due primi presi insieme.

Il colore generale del corpo è di un bianco cenericcio, sparso di minuti punti neri: nel dorso del capo alcuni punti formano una macchia mediana, altri sono disposti ne' lati lungo le orbite. Le antenne hanno i primi tre articoli bianchi, i rimanenti scuri. I palpi ed i piedi sono bianchi: l'estrema punta de' palpi e delle tibie e gli ultimi due articoli de' tarsi sono neri; nelle tibie l'estrema punta de' denti delle seghe è nera, ed un punto nero sta alla base di ciascuno de' peli.

Questa descrizione è fatta sopra individuo conservato in alcool e che ha ritenuto inalterati forme e colori.

Imenotteri

Tachytes Panzeri, fulviventris, fulvitarsis ed erythrogastra.

È stato recentemente notato dal sig. Kohl [1]) che la *Tach. rufiventris,* Spin., è la femina della *Tach. Panzeri.* Noi abbiamo constatato la giustezza di tale osservazione non solo, ma abbiamo ancora in seguito a' numerosi individui raccolti nell'ultimo viaggio potuto riconoscere che la nostra *Tach. erythrogastra* è la femina della *Tach. fulvitarsis.* In ambedue le specie, *Panzeri* e *fulvitarsis,* si osserva un fatto identico, che cioè nelle femine il rosso dell'addome prende maggiore estensione sino ad invaderlo interamente, scomparendo del tutto il nero, che nell'addome de' maschi occupa gli ultimi quattro o tre zooniti.

Pompilus concinnus, Dahlb.

L'individuo che possediamo di Sardegna presenta assai spiccato il carattere che il Dahlbom assegna al suo *Pomp. concinnus*, cioè la *cellula tertia cubitalis late trapezina.* Dubitiamo però della validità di tale carattere e conseguentemente della specie, attesa la poca costanza della forma della terza cellula cubitale nelle altre due specie affinissime *niger* e *melanarius.*

Gen. Pseudomutilla, nob.

Femina (aptera) thorace in medio valde constricto, regionibus tribus uti in maribus Mutillarum distinctis constituto.

Tra le femine di Mutillidei, al meno di quelli di Europa, quella che andiamo a de-

[1]) Neue Hymenopteren — Zoolog. Botan. Gesells. XXXIII, 1884.

scrivere si distingue eminentemente per una singolare fattezza del torace. Nei tre generi finora conosciuti, *Methoca*, *Myrmosa*, *Mutilla*, il torace delle femine presenta tre gradazioni diverse. Nelle femine di *Methoca* esso è diviso in tre nodi distinti, ciascuno dei quali rappresenta uno de' zooniti toracici. Nelle femine di *Myrmosa* è diviso in due sole regioni, di cui l'anteriore risulta dalla fusione del protorace col mesotorace. Nelle Mutille femine tutti tre i zooniti toracici nel dorso si fondono in un pezzo solo, nel quale soltanto in qualche specie (*M. Spinolae*) osservasi una sutura o linea elevata che segna il confine tra il meso-ed il metatorace. Nel nostro Mutillideo si ha una quarta forma. Apparentemente, ossia guardato ad occhio nudo, il torace sembra diviso in due regioni nettamente separate come nelle femine *Methoca,* ed indicate dallo strozzamento che corrisponde appunto tra il meso-ed il metatorace. Però osservandolo con qualche ingrandimento vedesi chiaramente che nella parte anteriore il protorace rimane ben distinto dal mesotorace, ed è conformato alla maniera di quello de' maschi delle vere Mutille, e precisamente di quelle in cui il margine posteriore forma un arco rientrante. Parimente nel mesotorace vedesi la linea di delimitazione dello scutello. Ad eccezione però di questa simiglianza, nel rimanente il torace in massa non lascia di presentare la caratteristica propria delle femine.

Pseudomutilla sardiniensis, nob.

Ps. capite thorace duplo fere latiore, convexo, nitido, crebre punctato; thorace subbinodoso; abdominis segmento primo basi valde constricto angulis prominulis; nigra, pilis rigidis cinereis nigrisque hirta; ore thoraceque rufis; abdominis segmentis tribus primis fascia marginali e pilis stratis albis, fascia segm. secundi in medio superius angulata.— Long. mill. 6.

Capo assai grosso, quasi quadrato, largo quasi il doppio del torace, convesso, splendente, fittamente punteggiato: con un solco poco profondo che dall'ocello medio scende sin tra la base delle antenne e con un grosso tubercolo sopra la inserzione di ciascuna di queste: nero col margine inferiore del clipeo rosso-testaceo. Mandibole grandi, falciformi, levigate, rosso-testacee. Antenne di color nero piceo. Torace lungo il doppio della propria larghezza, apparentemente diviso in due parti quasi eguali, separate da forte restringimento, oltre la divisione saturale corrispondente tra il meso ed il metatorace. La metà anteriore è costituita dal pro-e mesotorace. Il protorace ha il margine posteriore profondamente arcuato ad arco rientrante: i due lobi posteriormente ritondati, si terminano innanzi ad un tubercolo levigato e splendente, che occupa il posto delle tegole alari: esso è fittamente punteggiato. Il mesotorace ha punti impressi assai più grossi di quelli del protorace: esso si termina posteriormente con margine trasversale diritto ed un poco elevato. Lo scutello è quasi semicircolare, punteggiato-rugoso. Il metatorace è quasi sì lungo che largo, convesso nel dorso, rigonfiato nel mezzo, un poco ristretto verso dietro: punteggiato-rugoso. Tutto il torace è rosso-testaceo. L'addome ha la forma di quello di alcune vere Mutille (la *capitata* p. e.); il primo articolo è ristretto notevolmente verso la base, i cui angoli sono sporgenti, dentiformi; il secondo è grande, rigonfiato, finamente punteggiato: nero, i tre primi articoli con frangia marginale di peli coricati bianchi, la fascia del secondo angolarmente dilatata nel mezzo. Il ventre nel mezzo è rossiccio col margine di ciascun anello nero.

Piedi neri; i tarsi picei. Tutto il corpo ha peli ispidi disuguali, neri misti ad altri cenerini.

Mutilla Spinolae, Lep.

Accennammo già nella seconda memoria una Mutilla che lasciammo indeterminata, notando soltanto come essa fosse affine alla *Mut. Spinolae* di Lep. Ed in effetti, considerando la colorazione essa si accomoda bene alla descrizione della indicata specie, se si eccettua una maggiore estensione del rosso sul capo, che nella nostra è interamente rosso, mentre nella *Spinolae* vuolsi rosso soltanto dalla metà degli occhi in avanti. Il carattere organico per lo quale fummo dissuasi a crederla identica fu la mancanza di ogni vestigio di sutura o linea elevata tra il mesotorace ed il metatorace, di cui parlano i signori Sichel e Radoszkovsky. Però negl'individui di Francia quella sutura non si osserva, siccome non ne fa parola il Lepeletier.

Hylaeus plumicornis, nob.

♂. H. antennarum scapo triangulariter dilatato, plumoso; tarsorum mediorum articulo primo basi dilatato; niger, antennis pallidè flavis, dorso scapi nigro, flagelli fusco-fulvescente; tibiis anticis antice, mediis summa basi, posticis dimidio basali tarsisque flavescenti-albis. — Long. mill. 6.

Antenne mediocremente lunghe: lo scapo dilatato quasi triangolarmente dalla base alla estremità, col lato interno diritto, l'esterno un poco angoloso verso il mezzo; guarnito di peli lunghi eguali rigidi stivati, in parte arricciati e taluni disposti a ventaglio: di color giallo-pallido con la porzione dorsale nera; i peli, pallidi sulla parte gialla, foschi sulla parte nera. Il flagello è pur esso giallo-pallido col dorso fulvo, più o meno oscuro sugli articoli mediani. Capo un poco più largo del torace: la fronte tra gli ocelli e la inserzione delle antenne incavata e splendente: faccia e clipeo un poco convessi, finissimamente coriacei e con punti impressi mediocremente stivati: interamente nero. Mandibole nere con la estremità ferruginosa. Torace finamente punteggiato-coriaceo, poco splendente; solo l'area del metatorace rugosa e splendente: nero; una delicata linea sul protorace, i calli omerali, la metà anteriore delle tegole alari (la posteriore picea) di color bianco-gialliccio. Addome finamente punteggiato, mediocremente splendente, nero. Piedi neri: la faccia anteriore delle tibie di avanti, l'estrema base delle medie e la metà basilare delle posteriori, i tarsi tutti di color bianco-gialliccio. Il primo articolo de' tarsi medii dilatato alla base e gradatamente ristretto verso la estremità, assumendo quasi la figura di un triangolo isoscele rovescio. Ali leggermente ombrate.

Per la dilatazione del primo articolo de' tarsi medii si avvicina all' *Hyl. cornutus*.

Hylaeus strigulosus, nob.

H. clypeo grosse punctato, longitudinaliter striato-rugoso, abdomine laevi nitido, segmento primo subtilissime punctulato; metanoti area dorsali grosse rugosa, subareolata, nitida: niger, antennarum flagello subtus ferrugineo; genis maculaque parva rhombea clypei margini contigua saturate flavis; tibiarum anticarum basi externa et posticarum annulo baseos externe latiore pallide flavis; alis umbratis. — Long. mill. 6,5.

Affinissima è questa specie all'*Hyl. rimosus*, Foerst [1]). Ne differisce però essenzialmente per lo addome che è tutto liscio, splendente ed assai finamente punteggiato, mentre in quello la metà inferiore del primo anello dicesi fortemente punteggiata con una linea mediana levigata. Ciò che sopratutto costituisce l'affinità di questa specie col *rimosus* è la scultura del clipeo.

Osmia *(Chalcosmia)* laterefasciata, nob.

♀. *O. nigra, capite thoraceque confertissime punctulatis, opacis, breviter cinereo villosis; abdomine dorso laevi, subtilius sparse punctulato, nitidissimo, segmento primo cinereo piloso, segmentis primis tribus utrinque in margine postico fascia e pilis substratis albis, quarto quinto et sexto in margine postico albido fimbriatis; scopa ventrali alba; alis subfumato-hyalinis; clypeo inermi.* — Long. corp. mill. 11.

Corpo robusto, di color nero. Capo e torace finamente ed assai stivatamente punteggiati, quasi matti, con peluria bianca tendente al cenerino. Area del metatorace trasversale, splendentissima. Addome nel dorso splendente con punteggiatura molto più fina e meno stivata di quella del capo e torace, quasi nudo; il primo articolo con scarsa peluria bianchiccia; il primo, il secondo ed il terzo hanno da cadaun lato del margine posteriore una folta frangia di peli semicoricati bianchi, la quale esternamente si continua sul rispettivo margine laterale; il quarto e quinto con frangia breve bianca nel margine posteriore, il sesto coperto di breve pubescenza bianchiccia. Spazzola ventrale di un nero intenso. Piedi con scarsa peluria bianchiccia. Speroni de' piedi posteriori neri. Ali un poco ombrate; la cellula radiale e le due cubitali con una striscia bruniccia, più intensa nella radiale. Clipeo nel margine inferiore ottusamente crenulato, ornato di una frangia di cigli rossi interrotta nel mezzo.

Osmia *(Ctenosmia)* bihamata, nob.

♂. *O. minuta, nigra subnitida, subtilissime punctulata, albido pilosa, antennarum flagello infra ferrugineo, abdominis segmentis dorsalibus primis quinque in margine postico albo ciliato-fimbriatis; segmento sexto transverso et transverse concavo, utrinque emarginato-dentato; septimo posterius truncato-rotundato; alis hyalinis.* — Long. m. 6.

Corpo assai finamente punteggiato, mediocremente splendente. Capo, torace, base dell'addome e piedi con peluria bianca, molto stivata sul clipeo e lungo il margine occipitale. Primi cinque anelli dorsali dell'addome nel margine posteriore con breve frangia di cigli coricati bianchi. Il sesto anello è più largo che lungo, concavo in senso trasversale; da cadaun lato della base ha un dente ben pronunziato diretto in dietro, rimanendo separato dal lato dell'anello per profonda smarginatura; il settimo è quasi quadrato, posteriormente troncato-ritondato. La spazzola ventrale è bianchiccia poco folta.

Sembra sia affine alla *O. difformis*, Per. [1]), dalla quale differirebbe nettamente per la fattezza del sesto anello addominale.

[1]) Monogr. der gatt. *Hylaeus*, n. 63.
[1]) *Contribution à la Faune des Apiaires de France*, pag. 86.

Megachile Schmiedeknechtii, nob.

♀. *M. nigra, capite, thorace abdominisque segmenti primi dorso cinereo-fulvescenti villosis; huius segmentis primis quinque fascia marginis postici, sexto maculis duabus contiguis e pilis stratis flavis; scopa ventrali flavo-fulvescente.* — Long. mill. 10.

♂ *abdominis segmento quinto basi flavo fasciato, posterius nigro piloso, sexto maculis in fasciam latam basalem conjunctis, margine postico denticulato spinisque quatuor parallelis armato.* — Long. m. 8 ½.

Variat *scutello immaculato.*

Per la statura e per l'abito generale questa *Megachile* simiglia moltissimo alla *M. argentata*, della quale l'avremmo considerata una distinta varietà meridionale, se non ce ne avessero dissuasi la costanza de'caratteri ed ancora il fatto che mentre la *M. argentata* è parimente abbondante nell'isola, i due tipi mantengonsi nettamente distinti senza alcun passaggio dall'una all'altra. La differenza principale trovasi nel colore di tutta la peluria, la quale nell'*argentata* è di un bianco niveo, mentre nella nostra l'è di un giallo sudicio ben marcato. In quanto alla distribuzione, la detta peluria si comporta nel modo stesso. Il margine posteriore dell'ultimo anello addominale del maschio è irregolarmente lacerato-crenato, con quattro spine delicate quasi parallele.

Anthidium melanostomum, nob.

♀. *A. nigrum, cinereo villosum, mandibulis nigris, clypeo, genis, orbitis internis, fascia utrinque occipitali, mesonoti marginibus lateralibus, scutelli maculis quatuor, tegularum parte antica punctoque discoidali, abdominis segm. 1-5 fascia in medio attenuata ac in 1 et 2 interrupta, saturate flavis; pedibus flavo-fulvis; alis fuscis.* — Long. mill. 14.

Il carattere più distintivo di questa specie sta nel color nero delle mandibole, le quali in tutte le specie affini, per lo meno d'europa, sono gialle. Pel rimanente simiglia molto agli *Ant. diadema* e *provinciale.*

Benchè ne avessimo un individuo solo della Sardegna, parecchi ne possediamo delle provincie napoletane, i quali ci assicurano della costanza del carattere specifico. Notiamo soltanto essere tutti individui femmine. Però in nessuna delle specie di cui si conoscono ambedue i sessi trovasi differenza nel colorito delle mandibole tra il maschio e la femina: lo che ci fa ritenere che anche in questa il maschio debba avere le mandibole nere come la femina.

Anthidium peregrinum, nob.

A. nigrum, albo villosum, clypeo, genis, macula utrinque occipitali, mandibulis (apice excepto), tegularum margine antico, punctis duobus in margine antico mesonoti, scutello, maculis binis transverse ovatis in abdominis segmentis 1-5, maris segmento septimo (brevi, transverso, mutico) toto cremeis; pedibus rufo-fulvis, basi nigris; alis fuscescentibus. — Long. mill. 6.

♀ *clypeo nigro; abdominis segmento sexto (ultimo) brevi, late rotundato.*

Variat *scutello immaculato.*

Per l'abito generale simiglia al *lituratum*, Panz., dal quale differisce, il maschio pel settimo anello addominale bianco-gialliccio, pel clipeo interamente giallo; la femina pel clipeo interamente nero; ambedue i sessi pe' piedi rosso-fulvi con la sola base nera, per le mandibole bianche, mentre nel *lituratum* Panzer le dice nere.

Foenus rugidorsum, nob.

F. capite subtilissime coriaceo, subopaco, linea media frontali laevi nitida, ante marginem posticum elevatum minime foveolato; thoracis dorso irregulariter transverse grosse rugoso; niger, facie, occipite, pleuris, mesonoti limbo antico pleurisque argenteo puberulis; pedibus anterioribus basi et apice tibiarum et basi tarsorum, posticis annulo ad basim tibiarum et tarsorum articulo primo albis; terebra corpore parum longiore, vagina apice alba. — Long. corp. mill. 8-10.

Simile a primo aspetto al *Foenus pedemontanus*, dal quale differisce eminentemente per l'assoluta mancanza di fossette occipitali. Dalle altre due specie affini *granulithorax*, Tourn., e *vagepunctatus*, A. Cost., distinguesi pel dorso del torace privo di granulazioni e di punteggiatura, sibbene tutto coperto di rughe trasversali ben rilevate.

Apaeleticus sardous, nob.

♀. *A. rufo-ferrugineus, scutello sulphureo, abdominis segmentis 2-6 nigris, sexto margine postico albo; trochanteribus posterioribus femoribusque posticis nigris; antennarum art. primis quatuor ferrugineis, ceteris nigris, 9-13 dorso albis; alis hyalinis, stigmate nigro.* — Long. m. 6.

Femina. — Antenne: i primi quattro articoli rosso-ferruginosi; l'ottavo, nono e decimo bianchi con la faccia inferiore nera; i rimanenti neri. Capo rosso-ferruginoso, splendente, discretamente punteggiato: parte mediana della faccia, tra la inserzione delle antenne e la base del clipeo, convessa e quasi liscia; clipeo egualmente convesso e liscio. Mandibole rosso-ferruginose con la estremità nera. Palpi del colore del capo. Torace rosso-ferruginoso, con lo spazio che circonda lo scutello ed una striscia mediana nella parte posteriore del metatorace, di color nero: il dorso del mesotorace finamente punteggiato; il metatorace con rughe irregolari, e solo nella parte mediana posteriore nera regolari e trasversali. Scutello quasi quadrato, liscio, bianco. Addome oblungo, nero, punteggiato: il primo articolo rosso-ferruginoso: il quinto con angusto margine posteriore bianco. Piedi rosso-ferruginosi; i quattro femori anteriori più oscuri, il secondo trocantere, gran parte dei femori e la metà apicale delle tibie de' piedi posteriori neri, ultimo articolo di tutti i tarsi nero. Ali trasparenti, vene e stigma neri, radice e tegola ferruginose.

Apaeleticus Kriechbaumeri, nob.

♂. *A. rufo-ferrugineus, antennis, capitis parte supera ac metathoracis dorso, lineola infera femorum anteriorum, ac pedum posticorum trochanteribus, geniculis, tibiarum apice tarsisque nigris; scutello sulphureo; facie, clypeo, ore, antennarum articulo primo infra, pronoti margine postico, lineola infra alas, alarum tegulis et radice, pedum anteriorum facie antica albidis; alis hyalinis, venis nigris, stigmate fusco.* — Long. mill. 6.

Antenne nel dorso nerastre; inferiormente il primo articolo bianco, i rimanenti testacei. Capo nero: la faccia, dalla inserzione delle antenne in sotto, le orbite anteriori e le parti boccali bianche. Torace rosso-ferruginoso; il margine posteriore del protorace, una breve linea longitudinale sotto la inserzione delle ali, bianche; la parte dorsale e posteriore del matatorace nera. Addome interamente rosso-ferruginoso. Piedi di questo stesso colore, i quattro anteriori con la faccia anteriore bianca ed una linea nera lungo il disotto de' femori, i due posteriori co' trocanteri, i ginocchi, l'estremità delle tibie ed i tarsi neri. Ali trasparenti, le vene e lo stigma neri, la radice e la tegola bianche.

Ischnus ridibundus, nob.

I. gracilis, rufus, capite (ore excepto) fasciola circumscutellari abdominisque segmentis duobus vel tribus ultimis nigris; antennis ferrugineis, dorso fuscis; alis hyalinis radice et tegula albis, stigmate fusco angulo interno albicante, areola quinqueangulari — ♀ antennarum articulis 11-14 albis; terebra abd. segm. septimo paullulum longiore. — Long. mill. 7-8.

Femina. Capo di un terzo più largo che lungo, non ristretto dietro gli occhi, stivatamente punteggiato. Clipeo convesso, punteggiato come il capo, inferiormente troncato con i due angoli un poco sporgenti. Dorso del mesotorace punteggiato più finamente del capo. Scutello quasi quadrato, convesso, finamente punteggiato, marginato ne' lati. Metatorace cilindraceo, con le aree nettamente limitate da suture elevate, posteriormente troncato, irregolarmente rugoso, col margine della troncatura tagliente. Petto punteggiato; solo un'aja superiore-posteriore levigata e splendente. Addome allungato, delicato; primo semmento scabroso con delicato solco mediano longitudinale levigato, il quale si arresta a' tre quarti della lunghezza, a margini laterali ingrossati; secondo con profonda impressione trasversale presso la base, marginato ne' lati: la porzione che precede l'impressione basilare irregolarmente rugosa, la rimanente e gli anelli seguenti assai finamente e fittamente punteggiati. Il colore dominante è rosso-testaceo. Antenne nerastre con largo anello bianco che occupa gli articoli 11 a 14. Capo nero. Mandibole giallicce, con l'estremità nerastra. Palpi fulvi. Nel metanoto una fascia nera posta immediatamente dietro lo scutello, e ne' due lati prolungata in avanti fino alla base delle ali. Ultimi tre anelli addominali neri. Ali ialine: lo stigma cenerino, la radice e le tegole bianco-giallicce. Estremità de' femori posteriori bruna. Trivella sporgente, lunga poco più che il settimo anello addominale.

Maschio. Le antenne hanno il primo articolo nero, i rimanenti nerastri sul dorso, ferruginosi al disotto. Gli anelli addominali sono più allungati.

Ischnus proximus, nob.

♀. I. rufus, capite (ore excepto), metathoracis dorso, abdominis segmento primo, sexto et septimo ac intermediorum incisuris et pedum posticorum trochanteribus, femorum apice et tarsis nigris; lineola anteorbitali, collari, coxis atque tibiarum tarsorumque summa basi albidis; antennis nigris, articulis 12-14 dorso albis; alis hyalinis, tegula radiceque albis, stigmate albido: terebra abd. segm. septimo paullulum longiore. — Long. mill. 6.

Femina. Molto simile per l'abito generale alla specie precedente. Antenne nere

con gli articoli 10,11 e 12 bianchi; mandibole giallicce; palpi fulvi. Torace rosso ferruginoso: margine posteriore del protorace bianco: il dorso del metatorace nero. Addome rosso-testaceo; il primo e i due ultimi anelli neri. Piedi rosso-fulvi: i primi trocanteri neri, i secondi bianchi: la base delle tibie con macchia esterna bianca: tarsi posteriori bruni con la base del primo articolo bianca. Ali come nella specie precedente.

Oronotus thoracicus, nob.

O. rufus, capite, metathorace, pectore medio, abdominis segmento primo et duobus ultimis nigris; pedum posticorum femorum tibiarumque apice tarsisque nigricantibus; alis hyalinis, stigmate fusco, radice et tegula albidis. — Long. mill. 6.

Antenne ferruginose, più oscure verso l'estremità; il primo articolo nero. Capo nero, finamente punteggiato. Mandibole giallo-testacee con la estremità nera. Palpi giallicci. Torace rosso-ferruginoso, il metanoto per intero, il petto anteriore e lo sterno medio neri. Parte posteriore del metatorace molto obliqua, incavata nel mezzo, rugosa. Addome col secondo, terzo e quarto anello rosso-testacei, i rimanenti neri. Trivella brevissima. Piedi, comprese le ànche, rosso-testacei; i due posteriori col terzo apicale de' femori e la estremità delle tibie neri. Ali trasparenti, vene e stigma neri, radice e tegola bianche.

Cryptus fuliginipennis, nob. (*Cryptus*...? mem. 3ª).

♀. *C. niger nitidus, unicolor, brevissime pubescens; alis fusco-fuliginosis; terebra abdomine sexto breviore.* — Long. corp. mill. 10, ter. m. 5.

Tutto uniformemente di color nero di ebano splendente, con peluria brevissima osservabile con lente. Il capo punteggiato assai stivatamente. Torace levigato, a punti meno stivati; parte posteriore del metatorace un poco concava, punteggiata come il resto, senza rughe o pieghe elevate. Addome a punteggiatura stivata, ma molto fina. Trivella eguale in lunghezza a' cinque sesti dell'addome. Ali uniformemente di color bruno fuliginoso, le vene e lo stigma neri.

La tinta molto marcata delle ali distingue assai nettamente questa specie da tutte quelle a corpo interamente nero.

Hemiteles collinus, nob.

♀. *rufo-testaceus, abdomine fusco, segmentis primo et secundo fascia postica rufo-testacea; antennis apice pedibusque posterioribus fuscis; alis hyalinis, stigmate nigro, fascia pone stigma fusca, radice tegulaque pallide testaceis: terebra abdominis dimidium aequante.* — Long. mill. 3, ter. m. 1.

Ai caratteri indicati dalla diagnosi che precede vi ha poco da aggiungere. Il torace è assai finamente coriaceo: la parte posteriore del metatorace è leggermente concava. L'addome è assai finamente punteggiato: il primo anello ha nella parte ampia due carene parallele poco marcate; il secondo ha il margine posteriore liscio e più splendente.

Pimpla cercopithecus, nob.

♀. *P. rufa, capite, dorso metathoracis abdominisque segmento primo et cœterorum margine postico nigris; coxis et trochanteribus anticis albidis, tarsis posticis fuscis; alis hyalinis, radice, tegula stigmateque albis; terebra corpore fere sesqui longiore, gracili, recurva.*—Long. corp. mill. 6 $^1/_2$, ter. 8 $^1/_2$.

Femina.—Capo nero. Palpi bianchi. Torace fulvo; una striscia longitudinale mediana sul mesotorace, il dorso del metatorace ed il petto anteriore neri. Addome finamente ed assai stivatamente punteggiato, fulvo col margine posteriore di tutti gli anelli levigato, di color nero splendente. Piedi fulvi: ànche e trocanteri anteriori bianchi, tarsi posteriori bruni. Ali trasparenti, iridate; le vene nere, lo stigma, la radice e la tegola bianchi. Trivella lunga quasi una volta e mezzo l'intero corpo, gracile, curvata in sopra.

Pimpla apricaria, nob.

♀. *P. crassiuscula, nigra, abdomine pedibusque (cum coxis et trochanteribus) rufis; pedum posticorum tibiis tarsisque nigris, tibiis annulo prope basim albo; palpis albidis; alis fuscescenti-hyalinis, radice, tegula ac stigmatis nigri angulo interno albidis; abdomine dorso subtilissime punctulato subopaco, segmentorum margine laevi nitido; terebra abdominis trientes fero aequante.* — Long. mill. 7.

Femina. — Capo nero. Palpi lividi. Antenne nere; il primo articolo di color rosso oscuro. Torace nero, il mesotorace assai finamente punteggiato, il dorso del metatorace grossolanamente punteggiato, quasi areolato; la troncatura posteriore incavata nel contorno, rilevata, liscia e splendente nel disco. Addome stivatamente punteggiato con le incisure o margine posteriore de' singoli anelli liscio e splendente: interamente di color rosso mattone con solo la metà anteriore del primo anello nera. Trivella lunga quanto la metà dell'addome, diritta, nera, brevemente pelacciuta. Piedi, comprese le ànche, rossi: le tibie posteriori nere con un anello bianco verso il terzo superiore, tarsi degli stessi piedi nerastri. Ali appena ombrate; metà interna dello stigma, radice e tegola bianche, il resto dello stigma e le vene neri.

Pimpla cingulatella, nob.

P. gracilis, nigra, abdomine pedibusque rufis, illo segmentorum 1-6 incisuris segmentoque septimo toto nigris; palpis pallidis; antennis subtus obscure ferrugineis; alis hyalinis, radice et tegula albis, stigmate fuscescente; ♀ terebra abdominis segmenta quinque antica longitudine aequante. — Long. corp. mill. 6, ter. 2 $^1/_2$.

Femina. — Capo nero splendente. Palpi brunicci. Antenne bruno-ferruginose; il primo articolo nero. Torace nero splendente, il metatorace a rughe reticolate nel dorso e ne' lati: la troncatura coriacea con due suture rilevate. Addome rosso mattone splendente, col margine posteriore degli anelli secondo, terzo, quarto e quinto levigato, nero, splendentissimo, come verniciato: l'ultimo anello d'un rosso un poco brunastro. Trivella lunga quanto i tre quarti dell'addome, diritta, robusta, stivatamente barbata, nera. Piedi, comprese le ànche, rosso-testacei, le sole unghie nere. Ali leggermente ombrate: la radice e la tegola bianche, lo stigma bruno livido; le vene nere.

Maschio. — Meno la mancanza della trivella, nel resto somiglia perfettamente alla femina. Nell'individuo che abbiamo i cingoli neri dell'addome sono più delicati e interrotti nel mezzo: potrebbe però esser ciò effetto di variazione.

Lissonota pectoralis, nob.

♂. *L. nigra, facie cum orbitis anticis, clypeo oreque albidis, thorace fulvo-rufescente vitta media mesonoti et dorso metathoracis nigris; mesonoti marginibus albidis; pronoto albido, fascia nigra in utraque extremitate in pectus descendente; mesosterno lateribus albidis; pedibus pallide rufis, coxis anterioribus et trochanteribus anticis albidis; antennis gracilibus, corpore longioribus, subtus art. 1° albido, cœteris ferrugineis; alis hyalinis radice et tegula albis, stigmate fusco.* — Long. mill. 6.

Maschio. — Capo nero; la faccia, dalla inserzione delle antenne in giù, la bocca, le gote e le orbite interne bianche: estremità delle mandibole nerastra. Antenne un poco più lunghe del corpo, bruno-ferruginose; il primo articolo nero nel dorso, d'un ferruginoso livido inferiormente. Torace tricolore; il protorace è nero col margine posteriore bianco; il dorso del mesotorace è rosso scuro, con una striscia mediana nera e la parte anteriore de' lobi laterali bianca. Scutello fulvo. Dorso del metatorace nero. Fianchi e petto rosso-ferruginosi: il petto anteriore e due strisce longitudinali sul petto medio bianchi. Addome angusto, assai finamente punteggiato, nero; il secondo e terzo anello col margine posteriore bianco interrotto nel mezzo. Piedi rossi, ànche e trocanteri di quelli di avanti ed ànche de' medii bianchi: tarsi posteriori bruni. Ali incolori; radice e tegola bianche; stigma bruno; vene nere.

Meteorus splendens, nob.

♀. *M. rufo-fulvus, metathoracis dorso postico ac segmenti primi abdominalis dimidio antico nigris; abdominis segmento primo valde elongato, rimulato, ante medium utrinque foveola marginali elongata; alis hyalinis, stigmate pallido, cellula cubitali prima venulam recurrentem prope apicem excipiente, cellulis discoidalis basi aequalibus; terebra abdomine quinto breviore.* — Long. corp. mill. 6, ter. 2.

Dal mezzo della lunghezza del nervo radiale delle ali posteriori a certa luce pare partisse una esile venuzza che si dirige alla costa gradatamente affievolendosi, per modo da accennare alla divisione della cellola radiale in due come è nel *M. albitarsis* (*dispar*, Wesm.).

Meteorus scutatus, nob.

♀. *M. testaceus, abdominis segmento primo nigro; mesothoracis dorso in disco depresso, punctato-rugoso, utrinque marginato; abdominis segm. 1° eleganter confertim striolato; alis hyalinis stigmate pallido, cell. cub. secunda prope basim venulam recurrentem excipiente, cell. discoidali interna versus basim externa parum breviore; terebra abdominis trientes aequante.* — Long. mill. 4, ter. 1.

È singolare la scultura del dorso del mesotorace: il lobo medio è depresso, cinto da' lobi laterali più elevati e paralleli ne' margini interni, e lo spazio quadrato che rimane abbracciato da essi è spianato ed irregolarmente punteggiato-rugoso.

Dinocampus pallidipes, nob.

D. niger, pedibus pallidis, antennis fuscis, alis hyalinis iridescentibus, stigmate fusco basi pallido, terebra dimidiam abdominis longitudinem aequante. — Long. corp. mill. 2.

La cellula radiale che raggiunge l'estremità dell'ala e le cellule cubitali due sole, di cui la prima rimane ben separata dalla discoidale esterna, fan piazzare questo minuto Braconide nel genere *Dinocampus* [1]), partecipando pel primo carattere del gen. *Microctonus* p. d. e per l'altro di taluni *Perilitus*.

Macrocentrus procerus, nob.

♀. *M. niger, pedibus rufis, alis fuscescenti-hyalinis; abdominis segmento secundo lateribus marginato, dorso haud striolato, in medio canalicula obsoleta notato; terebra corpore fere duplo longiore.* — Long. corp. m. 7, tereb. 13.

Molto simile a primo sguardo al *M. marginator* (*Rogas* id-Nees) effigiato assai esattamente da Vollenhoven (*Pinacographia*, pl. 34, f. 1.). Ne differisce per la trivella proporzionatamente al corpo molto più lunga, pei palpi nerastri, non testacei; per le ali distintamente colorate in bruniccio.

Bracon geniculator, nob.

♀. *B. rufo-testaceus, macula rhomboidali verticis, maculis tribus mesonoti, altera in metanoto ed in segmento primo abdominali pectoreque nigris; pedibus nigris, tibiis anticis geniculisque omnibus rufo-testaceis; alis saturate fuscis, stigmatis dimidio basali aurantio, fasciaque flavescenti hyalina; terebra abdomine parum breviore; abdomine fere ut in* B. nominator *sculpto, metanoto rugoso.* — Long. corp. mill. 6, ter. 2 $^1/_2$.

Molto affine per la scoltura dell'addome al *B. nominator*; ma ne differisce immensamente per la brevità della trivella, senza tener conto delle piccole differenze di colorito, sia perchè già si sa variare nella indicata specie, sia perchè non possiamo affermare che siffatte variazioni non abbiano luogo anche nella nostra.

Bracon humerator, nob.

♂. *Niger, orbitis, facie (linea media excepta) oreque flavis; humeris, abdominis segmentis secundo tertio et quarto pedibusque (tibiis tarsisque posticis exceptis) rufo-testaceis; alis flavescenti-fuscis, stigmatis dimidio basali aurantio, fasciaque pellucida: abdominis segmentis primis quatuor subtiliter rimulosis, primo utrinque carinato.* — Long. mill. 6 $^1/_2$.

Maschio.—Antenne robuste, un poco più lunghe del corpo, nere, ad eccezione del primo articolo giallo. Capo nella parte superiore ed occipitale nero; la fronte e la faccia gialle con una macchia quadrata superiormente alla inserzione delle antenne ed una

[1]) *Antennae rectae, alae anticae cell. radialis elongata in alae apice terminata, cell. cubitales duae, prima a discoidale externa sejuncta* sono i caratteri assegnati a questo genere da Taschenberg (Hymen. deutsc. p. 79 e 84).

*

linea che da quella scende già fino al clipeo dilatandosi in triangolo, nere: parti tutte della bocca gialle. Torace nero; i lobi del protorace, che si protraggono sino alla inserzione delle ali, rossicci. Il metatorace nel dorso è quasi liscio e splendente: nella parte posteriore ha rughe quasi trasversali nel mezzo, irregolari ne' lati. Addome un poco più lungo del capo e torace insieme, quasi parallelo: il primo anello con un solco profondo presso ciascun margine laterale, esternamente fiancheggiato da carena, rugoso: i tre seguenti sono assai finamente rimulosi, il secondo e il terzo con le due impressioni lineari oblique poco profonde: il primo segmento rosso con una macchia quadrata nera, i tre seguenti interamenti rossi, gli altri neri. Piedi rosso-testacei, ànche medie, ànche con parte di trocanteri, tibie (ad eccezione della somma base) e tarsi de' posteriori, neri. Ali di un fosco poco intenso, con lo stigma e la fascia come nella specie precedente.

Ne abbiamo due individui maschi raccolti nel maggio 1882, l'uno presso Domusnovas, l'altro presso Simaxis, sopra i fiori di Tapsie.

Osservazione. Non ostante la diagnosi di questo *Bracon* rimanga incompleta per non conoscerne la femmina, nondimeno i suoi caratteri distintivi sono tanto spiccati, che non abbiam voluto trascurare di darne notizia.

Rogas reticulator, Nees; var. *atripes*.

In tutti gl' individui del *R. reticulator* da noi raccolti i piedi sono completamente di color nero intenso e matto.

Notiamo in oltre che il terzo anello addominale in taluni è nella metà anteriore striato-rugoso e matto come i due anelli precedenti. In altri il dorso del terzo anello è interamente levigato e splendente, ovvero vi ha appena una punteggiatura finissima osservabile con forte lente. Nel rimanente sono identici a' primi. In fine le rughe dei due primi anelli in taluni sono più irregolari, in altri più intrigate.

Rogas gasterator, Jur.

Sebbene verissimo che in questa specie le rughe de' due primi anelli dell'addome sono più regolari che nella specie precedente, pure per le ragioni dette qui sopra esse sarebbero insufficienti a far ben distinguere l'una dall'altra. Il carattere più importante sta nella proporzione delle due cellule discoidali: nel *reticulator* la interna è lunga metà della esterna; nel *gasterator* è eguale ai due terzi; carattere ben notato dal Vesmael.

Rogas tristis, Wesm.

I due individui che abbiamo di Sardegna presentano due varietà non segnate nè da Wesmael, nè da Reinhard [1]). Esse sono:

a) torace rosso col solo dorso del metatorace ed il petto anteriore neri.

b) Torace rosso col solo petto anteriore nero: primo anello addominale e metà anteriore del secondo rossi.

[1]) Braconiden, IV *Rogas* — Berlin. Entom. Zeits. 1863, p. 263.

Rogas basalis, nob.

R. rufo-testaceus, metanoti vittula, abdominis dorsi segmento primo basi quartoque pectoreque medio nigris; mesopleuris crebre punctulatis, postice tantum laeviusculis nitidis; abdominis segmentis primis quatuor confertim punctato-rugulosis; alis hyalinis, stigmate fusco angulo ad basim pallido, cellula cubitali secunda parum latiore quam alta. — Long. mill. 5.

A giudicare dal colore si direbbe molto affine al *testaceus*, Spin., sebbene neppure identico: ma ne differisce organicamente per maggior robustezza, per le mesopleure più grossolanamente punteggiato-granulose, e verso il margine posteriore alquanto lisce e splendenti; per la forma della seconda cellula cubitale, che nel *testaceus* è larga il doppio dell'altezza ed un poco più lunga della discoidale posteriore, mentre nel nostro è di un quarto appena più larga che alta, e distintamente più corta della discoidale posteriore. L'abito generale poi è del *R. bicolor*, di cui lo considereremmo una varietà se le differenze nel colorito non ne sorpassassero i confini.

Rogas testaceus, Spin.

I nostri individui non eccedono i millimetri $4^1/_2$: ve n'ha taluni col corpo completamente testaceo; di quelli con solo la macchia nera sul metatorace, ed altri con questa e con una simile sulla base del primo anello addominale.

Spathius erythrocephalus, Wesm.

Se sia veramente specie abbastanza distinta dal *rubidus* di Nees non osiamo discuterlo: diremo soltanto che i nostri individui si uniformano esattamente alla descrizione del Wesmael, sopratutto pel secondo anello addominale levigatissimo senza alcuna traccia di punteggiatura. Aggiungeremo che tali si presentano ancora gl'individui delle provincie napoletane.

Ditteri

Merodon trochantericus, nob.

♂ M. pedum posticorum coxa inermi, trochantere valido, cylindraceo, ultra femoris insertionem producto ed in dentem laminarem rotundatum terminato, femore prope basim marginis inferi tuberculo crasso praedito, apophysi apicali valida 5-dentata; antennarum articulo tertio superne oblique truncato; capite niveo villoso, verticis parte antica nigro, reliqua fulvo villosa; abdominis segmento primo fascia rufa medium versus angustata et subinterrupta, secundo et tertio fasciola transversa albido villosa, illa tertii in medio angulata; tibiis basi fulvis, tarsis nigro-cinerascentibus; antennis nigro-piceis, art. tertio ad basim rufescente. — Long. mill. 12.

Variat: *tarsorum mediorum articulo primo, posticorum articulis tribus primis fulvescentibus.*

Esitammo nel pubblicare la terza memoria a dare un nome a questo *Merodon* e descriverlo, per la incertezza che esso fosse da altri descritto fuori le opere che ave-

vamo consultate, benchè non fossero poche. Proseguite però le indagini, non ne abbiamo ottenuto risultato diverso; per lo che ci siam decisi a farla conoscere.

La principale caratteristica di questo *Merodon* sta nella fattezza de' piedi posteriori. Le ànche sono troncate all'estremità, inermi. I trocanteri sono robusti, cilindracei, prolungati al di là della inserzione del femore e terminati da un dente laminare ritondato all'estremità. I femori hanno nella faccia inferiore, ed a poca distanza dalla base, un tubercolo arrotondato quasi calloso.

Merodon rubidiventris, nob.

♂. *M. coxis et femoribus, praeter apophysim apicalem, inermibus; tibiis in marginis inferi summo apice unco minuto recurvo praeditis; antennarum articulo tertio dorso oblique truncato: obscure aeneus, facie cinereo villosa, vertice anterius nigro, caeterum fulvo villoso; abdominis segmentis duobus anticis fulvo-aeneis fascia in medio angustato-interrupta et incisuris lacte rufo-fulvis, tertio fulvo fascia angulata pallidiore, ventre rufo-fulvo; tibiis fulvis annulo lato nigricante, tarsis fulvis articulis duobus ultimis nigro-cinerascentibus; antennis nigro-piceis.* — Long. mill. 14.

Il torace è di color verde bronzino splendente, con corto vello fulvo che a certa luce lascia vedere quattro strisce longitudinali più oscure. Nel resto stimiamo inutile aggiungere altro alla frase data.

La specie cui si avvicina è il *varius*.

Eumerus crassitarsis, nob.

E. obscure aeneus, albido villosus, thoracis vittis tribus postice evanescentibus cinereo puberulis; abdomine aeneo-nigro, segmentis primis tribus lunulis binis albis; tibiis basi testaceis; pedum posticorum tibiis fusiformibus ac tarsorum articulo primo valde incrassato.—Long. mill. 7.

Maschio. Antenne col terzo articolo più ampio che lungo, troncato quasi verticalmente in avanti; dalla inserzione della resta in avanti nerastro. Occhi nudi, contigui per brevissimo tratto. Faccia con vello folto, ma molto corto cenerino; il vertice con breve vello nero nella parte anteriore, fulvo nella posteriore. Torace nella metà anteriore con tre strisce di vello cenerino, le laterali allargate in avanti; altra simile striscia si osserva lungo ciascun margine laterale. Piedi posteriori con le tibie assai ristrette alla base, e quindi rigonfiate in forma di fuso: il primo articolo de' tarsi molto ingrossato.

Femina. Terzo articolo delle antenne meno corto ed anteriormente ritondato. Fronte ampia, a lati paralleli e con vello cenerino. Nel resto simile al maschio.

Miriapodi

Lithobius oligoporus, n. sp.

Sat gracilis, sublaevis, rufo-castaneus. Antennae dimidium corpus longitudine aequantes, tenues, 38-41 articulatae. Ocelli utrinque 9-11, in series 3-4 digesti (1 + 3,3,2 — 1 + 3,3,2,2). Coxae pedum maxillarium dentibus 2 + 2 parvis armatae. Lamina dorsalis nona angulis posticis modice productis, lamina dorsalis undecima et trede-

cima angulis posticis fortius productis. Pori coxales uniseriati, parvi, circulares, 2,2, 2,2. Pedes anales breves, cum pedibus paris praecedentis sat inflati, ungue simplici, infra calcaribus 0,1,3,2,0 armati; articuli primi margo lateralis calcari instructus. ♂. Long. corp. mill. 12,5; lat. 1,5. [1])

Aracnidi

Singa Simoniana, nob.

Femina. — Capotorace fulvo con due strisce, una da cadaun lato, brune. Occhi con contorno nero. Addome in avanti protratto al di sopra del capotorace, un poco sporgente ed ottusamente angoloso nel mezzo del margine anteriore; di color grigio perla, minutamente areolato di bruno: con sei grossi punti neri, due molto distanti tra loro al terzo anteriore della lunghezza, e quattro assai più ravvicinati nella parte posteriore. Piastrone sternale rosso-castagnino. Ventre con una striscia mediana bruniccia. Piedi e cheliceri fulvi con peli rigidi: piedi anteriori con due spine poco discoste nella faccia interna del femore e due lunghe e delicate nella tibia. Occhi mediani formanti un quadrato poco più ampio in avanti; i due anteriori più discosti tra loro, che i posteriori.

Molluschi

Amnicola physaeformis, nob.

A. testa breviter ovata, apice (regulariter eroso) truncata, umbilicata, limo obscure viridi sepius induta, anfractu ultimo valde obliquo; sutura profunda; apertura subovata, labro continuo, expanso, columellari libero anfractui non adpresso. — Alt. mill. 4, lat. max. 3.

Di questa *Amnicola* possediamo due individui raccolti nel Rio Coghinas, in quello stesso punto e tra le stesse piante acquatiche in cui trovammo non rara la *Physa saeprussana* ed altre varie specie. Probabilmente molti altri individui ne avremmo rinvenuti se più prolungate fossero state le nostre indagini. In ambedue gl'individui, i quali per la solidità della conchiglia rivelansi ben adulti, l'apice è troncato per rottura dei primi anfratti, e con la troncatura saldata come nella *Stenogyra detruncata*. Rimangono quindi due soli anfratti completi. Di questi il primo o superiore è trasversalmente obliquo e potrebbe dirsi in forma di cono troncato, più basso che ampio. Il secondo o inferiore è relativamente assai grande e molto convesso, in guisa da rimaner separato dal primo da rima profonda. L'apertura è grande; alta quanto la metà della conchiglia, di forma quasi ovale; il peristoma è interamente libero, a margine un po svolto; la parte esterna ampliata quasi a semicerchio, la interna quasi diritta e staccata dall'anfratto. Per tal modo il peristoma nel suo contorno prende una figura quasi semicircolare. Tra il margine columellare del peristoma e l'anfratto rimane un piccolo ombelico. Il colore esterno è brunoverdastro, l'interno del peristoma è bianco.

N. B. — Le frasi diagnostiche della massima parte delle specie qui descritte sono state pubblicate nel Rendiconto di questa stessa Accademia, fascicolo di decembre 1884; e però l'è da questa epoca che esse prendono la data.

[1] Questa descrizione è stata fatta dallo stesso distinto Miriopodologo Latzel, cui l'abbiamo comunicata.

finita di stampare il dì 4 marzo 1885.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA STORIA NATURALE DELLE ALGHE D'ACQUA DOLCE DEL COMUNE DI NAPOLI

MEMORIA

del Dott. FRANCESCO BALSAMO

premiata dalla Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Quod potui feci; faciant meliora potentes.

Scopo del presente lavoro si è di far conoscere la vegetazione algoidea che naturalmente si svolge nelle acque dolci del Comune di Napoli.

La varietà e difficoltà dell'argomento, la deficienza del tempo necessario per continuare le intraprese ricerche, le difficoltà che sono venute ad attraversarmi il cammino giustificano pienamente l'epigrafe posta in fronte al presente lavoro. Tengo però a dichiarare che non vanagloria od amor di guadagno mi spingevano a scender nell'arena (ove forse mi aspetta una sconfitta), ma solo l'amore per la scienza ed il desiderio di lavorare nel campo della botanica crittogamica che offre sempre, al naturalista che lo percorre, nuovi ed interessanti soggetti di studio.

Tessere la storia naturale di tutta una classe di vegetabili, massime dell'ordine crittogamico, nello stato presente della scienza è opera se non impossibile per un sol uomo, per lo meno difficilissima, e può essere solo il frutto di lunghi e perseveranti studi, di pazienti ricerche e continue osservazioni. Le artificiali coltivazioni, per le quali si possono seguire le diverse fasi evolutive di una specie, richiedono tempo moltissimo ed opportunità di mezzi, dei quali non sempre è dato di poter disporre. Cresce ancora la difficoltà per la scarsezza dei materiali di riscontro e per la impossibilità di aver per mano parecchie importantissime opere, in specie straniere, le quali o sono rarissime o sparite dal commercio librario, ovvero giacciono ignorate negli scaffali di qualche biblioteca.

Per quanto l'argomento il comporta, il presente lavoro va diviso in due parti. Nella prima premetto alcune note generali sul comune di Napoli, campo del nostro studio e

quindi accenno alla raccolta e preparazione delle alghe d'acqua dolce, ed alla loro distribuzione nei limiti stabiliti dal programma, rimandando il lettore, per una più ampia esposizione degli argomenti, alle opere che li trattano. Ed è perciò che ho creduto di notare per ciascun capitolo la bibliografia dell'argomento, allo scopo di evitare le ripetizioni di cose dette da altri; esponendo distesamente soltanto le mie osservazioni.

La seconda parte si apre col prospetto sistematico della classificazione seguíta e comprende il censimento di quelle specie, che, nei confini stabiliti dal programma, ho potuto raccogliere e determinare. Le specie però che sono state riportate dagli autori come reperibili nel Comune di Napoli e che non ho potuto ancora rinvenire, sono state notate con asterisco e distinte colla sola citazione di sinonimi e figure.

S'accompagna allo scritto una raccolta di esemplari delle specie descritte, ordinata sistematicamente, con numero d'ordine, che trova il riscontro nelle descrizioni delle relative specie. In molti esemplari di Diatomee sono mescolate più specie; non essendo sempre possibile il dividerle, sia per la tenuità degli individui, sia per la esiguità e scarsezza del materiale; in questi casi lo stesso numero trovasi ripetuto sotto diverse specie.

Offrendo adunque questo mio qualsiasi lavoro sulla vegetazione algoidea del Comune di Napoli, intendo di dare soltanto un saggio della flora arcaniflora di questa regione, e però nel sottoporlo al giudizio di cotesta illustre Accademia, son costretto a ripetere:

Quod potui feci; faciant meliora potentes.

Elenco delle principali opere consultate e citate nel presente lavoro

Ann. Sc. Nat. — Annales des Sciences Naturelles (Botanique). Serie I-VI.

Ardiss. Ligur. — Ardissone e Strafforello. Enumerazione delle Alghe della Liguria. Milano, gr. 8°, 1877.

Atti Soc. Critt. — Atti della Società Crittogamologica italiana, vol. I-II.

Bary Conjug. — Bary (A. de). Untersuch. über d. Fam. der Conjugaten etc. Leipzig, 4°, mit. 8. Taf. 1858.

Borzi Ficocr. — Borzi (A.). Note sulla morfologia e biologia delle Alghe Ficocromacee. Firenze 1878, con tavole.

Bot. Central. — Botanisches Centralblatt etc., 1880-1884.

Brébissonia. — Brébissonia. Recueil de Botanique cryptogamique, redigée par Huberson. Paris, volume II-III.

Brun. Diat. — Brun (J.). Diatomées des Alpes et du Jura, de la région suisse et française. 8° av. 9 pl. Paris 1880.

Castrac. Diat. — Castracane (Conte Abb. Francesco). Istruzioni per chi voglia raccogliere Diatomee. Roma, 8°, 1874.

Castrac. Mem. — Memorie diverse sulle Diatomee.

Ces. Bibliogr. — Cesati (Barone V.). Saggio sulla Bibliografia Algologica italiana (Atti Soc. dei XL, 1882.

Cooke Alg. — Cooke. British freswater Algae. Parte I-VIII, 8°, con tav. color. London 1882-84.

Corti Trem. — Corti. Memoria sulla Tremella. Lucca, 1774.

Delp. Desm. — Delponte (J. B.). Specimen Desmidiacearum subalpinarum. 4°, con tav. Torino 1873.

De Not. Nostoc. — De Notaris (G.). Hormpsiphon e Nostoc. Comm. Soc. Crittogam. ital. 8° gr. Genova 1861.

De Not. Desmid. — De Notaris. Studii sulle Desmidiacee italiche etc. Genova, 4°, con tav. 1867.

Dillw. Conf. — Dillwin. Grossbritannien Conferven. etc. (ex p.)

Ehr. Microg. — Ehrenberg. Mikrogeologie etc. Leipz. 1854, (fol.).

Fior. Nostoc. — Fiorini Mazzanti (Elisabetta). Sull'identità del Nostoc con il Collema. Roma 1857.

Fisch. Nostoch. — Fischer. (L. H.) Beitrage zur Kenntniss der Nostochaceen. Bern 1853.

Grevillea. — Grevillea. A quarterly record of cryptogamic Botany etc. London, 8°, 1872-84.

Jacobs. Desmid. — Jacobsen. Aperçu systématique et critique sur les Désmidiacees de Dannemark. In 8°, 1874.

Just. Bot. Jahr. — Just. Botanischer Jahresbericht. etc. vol. I-IX (1873-84).

Kütz. Phyc. gen. — Kützing (F. Tr.) Phycologia generalis oder Anatomie, Physiologie, und Systemkunde der Tange. Leipzig 1843 (mit. taf.)

« *Sp. Alg.* — Species Algarum. Lipsiae 1849, 8°.

« *Bacill.* — Die Kieselschaligen Bacillarien oder Diatomeen. Mit. 30 Taf. Nordhausen 1865.

« *Tab. Phyc.* — Tabulae. Phycologicae oder Abbildungen der Tange. Bd. I-XX, 1845-70.

Menegh. Organogr. — Meneghini (G.). Cenni sull'Organografia e Fisiologia delle Alghe. Padova 1838.

Menegh. Nostoch. — Monographia Nostochinarum italicarum addito specimine de Rivulariis. Augustae Taurinor. 1842, 4° (con tav. color.)

Menegh. Diatom. — Sull' animalità delle Diatomee e revisione dei generi di questa famiglia. Padova 1846.

Naeg. Alg. — Naegeli. Gattungen einzelliger Algen. etc. mit. 8 Taf. Zürich 1849.

Nordst. Desmid. — Nordstedt et Wittrock. Desmidiaceae et Oedogonieae in Italia et Tyrolio collectae etc. Stockholm 1876 (8°, con 2 tav.).

Petit. Spirog. — Petit (P.) Spirogyra des environs de Paris etc. Paris, 8°, con 9 tav., 1880.

*

Pfitzer Bacill. — Pfitzer. Ueber Bau und Entwickl. der Bacillariaceen (in Bot. Abhandl. v. Hanstein). Bonn. 1871.

Poll. Veron. — Pollini. Flora Veronensis etc. vol. III, 1822.

Quart. Journ. — Quarterly Journal of microscopical Science. Ser. I, II. London, 8°, con tav., 1853-83.

Rabenh. Diat. — Rabenhorst. Die Süswasser Diatomaceen (Bacillarien) etc. Leipz., 4°, mit. 10. Taf. 1853.

« *Beitr.* — Beiträge zur näheren Kenntniss und Verbreitung der Algen. Heft. I-II, 1864-65.

« *Eur.* Flora Europaea Algarum aquae dulcis et submarinae. 3 vol. 8°, Leipz. 1864-68.

Schum. Diat. — Schuman. Die Diatomeen der Hohen Tatra. 8°, con 4 tav., 1867.

Van Heurk. Syn. — Van Heurck (D. H.). Synopsis des Diatomées du Bélgique. Planches photolitogr. Anvers 1880-83.

Vauch. Hist. — Vaucher. Histoire des Conferves d'eau douce etc. Paris, 4°, 1801.

EXICCATA

Erb. Critt. — Erbario crittogamico italiano. Serie I e II, 1856-83.

Eulenst. Diat. — Eulenstein. Diatomacearum Species typicae. Centuria I (la sola pubblicata e rarissima). Stuttgart 1867.

Rabenh. Alg. Sachs. — Rabenhorst. Algen Sachsen respect. Mitteleuropa's (decades plur.)

« *Alg. Eur.* — Algen Europa's (meno le ultime decadi).

Moug. Roumg. Alg. Fr. — A. Mougeot, Ch. Manoury, et C. Roumeguère. Algues terrestres et fluviales de la France. Cent. I-V, 1883-85.

ALGHE D'ACQUA DOLCE DEL COMUNE DI NAPOLI

PARTE PRIMA

I. — Cenno sul Comune di Napoli.

Sulle rive incantevoli del Mar Tirreno al 40°51 45" di latitudine boreale, ed al 14°15 4 di longitudine orientale, dal meridiano di Greenwich, sorge il Comune di Napoli, formato dalla città e dai vicini sobborghi con una superficie di circa 8000000 di metri quadrati.

La città di Napoli stendesi ad anfiteatro sopra una serie di colline semicircolari, che la ricingono per tre lati, specchiandosi tutta nelle limpide acque del suo golfo, che la bagna al sud, ed avendo ad oriente l'ignivomo *Vesuvio*, dirimpetto l'isola di *Capri*, e ad occidente le altre isole di *Nisida*, *Procida*, ed *Ischia*, che colla prima si bagnano nelle onde azzurrine del golfo.

La limpidezza del cielo, l'amenità naturale del luogo e la mitezza dell'aere, rendono il soggiorno in Napoli oltremodo delizioso. Imperciocchè la temperatura della està e dello inverno, non è eccessiva, e quindi il clima ne è dolce, avendosi una media temperatura di 15°7, cioè 23°7 media estiva; 9°1 media invernale (Giordano) con un massimo estivo di 38°7; ed un minimo invernale di — 5°8, che però rarissimamente si raggiungono. La temperatura diurna presenta un massimo verso le ore 2 p. m. ed un minimo due ore prima del levare del sole.

Il barometro oscilla con massimi e minimi di 772 mm. (Gennaio e Giugno) e 705 in Aprile ed in Novembre.

Oltre le brezze di terra e di mare che temperano gli eccessivi calori della state, i venti che predominano in Napoli sono: il S,SO da ottobre a Marzo ed ordinariamente apporta pioggia; ed il N,NE che suole spirare da Aprile a Settembre. Quello che più fassi sentire sulla città è lo Scirocco, mentre i venti boreali han poca durata. Le piogge sono più frequenti dopo il levar del sole e verso il mezzodì; le estive più abbondanti e tempestose, le autunnali più continue ed uguali. In tutto l'anno si contano in Napoli 80 giorni piovosi, 120 variabili, 90 sereni; distribuiti così: 18 alla primavera, 8 alla està, 30 all'autunno e 24 all'inverno. La media annua di pioggia è di 0m,80 (Giordano).

Il suolo della città e contorni è essenzialmente vulcanico, formando parte di quell'importantissimo distretto vulcanico detto dei *Campi Flegrei*, che estendesi da Napoli a Cuma. I vulcani di questa regione restano ad occidente di Napoli e sono divisi dal Vesuvio, che sorge all'oriente, dalla pianura bagnata dalle acque del fiume Sebeto. Le colline che circondano la città sono formate da una serie di crateri a ricinti semicircolari, distrutti ed aperti dal lato del mare e che da oriente ad occidente si possono distinguere in due gruppi. Il primo cratere orientale forma le colline di *S. Maria del Pianto*, di *Capodichino* e *Miradois*, terminandosi all'Osservatorio Astronomico; il secondo comprende le colline di *Capodimonte*, dello *Scutillo* e di *S. Eramo*, anch'esso distrutto dal lato del sud, meno qualche avanzo che si osserva nel R. Osservatorio di Marina e

nella contrada di S. Teresa. Dalla vétta di S. Eramo una serie di colline si abbassa sino al *Castello dell'Ovo* ed a *Pizzofalcone,* costituendo parte dell'antico *Monte Echio.*

Le rocce che formano il suolo di Napoli appartengono a due distinte formazioni; una inferiore di tufi, l'altra superiore di lapilli, puzzolane e sabbie stratificate; come di leggieri si rileva negli spaccati verticali del terreno.

Il tufo di color giallastro, compatto, poco duro, in guisa che si lascia tagliare dal martello del muratore, è l'unica pietra che si adopera nelle costruzioni in Napoli. È formato da detriti vulcanici con frammenti di sostanze vetrose, pomici nere (d'ordinario fibrose da mentire il legno fossilizzato), trachite compatta con cristalli di feldspato bianco ed in taluni punti (*Cave di Posilipo* e delle *Fontanelle*) incontra di vedervi fossilizzate conchiglie di più ragioni; tutte però marine e che attestano colla loro presenza l'origine di quella roccia. Il tufo non abbonda dovunque ugualmente: scarso nella collina di *Capodichino*, divien potente a *Capodimonte*, alle *Fontanelle,* a *Posilipo,* ove si pratticano cave per pietra da costruzione. Questo strato di tufo scende fin quasi a 53 metri di profondità o più, poggiando sopra strati di sabbie e lapilli vulcanici poco coerenti, cui seguono rocce marnose di spettanza del terreno terziario. Al di sopra del tufo àvvi uno strato, ove più ove meno spesso di lapillo, sabbie, pozzolane e pomici vulcaniche; per lo più distintamente stratificate, meno in qualche punto, come nella collina di Posillipo, ove il tufo ed i lapilli si alternano in modo irregolare. Al di sopra di queste sabbie stratificate trovasi la terra vegetale, fatta dalla decomposizione superficiale di esse rocce e delle piante che vi allignano. Il terreno è di color grigio con cristallini di feldspati, e la sua qualità magra è temperata dall' *humus;* ritiene l'umidità e produce cogli acidi leggera effervescenza.

La pianura che si stende tra le colline ed il Vesuvio e che è bagnata dal Sebeto, può dirsi una continuazione di quella della Campania e che si protrae sino al golfo di Napoli tra i due ordini dei detti vulcani. Le rocce, tutte di origine ignea, hanno al di sotto di esse strati di antichissime lave derivanti dal Monte Somma. Una gran parte di questa pianura è posta a coltivo, e presso Napoli prende il nome di *Paludi* per alludere più alla quantità di acque che la irrigano che alla natura del terreno.

Quel fiumicello che ad oriente della città di Napoli scorre attraverso le paludi e quindi mette foce nel mare pel *Ponte della Maddalena*, fu tenuto da molti per l'antichissimo *Sebeto*, celebrato da Virgilio, Stazio e Columella[1]). Tali lo credevano il Pontano, il Sannazzaro, Ambrogio Nolano ed altri illustri uomini che trattarono delle vicende della città di Napoli. Ma però il Lettieri rinomato Tavolario napolitano del secolo XVI, poggiandosi sopra osservazioni proprie e sulla non remota antichità delle *paludi* di Napoli, affermò essere quello il fiume *Rubeolo*, così detto dal colore delle sue acque, e che il nome di *Sebeto* derivasse invece dalla valle di *Sabato*, nel territorio di

[1])
Nec tu carminibus nostris indictus abibis
Oebale, quem generasse Telon Sebethide nympha
Fertur, Teleboûm Capreas cum regna teneret.
VIRG. *Aen.* VII.

Ceubois et pulchra tumeat Sebethos alumnia.
STAZ.

Doctaque Parthenope Sebethide roscida lympha.
COLUM.

Serino, donde traeva origine un antichissimo aquedotto, che raccogliendo le acque da varie sorgenti, passava per Napoli e giungendo sino a Pozzuoli, mettea capo nella *Piscina mirabile*.

Anche senza voler discutere la solidità degli argomenti addotti da questo scrittore, non si può negare l' esistenza dell' antichissimo fiume Sebeto; e però è a ritenersi come più fondata l'opinione dello storico Carletti [1]), il quale dimostra esser il Sebeto scomparso dalla superficie sulla quale fluiva, per sconvolgimenti verificatisi nel suolo della città, e però condursi al mare per occulto speco.

Il fiume Rubeolo adunque, che noi chiameremo tuttora Sebeto, e che oggi fluisce all'est di Napoli, è distinto dal volgo col nome di *Fiumicello*, e ben a ragione, per la scarsezza delle sue acque. Le quali originandosi alle falde del Vesuvio, nel luogo detto la *Bolla* o *Volla*, dividendosi e suddividendosi in mille tortuosi canali, scorrono ove limpide e tranquille, ove più rapide e torbide e servono alla irrigazione delle paludi poste a coltivo, animando ancora diversi mulini.

Tra mezzo alle paludi sono i così detti *Pascioni* o *Pasconi*, luoghi piani ed incolti, che producono pascolo naturale, più o meno adatto per la pastura di animali domestici. Attraversati da molti rigagnoli, chiazzati qua e là da acque stagnanti, il suolo ne è umido ed acquitrinoso ed il pascolo mediocre, essendo le erbe che vi crescono assai ricche di umore. Dei quattro pasconi che sono all'est di Napoli tre sono posti tra le paludi, cioè il *Pascone grande*, il *Pascone piccolo* o *Pasconcello* ed il *Pascone Capece;* l'altro resta nella contrada detta *Volla*.

In questi pascioni e lungo i rigagnoli del fiume il botanico escursionista può far bella messe di piante acquatiche; e coll'*Alisma Plantago*, la *Mentha aquatica*, la *Veronica Anagallis*, raccoglierà, ove le acque lentamente fluiscono, la *Hydrocotyle natans*, lo *Sparganium ramosum*, il *Cyperus fuscus* ed altri; mentre nel mezzo dei pascioni troverà belle piante, come: la *Mentha viridis b. neapolitana*, Guss., dall'odor soave di cedro, che potrà raccogliere nel mezzo del Pascone Capece, insieme al raro *Polygonum serrulatum*, L. ag., che ivi abbiamo raccolto sin dal 1875. Altrove potrà rinvenire le piante più rare di quella località, quali: l'*Utricularia vulgaris*, la *Tussilago sebetia*, Ten., il *Lythrum Graefferi*, la *Zapania repens*, insieme a molte altre che sono proprie dei terreni acquitrinosi ed irrigui.

Ma assai più ricca è la vegetazione arcaniflora del gruppo delle idrofiti. Imperciocchè il fondo dei rigagnoletti è tappezzato da spessi Potamogeti e Miriofilli, che insieme alle Chare dànno presa a molte e svariate Diatomee; mentre alla superficie delle acque galleggiano in masse Spirogire e Conferve e spesso abbondantemente il *Pleurocarpus mirabilis;* mentre l'*Oedogonium tenellum* ed il *Nostoc gymnosphaericum* vivono attaccati ai rami del *Myriophyllum*. Sulla terra umida vengono il *Phormidium vulgare*, l'*Oscillaria limosa*, la *Vaucheria geminata*, che si alternano con masse giallo-brune di *Nitzschie* e *Navicule*. Ed ove l'acqua ristagna formando pozzanghere più o meno estese, ivi svolgesi una ricca vegetazione di Diatomee, che si annunziano col color giallo-bruno del fondo, e con la presenza di spuma leggiera o bollicine d'aria alla superficie dell'acqua, indizio certo della presenza di questi esseri.

[1]) Carletti, *Topografia universale della città di Napoli e della Campagna Felice*. Napoli 1776.

Nelle acque del Sebeto, come in generale nelle altre località del comune il gruppo delle Desmidiacee è scarsissimamente rappresentato da tre soli generi, cioè *Closterium*, *Cosmarium* e *Staurastrum;* mentre esse abbondano nelle acque stagnanti e nelle torbiere dell'Italia superiore, come ne fanno fede i lavori del De Notaris e di G. B. Delponte. Ciò che impedisce per altro la regolare produzione ed il pieno sviluppo della vegetazione algoidea nelle acque del Sebeto si è il ripulimento periodico dei canali; necessario tuttavia onde impedire e combattere la produzione del miasma palustre e nel tempo stesso facilitare lo scolo delle acque per la irrigazione di quei terreni.

II. — Raccolta e preparazione delle Alghe.

Bibliografia. — Oltre a numerose note dei periodici di tecnica microscopica, specialmente il *Quart. Journ. of micr. Science* (1853-83), possono consultarsi le seguenti opere:

Castracane — Istruzioni per chi voglia raccogliere Diatomee. Roma1875 — Pelletan (J.) Le Microscope. Paris 1876, pag. 496-582 — Edwards Johnston and Smith, Practical direct. for collecting and preserving Diatoms etc. N. Y. 1877 — Van Heurck. Le Microscope etc. 3e éd. 1878, pag. 255-341 — Nave (J.) Collector Handbook of Algae, Diatoms, Desmids, Fungi etc. 3e éd. Lond. 1882 (pag. 1-86) — Chevalier (D.A.) L'Étudiant Micrographe etc. (pag. 510-522) 1882 — Behrens (W.) Hilfsbuch zur Ausführung mikroskop. Untersuchung. (1883), pag. 135-136.

La classe delle alghe comprende quei vegetabili dell'ordine crittogamico che vivono nelle acque marine, e nelle acque dolci: come pure sulla terra e sulle mura umide, sui vecchi tronchi degli alberi; ovvero vivono parassite, come la maggior parte delle Diatomee, sulle altre piante galleggianti o sommerse, e sulle pietre continuamente bagnate dallo scorrere delle acque. Dovendo occuparci soltanto delle alghe che vivono nelle acque dolci, troveremo un vastissimo campo di studio là dove queste acque non difettano, vuoi sotto forma di fiumane, di torrenti, di laghi, vuoi ristrette e stagnanti tra le inuguaglianze del suolo, sotto forma di paludi, di stagni, di pozzanghere, ordinaria dimora di numerose specie vegetali microscopiche. Concorre allo sviluppo della vegetazione di questi esseri l'umidità ed il calore; sebbene in tutti i climi, sotto tutte le latitudini ed a qualsiasi altitudine, sia dato al botanico di poter fare più o meno ampia raccolta di alghe. Imperocchè v'hanno specie che vivono nelle acque delle pianure e delle valli alla naturale temperie del luogo; altre che sviluppansi sulle altissime vette nevose delle alpi, vivendo nelle acque dei ghiacciai e tra le nevi perpetue, come fanno appunto le Diatomee, le quali, senza alterarsi, resistono alle basse temperature e dopo la disseccazione riprendono vita non appena sono a contatto colle acque [1]). Altre invece prediligono le temperature elevate; come sono quelle delle stufe naturali e delle terme, e vegetano rigogliosamente ad una temperatura di ben 50 gradi, od anche maggiore [2]).

In tutte le stazioni si possono, più o meno secondo i luoghi ed il clima, raccogliere

[1]) Brun, *Diatomées des Alpes et du Jura,* pag. 3.

[2]) Pedicino, *Pochi studii sulle Diatomee viventi presso le terme dell'isola d'Ischia.*—(Atti Accad. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, Vol. III, n. 20, con 2 tav. 1867.) — Lo stesso: *Poche osservazioni sulla vegetazione presso le terme.* — (Rendic. Accadem. delle Sc. di Nap. 1873, pag. 60). Io ho raccolto diverse oscillarie nelle vasche di Gurgitello a Casamicciola (Ischia) ed all'orifizio delle fumarole di *Cacciuto.*

le alghe: però la fine dello inverno ed il principio di primavera sono favorevoli specialmente per far raccolta di specie in via di riproduzione. I Closterii ad esempio compiono le loro fasi riproduttive tra l'aprile e maggio (Morren [1]); le Spirogire alcune in primavera, altre in autunno. Per le Diatomee il tempo della fruttificazione (o formazione di auxospore) è tra i mesi di aprile e settembre; come risulta dallo elenco riportato da Pfitzer [2]) in cui sono registrate 71 osservazioni di formazione di auxospore, il maggior numero delle quali (24) appartiene ai mesi di marzo, aprile e maggio.

La raccolta delle specie che vivono nelle vasche, nelle fontane come di quelle che vengono sulle mura e sulla terra potrà farsi in ogni tempo; non così per quelle alghe che vegetano nei canali e corsi d'irrigazione, specialmente se questi siano soggetti al ripulimento periodico, come è per la maggior parte dei rigagnoli del Sebeto. Ivi la raccolta delle alghe è affatto accidentale, e dipende dalle condizioni in cui quei canali si trovano.

Le specie truncicole come: *Scytonema truncicola*, *Pleurococcus vulgaris*, alcune Gleocapse ecc.; i *Nostoc*, le *Oscillarie*, i *Phormidium*, che vengono sulla terra umida; le specie che vegetano tra i muschi o sulle mura umide, si possono più facilmente raccogliere in una giornata caldo-umida, o meglio appena dopo le piogge. Allora soltanto alcune si rendono visibili (*Nostoc commune, muscorum* etc.) ed anche assai facilmente si staccano dal sostrato cui aderiscono, e si prestano meglio per le preparazioni d'erbario.

Gli strumenti necessarii per raccogliere le alghe si riducono semplicemente ad un cucchiaio o navicella di rame, o di latta con bordi sottili e fatto in modo da potersi adattare alla estremità di un bastone o di una canna da entomologo; un pezzo di garza finissima teso sopra un anello in filo di ferro, per la raccolta delle specie microscopiche galleggianti (*Diatomee*, *Desmidiaceae*, *Palmellacee*); un piccolo uncino con cordicella per afferrare le alghe filamentose. Finalmente completano il corredo del raccoglitore una serie di tubi di vetro forte con turacciolo di sughero, delle bottigline, ed un microscopio tascabile, od invece una lente Coddington ed uno Stanhope; la semplice lente comune è insufficiente. Le carte oliate e rese impermeabili colla vernice, o meglio pezzi di tela impermeabile, potranno servire per avvolgervi i muschi umidi o bagnati, dai quali potranno ricavarsi diverse specie di Diatomee.

Nei limiti del Comune di Napoli ed anzi nella stessa città troviamo acque fluenti e stagnanti, aquarî e vasche, che forniscono al botanico collettore abbondante materiale di studio. E non solo di acque potabili, ma pure di mineralizzate troviamo nella città e dintorni varie sorgenti. Ma di queste non è mestieri tener parola, non comportandolo l'indirizzo del presente scritto; limitandoci adunque alla vegetazione algoidea delle acque dolci, troviamo in quelle del Sebeto e nelle vasche della città, vastissimo campo di ricerche.

L'algologo che avesse vaghezza di studiare la flora del comune di Napoli, potrà anzi tutto dirigere i suoi passi ai Pasconi ed alle acque del Sebeto. Ivi se non svariatissime specie, per la uniformità delle condizioni locali, troverà abbondanza di materiale da raccolta. Nei numerosi rigagnoli nei quali si dividono le acque, che sono tutte lentamente fluenti o stagnanti, potrà raccogliere abbondantemente: il *Pleurocarpus mi-*

[1]) Memoire sur les Closteriées (Ann. Sc. Nat. Serie II, vol. V, p. 259).
[2]) Ueber Bau und Entwickelung d. Bacillariaceen. pag. 163-165.

rabilis, insieme a *Spirogyra flavescens*, *Vaucheria caespitosa, Oedogonium tenellum;* mentre sulle Chare, Potamogeti e Miriofilli, che tapezzano il fondo di quei rigagnoli, farà incetta di diatomee. Abbondano: *Melosira varians*, *orichalcea*, *Synedra Ulna*, *Epithemia turgida*, *gibba*, *Cocconeis Pediculus* (formae variae) *Gomphonema constrictum* etc. Nelle pozzanghere e tra le radici delle piante acquatiche: *Nitzschia Palea*, *tenuis*, etc. *Navicula cryptocephala*, *sphaerophora*, *cuspidata; Pleurosigma attenuatum, scalproides; Meriodion circulare* (Cesati!); insieme ad *Oscillarie* e *Phormidium*.

Sulla terra umida: le diverse *Vaucherie*, i *Phormidium vulgare*, *pubblicum*, *Oscillaria brevis* ecc. e nei viali umidi dei giardini il *Nostoc commune* e *Botrydium granulatum*.

Sulle mura umide il *Pleurococcus vulgaris*, *Protococcus viridis*, *Gleoocapsa murorum*, *Chroococcus minutus* etc.; ed alla base delle mura di campagna abbondante il *Porphyridium cruentum*. Tra i muschi e le epatiche che vengono sulle mura e su i vecchi tronchi degli alberi, vegetano pure diverse diatomee come: *Achnanthidium microcephalum*, *Navicula amphisboena, elliptica, Amphora ovalis, minuta, Cymatopleura apiculata*.

È da notare sotto gli stillicidi dei canali e sui tronchi umidi, la presenza di una graziosa diatomea, la *Melosira Roeseana var. spiralis*. È questa una specie nuova per la località, non trovandola neanco notata nella Flora del Rabenhorst.

Le vasche delle fontane danno abbondante raccolta. Le Spirogire (*S. quinina*, *trassa, arcta, orthospira, decimina* ecc.) ivi trovansi riunite alla *Cladophora glomerata*, *Cl. fracta* (forme diverse), *Cl. insignis*, — *Conferva fontinalis*, *bombycina;* mentre le Desmidiacee, Pediastree sono rappresentate da *Closterium Lunula*, *moniliferum*, *Dianae, acerosum; Cosmarium Botrytis*, *Staurastrum hirsutum;* le *Micrasterias*, *Euastrum* e tante altre forme che abbondano nell'Italia superiore, qui *non sono affatto* rappresentate. Gli Scenedesmi (*Sc. acutus, obtusus, quadricauda*) invece sviluppansi dappertutto; rari sono pure i Pediastri (*P. Boryanum*). Frequentissimi ed in certe epoche abbondanti gli *Oedogonium* (*Oed. capillare*, *vesicatum* ecc.) e tra le diatomee la *Melosira arenaria* (Villa comunale!) *Diatoma vulgare*, *Navicula radiosa*, *Pinnularia viridis*, *Navicula cuspidata*. Il *Nostoc sphaericum* trovasi alcune volte sulle pareti delle vasche, e soltanto in quelle del R. Orto Botanico la *Gomphosphaeria aurantiaca*.

Le cadute d'acqua che animano i mulini e che sono comprese nei limiti del Comune, sono tutte incanalate e chiuse, e perciò è impossibile conoscerne le condizioni della vegetazione crittogamica.

La preparazione delle alghe d'acqua dolce ha per iscopo la conservazione delle specie per le collezioni e per lo studio; quindi vi hanno preparazioni d'erbario e preparazioni microscopiche. Le preparazioni d'erbario o le *exiccata*, come quelle che si accompagnano a questo scritto, variano secondo la quantità e la qualità del materiale disponibile e non possono, come è chiaro, riuscire soddisfacenti e nette se non quando vi sia abbondanza di materiale puro. In generale bisogna distinguere le preparazioni delle alghe in generale da quelle delle diatomee. Le prime (Cianoficee, Cloroficee ecc.) si preparano su carta, su mica o su vetrini, secondo la grandezza e sviluppo delle specie. Le alghe filamentose si preparano su carta; ma però gli esemplari fruttificati vanno posti su vetri per potersi osservare al microscopio senza alterarli. Le specie di Spirogi-

re, Conferve ecc. conservate e preparate a secco hanno ben poco valore; poichè le fasce di clorofilla colla disseccazione si contraggono e si disfanno per modo che è impossibile definire la specie. L' unico modo di conservare le Spirogire è in preparazioni microscopiche [1]).

Le diatomee per l'erbario si preparano o *in situ,* cioè con dissecare le specie su cui vivono, ovvero isolandole mercè lavande d'acqua acidulata, e quindi per successive decantazioni ottenendo le diatomee pure. La massa si può mettere su vetro o su carta; ovvero purificarla trattandola con la ebullizione in acido cloridrico o nitrico, e quindi lavando sino all' insipidezza, poscia calcinando il deposito. Se abbondano le materie organiche si tratta la massa con acido nitrico e bicromato potassico e prolungando la ebullizione 10-15 minuti; lavato il deposito si asciuga e si calcina su lamina di mica. Si badi però che mentre le specie adulte e con silice robusta resistono a questo trattamento, parecchie specie giovani e alcune Nitzschie si disfanno quasi in tutto e quindi vanno perdute per l'osservazione.

Le preparazioni microscopiche delle alghe in specie clorofillose se non presentano veruna o quasi difficoltà manuale, riescono difficili a conservarsi lungamente. E per vero tutti i liquidi proposti per la conservazione delle alghe verdi, come l'acqua canforata, il liquido di Twaites, la glicerina gelatinata (raccomandata dal Nordstedt) non sempre corrispondono nel fatto. Io ho avuto a lodarmi del liquido conservatore proposto dal Petit [2]), poichè *conserva benissimo* il color verde della clorofilla, anche dopo molto tempo e non disforma le fasce delle Spirogire; mentre gli altri liquidi le alterano più o meno. Ecco la formola data dal Petit pel suo liquido conservatore:

Acqua satura di canfora	50 gr.
Acqua distillata	50 »
Acido acetico cristallizzabile . . .	0 » 50
Cloruro di rame cristallizzato . . .	0 » 20
Azotato di rame cristallizzato . . .	0 » 20

Si faccia sciogliere il tutto e si filtri.

Il mastice che si adopera è il bitume, una soluzione di gomma dammara in benzina od anche una soluzione alcoolica di ottima ceralacca da suggellare.

Le diatomee si preparano a secco o nei diversi mezzi più o meno refrangenti, come il balsamo del Canadà (soluzione in essenza di trementina o cloroformio); la soluzione di fosforo, il monobromuro di naftalina [3]) e lo storace liquido, proposto recentemente da Van Heurck [4]). Io ho adoperato ancora una soluzione di gomma copale in benzina; quella stessa che serve a saldare i preparati. È preferibile però al monobromuro di naftalina, col quale le strie delle diatomee si risolvono benissimo, lo storace (soluzione di storace in benzina pura), il quale pure corrisponde ottimamente per la risoluzione delle strie e non presenta le difficoltà del monobromuro di naftalina nella saldatura del preparato.

[1]) Langerheim nel *Botan. Centralbl.* (Bd. XVIII 1884, pag. 183, rif. nel *Zeitscher für Wissensch. Mikrosk.* I, 1884, pag. 508) propone un metodo di preparazione delle alghe microscopiche secche, Desmidieae, Oedogonieae ed altre, bagnandole prima con acqua e poscia aggiungendo 1 o 2 gocce di soluzione d'idrato potassico (1 : 5) con aggiunta di glicerina. Distese le alghe sul porta oggetti, le riscalda leggermente con lampada ad alcool, ed allora esse si rigonfiano e riprendono il loro aspetto naturale.

[2]) *Brébissonia*, anno III, p. 92. Oltre la formola del Petit, sono riportati altri liquidi conservatori a pag. 164-108, l. c.

[3]) *Journ. of Roy Micr. Soc.*, 1880.

[4]) *Journal de Micrographie*, di J. Pelletan, 1883, pag. 439.

*

PARTE SECONDA

I. — Prospetto di classificazione delle alghe di acqua dolce.

> Una razionale ed inappuntabile classificazione delle Tallofite sarà solo allora possibile quando, per i principali tipi di esse, siano ben cognite tutte quante le fasi della loro vita. Molto già si è fatto in questo senso, ma molto resta ancora a farsi.
>
> F. Delpino nella *Rivista di Botanica dell'Annuar. Scient. ed Industr.* di E. Treves, 1880 pag. 367.

Ad onta degli studi di distintissimi e numerosi botanici, la scienza non ancora ha detto l'ultima parola sulla classificazione delle Alghe. Proporre quindi un nuovo sistema, dopo quelli elaborati da valenti crittogamisti quali il De Bary, il Gobi, il Winter, per non dire degli altri che li precedettero, potrebbe sembrare pretenzioso, o per lo meno superfluo in un lavoro d'indole puramente locale. Io non pretendo con questo di elevarmi ad autore di sistematica in un ramo così difficile come è lo studio delle alghe; ma soltanto esporre (in via affatto precaria e con tutte le possibili riserve) il metodo che ho tenuto nell'ordinare le famiglie, che andrò enumerando nel presente lavoro. Avrei seguito per i gruppi, la classifica dell'autore della *Flora europaea Algarum*, se quella non si trovasse alquanto discorde colle nuove classifiche dettate dal progresso degli studî di algologia.

Prendendo quindi per base di classificazione la natura del pigmento, per la sua importanza fisiologica nella vita vegetativa delle alghe, distinguo queste in tre gruppi cioè: *cianoficee, cloroficee* e *feoficee*. In ognuno di questi le differenze nella riproduzione forniscono altre divisioni, sebbene non assolute, avuto riguardo alle forme che rappresentano gli anelli di passaggio tra l'una fase sessuale e l'altra, e che mal si prestano ad un rigoroso ordinamento sistematico. Così le cianoficee verrebbero divise in *nematoschizeae (mihi)* cioè forme filamentose moltiplicantisi per semplici divisioni *(Oscillarieae)* e *schizosporeae* moltiplicantisi per spore ed eterocisti; distinte in *nematogenae (Nostochaceae, Scytonemaceae, Rivulariaceae)* ed in *gloeogenae*, che moltiplicansi per divisione del tallo in 3 direzioni *(Chroococcaceae)*. Le cloroficee poi l'ho distinte, secondo la riproduzione, in *zigosporee* (Conjugatae) *zoosporee* ed *oosporee*; le prime in pluricellulari seriate i cui filamenti si riuniscono a due a due nel conjugamento, e perciò ho adottato il nome di *zygonemateae (Zygnemaceae, Mesocarpeae)* e in unicellulari a fitocisti distinti o raramente seriati: *zygocysteae (Desmidiaceae)*. Le altre divisioni delle *zoosporee* ed *oosporee* sono coordinate alle vedute della maggior parte degli algologi moderni, come rilevasi dal seguente specchietto. Le *feoficee* in ultimo comprendono le sole *Diatomaceae*, che per la loro riproduzione si collegano al gruppo delle *Desmidiaceae*. Ecco l'ordinamento che ho dato ai singoli gruppi:

Alghe d'acqua dolce

- I. CYANOPHYCEAE
  - NEMATOSCHIZEAE *(mihi)* . . . . . *Oscillariaceae*
  - SCHIZOSPOREAE . . . . . .
    - Nemotogenae . . *Nostochaceae*, *Scytonemaceae*, *Rivulariaceae*
    - Gloeogenae . . . *Chroococcaceae?*
- II. CHLOROPHYCEAE
  - ZYGOSPOREAE. . . . . (*excl. Diatomaceae*)
    - Zygonemateae . (*mihi*) *Zygnemaceae*, *Mesocarpeae*
    - Zygocysteae . . (*mihi*) *Desmidiaceae*
  - ZOOSPOREAE. { Chlorosporeae.
    - Coenobieae . . . (*ex p.*) *Hydrodictyeae*, *Palmellaceae?*
    - Confervineae . . *Confervaceae* { *Euconferveae*, *Cladophoreae* }; *Ulothrichaceae*
  - OOSPOREAE . { Chlorospermeae. . . . . *Oedogoniaceae*; *Siphonaceae* { *Sciadieae?*, *Botrydieae*, *Vaucherieae* }; *Characeae*
- III. PHAEOPHYCEAE . . . . . *Diatomaceae*

I.—CYANOPHYCEAE

Phycochromophyceae, Rabh.

(Alghe colorate in azzurro, bruno o violetto).

Letteratura generale — Cf. Just. Bot. Jahr. I-VIII (1873-83). Borzì. Note intorno alla morfologia e biologia delle Alghe Ficocromacee nel N. Giorn. Bot. ital., vol. X-XI-XIV.—Zopf. Zur Morphologie der Spalt-Pflanzen ec. 4° con VI tav. 1882.—Tangl. Zur Morphologie der Cyanophyceen (Wien. Akad. d. Wissenschf. Bd. XLVIII 1883 — Ref. in Bot. Centralbl. 1884 n. 9 (p. 265-266). Hauck in Rabenh. Kryptogamen — Flora v. Deutsch 2. Aufl. p. 486, 1884 etc.

« *Scientia nostra de Phycochromophycearum vita, evolutione, fabrica, propagatione, fecundatione etc. adhuc valde imperfecta est.* —Rabh. Eur. II, p. 1 ».

Character Ordinis.

Plantae uni-vel multicellulares in aqua vigentes v. extra aquam in muco matricali nidulantes, plerumque familias i. e. consociationes per cellularum generationes successivas ortas formantes.

Vegetatio plerumque non terminalis ; ramificatio aut nulla, aut spuria vel vera.

Cytioderma non siliceum, combustibile, lamellosum, substantiam cellulosam (tegumentum Rabh.) exudans, quae tubulum, vesicam simplicem v. polydermaticam efformat.

Cytioplasma homogeneum *phycochromate* coloratum, et nucleo et granulis amylaceis plerumque destitutum.

Propagatio fit vel divisione vegetativa v. gonidiis immobilibus et perdurantibus (heterocystis) v. sporis tranquillis, Rabh.

Il gruppo delle Alghe cianoficee o ficocromacee comprende delle forme assai semplici, unicellulari, di natura non ancor bene conosciuta, ed anche delle forme più differenziate, le quali ora vivono nelle acque, ora sulla terra umida ; ora s'annidano nei tessuti di piante superiori, presentando il caso di parassitismo gregario e di simbiosi, ovvero associansi a funghi di ordine inferiore, dando così origine a molte specie di Licheni.

Quello che distingue le Cianoficee è la natura del pigmento, il quale manca in alcune (Bacteriacee) in altre è azzurro, verde, bruno o nero, e costa di *ficocianina,* associata a clorofilla.

La ficocianina è solubile nell'acqua, insolubile in alcool: la soluzione acquosa è di un colore azzurro fluorescente in rosso. Secondo Reinke la sostanza colorante delle Oscillarie produce uno spettro con quattro zone di assorbimento; mentre estraendo dallo stesso pigmento la *ficoxantina,* questa da uno spettro simile a quello della clorofilla, con qualche leggiera differenza. Il pigmento delle Gleocapse *(Gloeocapsina)* e quello degli Scitonema *(Scytonemina)* trovati dal Naegeli nelle membrane cellulari di quelle piante, si colorano diversamente per l'azione dell'acido cloridrico e degli alcali.

Nelle cianoficee mancano ordinariamente i corpuscoli coloranti o cromoleuciti, ed il pigmento è diffuso nel protoplasma. Manca pure il nucleo.

Secondo la direzione della scissione vegetativa le cianoficee divengono filamentose, laminari o masse ; il primo caso è il più frequente.

La riproduzione si fa per due mezzi, cioè: o per *eterocisti* o per *spore.* Gli eterocisti sono cellule di un filamento, le quali s'ingrossano, s'ispessiscono ed entrano in uno stato di vita latente ; quindi per rinnovamento germogliano e ciascuno di essi si comporta come ogni altra cellula. Le spore sono immobili e vengono per rinnovamento parziale in ciascun articolo; entrano nello stadio di vita latente nel quale perdurano per anni. Thuret riferisce un caso in cui le spore di *Anabaena circinalis* germinarono dopo essere state conservate nell'erbario per 8 anni [1]). Nel germogliare danno origine ad un nuovo filamento, il quale in alcuni casi presenta una direzione normale a quella del filamento donde precede, in altri trovasi nella medesima direzione.

Quantunque i lavori del Fischer [2]) De Bary, Borzì e specialmente del Thuret [3]) abbiano portato molta luce sulla vita delle cianoficee, ed in particolare delle nostocacee, pure la gran quantità di forme meno differenziate presenta, allo studio dell'algologo, difficoltà grandissima. Infatti moltissimi generi, creduti autonomi, non sono

[1]) *Observations sur la reproduct. de quelques Nostochinées*, pag. 13-14.
[2]) Fischer. — *Beitr. zur Kenntniss der Nostochaceen*, p. 4.
[3]) *Essai sur une classification des Nostochacées.* An. Sc. Nat. 6ª Ser., I. vol., pag. 372.

che stadi di passaggio di altre forme, e quindi il loro polimorfismo rende difficilissimo e spesso impossibile la determinazione delle specie , anche valendosi di opere descrittive. Le diverse condizioni di suolo e di clima, e la necessità dell'adattamento biologico spiega, in queste forme inferiori delle cianoficee, la grande variabilità di caratteri.

Nel presente lavoro, lasciando da parte il gruppo delle schizoficee o Bacteriacee, verrò notando quelle specie di cianoficee che mi è stato possibile determinare esattamente o con grande approssimazione, sperando di poter continuare lo studio di questi esseri in più favorevoli condizioni.

CHIAVE DELLE FAMIGLIE E DEI GENERI

CYANOPHYCEAE

Oscillariaceae — Trichomata simplicia (semper sine ramificatione) plerumque distincte articulata, plerumque vaginata, motationibus (oscillante, repente, spiráli) praedita. Vegetatio non terminalis. Propagatio gonidiis ex ultima cellularum generatione ortis, immobilibus, sine foecundatione germinantibus.

Oscillaria.—Trichomata simplicia, distincte articulata, rigida, recta vel parum curvata, rarius circinata, laete colorata, motu triplici praedita, muco matricali et vaginula tenuissima tubulosa, angustissima involuta; articuli nodulis punctiformibus peripherici muniti.

Phormidium—Trichomata oscillariae vaginis magis evolutae et plerumque in stratum membranaceum, lamellosum, minus radians aut non radiantem implicata; vaginae pertenues et perspicuae ubi vacuae sunt, trichomata non superantes.

Nostochaceae—Trichomata moniliformia, simplicia, articulata interdum vaginata aut cellulis perdurantibus (heterocystis) interstitialibus v. terminalibus , aut plerumque et heterocystis et sporis instructa (Char. emend.).

Nostoc — Thallus gelatinosus v. membranaceus polymorphus, peridermate plus minus firmo cinctus. Trichomata flexuosa, irregulariter intricata, vaginata aut evaginata articulis globosis, ovalibus plus minus arcte conjunctis, aequalibus; cytioplasmate granuloso, et cellulis perdurantibus *(heterocystis)* sphaericis v. ovalibus medio v. utroque fine instructis. Sporae cellules perdurantes aequantes, viridi-coeruleo-fuscae.

Anabaena—Trichomata muco amorpho diffluente involuta, evaginata v. rarius distincte vaginata, in thallum indefinitum, expansum, intricata; articulis sphaericis aut ellipticis distinctis, heterocystis terminalibus et interstitialibus et sporis globosis v. ellipticis instructa.

Cylindrospermum— Trichomata muco amorpho, saepe diffluente, involuta, evaginata, articulis sphaericis, ellipticis, v. compressis saepe quadrangulis. Cellulae perdurantes singulae, terminales, sporae oblongo-ellipticae saepe fuscescentes, cytioplasmate distincte granuloso.

? *Anhaltia* — Thallus gelatinosus irregularis, trichomata fructificationis (?) moniliformia, dichotoma, fasciculata, cuspidata.

Scytonemaceae — Trichomata aequalia articulata sub-vel moniliformia, pseudoramosa, plus minus distincte vaginata, cellulis limitaneis ad basin v. interstitialibus pachi-

dermaticis instructa vaginae saepe lamellosae in fibrillas discedentes superficie laevi exasperata v. crustata.

Scytonema—Trichomata fasciculato-congesta, plus minus pseudo ramosa; cellulis interstitialibus praedita; vaginae gelatinosae, membranaceae e stratis pluribus compositae. Vegetatio non terminalis.

Chroococcaceae—Thallus mucosus v. gelatinosus, amorphus, peridermate communi rarissime obductus, cellulas familiasque plerumque irregulariter dispersas involvens. Multiplicatio fit divisione singularum cellularum in 1-2-3 directiones. Propagatio autem schizosporis immobilibus ex iisdem cellulis ortis.

Chroococcus — Cellulae globosae v. angulosae liberae v. in familias consociatae: cytiodermate tenui homogeneo achromatico, v. firmo per strata incrassato et nonnunquam irregulariter discedente; cytioplasmate aeruginoso v. pallide coeruleoviridi, luteolo v. aurantiaco.

Gomphosphaeria — Cellulae cuneatae periphericae 2-8 in familias radiantes consociatae in muco nidulantes, tegumentis obductae et thallum globosum, solidum, libere natantem constituentes.

Fam. I.—OSCILLARIACEAE

1.—OSCILLARIA, Bosc. (1800).

Oscillaria pel moto oscillante dei filamenti.

Sinon. del genere. Oscillatoria Vauch.—Trichophora Bonnem.—Spirulina Turp. Ktz. Confervae — Ulvae — Tremellae sp. Auct.

Letteratura — Vauch. Hist. etc., pag. 165-189. D'Alquen. (Quart Jour. of Micr. Science IV, p. 245, Tav. XIV (1856).— Zuckal Beitr. zur Kenntniss. der Oscillarien (Oest. Bot. Zeit. 1880, p. 11-14) — Richter. Ueber der Wechsel der Farbe bei einigen süsswasser-Algen insbesondere den Oscillarien. Bot. Centralbl. 1880, etc.

1. **Oscillaria tenuis**, Ag. *v. limicola* Ktz. Rabh. Eur. II, 103.—(Oscillaria limicola) Ktz. Tab. Phyc. I, Tav. 47, fig. II.—Phormidium limicola Ktz. O. strato saepe late expanso viridi-nigro, radiis laete aerugineis, rare fuscescentibus, articulis diametro aequalibus apiculo extremo attenuato, diametro saepe duplo longiore obtuso (diam. filamentorum ad $^1/_{200}{}^{mm.}$). Exicc. nostra, n.° 1.

Masse fluttuanti alla superficie di una pozzanghera e più tardi tapezzandone il fondo. Filamenti in strato verde-oscuro leggermente raggiante, di colore azzurrognolo, indistintamente fascicolati, apice attenuato ed ottuso.

Alla superficie dell'acqua di una pozzanghera sulla via di Mergellina, Ottob. 1881.

Osservazione.

Non avendo potuto identificare questa specie con esemplari tipici, non posso essere certissimo della diagnosi basata soltanto sulla ispezione della figura del Kützing.

2. **O. chlorina**, Ktz. — Rabh. Eur. II, pag. 97.

Rinvenuta nel 1875 in una pozzanghera al Pascone. Non ne conservo esemplari, perchè andarono perduti.

3. **O. brevis.**, Ktz., (Linnaea VIII, pag. 363). Tab. I, tav. 39, fig. VI — Rabh. l. c., p. 99. — Exicc. Alg. Eur. n.° 30 (cum Phormid. vulgare). Exicc. nostra, n.° 3.

O. trichomatibus rectis v. leviter curvatis in stratum tenue saturate aerugineum subnitens, fragilissimis, articulis diametro duplo v. triplo brevioribus (diam. ad $^1/_{200}$ $^{mm.}$).

Strato di color verde azzurro oscuro, poco radiante, quasi come crosta, con filamenti fragilissimi per lo più diritti, raramente curvi, intrecciati, contenuto omogeneo.

Sulla terra umida di un giardino.

* 4. **O. gracillima**, Kutz. Tab. I, t. 39, f. II — Rabh. Eur. II, p. 97.

In Napoli (Rabenhorst. — Syst. Uebersicht d. auf meiner italian. Reise beobact. Kryptogamen. (Flora, 1850, p. 236).

2. PHORMIDIUM, Ktz. (1843).

Da φορμός stuoia, per alludere all' intreccio dei filamenti.

Sin. del genere. Oscillariae sp. Auct. — Lyngbyae et Siphodermatis spec. Kütz (ex p.). Lyngbya Kirch.

Letteratura (V. Oscillaria).

5. **Ph. vulgare**, Ktz. Phyc. gen. 193. Tab. I. Tav. 46, fig. IV — Rabh. l. c. p. 119. Oscillatoria decorticans Dillw. Conf. — Lyngbya vulgaris Kirch. Alg. Schl. p. 242 — Cooke Brit. Alg. p. 259. tab. CII fig. 5.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 29 — Exicc. nostra n.° 4.

Ph. strato tenui plus minus expanso, saepe radiante, mucoso obscuro, colore vario opaco aut nitente; trichomatibus rectis, rigidis, distincte vaginatis; articulis diametro aequalibus v. subaequalibus apice plerumque subcurvulo.

e) *chalybaeum?* Strato membranaceo, compacto, obscure viridi, trich. pallide aerugineis pellucidis. Diam. filam. 5-6, μ.

Sulla terra umida dei giardini e delle vie (*Ph. Publicum.*) e alla base delle mura umide.

Fam. II. — NOSTOCHACEAE

Bibliografia — Meneghini. Monographia Nostochinearum etc. 1840 — Fischer. Beitr. zur Kennt. der Nostochaceen etc. — Naeg. Gattung. einzell. Alg. 1849 — De Bary. Flora 1843. — Thuret. An. Sc. Nat. 6ª Ser. vol. I, 1875. — Bornet et Thur. Notes algologiques 1876-1880 — Borzì. Note alla morfol. e biologia delle alghe ficocromacee. N. Gior. Bot. vol. X, p. 236, 1878 — Zopf. Zur Morpholog. der Spaltpflanzen. Leipz. 1882 — Van Tieghem. Botanique p. 1105-1109, 1884.

3. NOSTOC Vauch. (1803).

Nome di oscura etimologia [1]).

Sinon. del genere — Tremellae Sp., Auct. vet. — Undina Fr., Muda Adans. — Hydrococcus, Lyngb. — Linkiae Sp., Roth.

Letteratura — Vauch. Histoire etc., pag. 222-229 — De Notaris. Hormosiphon e Nostoc, Comm. Soc. Critt. ital. Vol. II, pag. 234 — Fiorini Mazzanti. Della identità del Nostoc con il Collema. Borzì. Ficocr. (l. c.) pag. 241-257. — Vood. Nostoc and Collema. Grevillea, III, p. 83.

6. **Nostoc gymnosphaericum**. Ktz. Phyc. gen. 205. — N. glomeratum var. gymnosphaericum Rabh. Eur. II, 166.

Exicc. Roumg. Alg. Fr. n.° 117 — Exicc. nostra, n.° 5.

N. sordide viride aut olivaceum mollissimum lubricum, magnitudine pisi et ultra, trichomatibus laxe intricatis aequalibus, minus curvatis peridermate gelatinosa. Ktz. Sp. Alg. p. 296.

Variabile per grandezza secondo l'età. Colonie riunite in masse di colore olivaceo o verdognolo sporco, con coroncine lasche e poco numerose, eterocisti distinti.

Tra le piante acquatiche al Sebeto. Pascone Capece nel rigagnolo di mezzo sui Miriofilli.

7. **N. commune**. Vauch. Conf., p. 223, tav. 16ª, fig. 1ª — Menegh. Nostoch. p. 107 — Rabh. Eur. II, 175 — Borzì, Ficocr. p. 284 — Cooke Brit. Alg. p. 231, Tab. XCI, fig. 4 — Tremella Nostoc, L. — Nostoc foliaceum Ag. Syst. 19 — Nostoc prismaticum, Ces.

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. 64, 1032. Erb. critt. Ser. I, n.° 866, II, 916. Roumg. Alg. Fr. n.° 118.

Exicc. nostra, n.° 6.

N. terrestre thallo difformi undulato, plicato, tremulo, intus aquoso-gelatinoso, aetate provecta saepius excavato; peridermate firmo, obscuro olivaceo fuscescente, trichomatibus parum curvatis, dilute aerugineis, non raro biseriatim compactis, articulis sphaericis v. e mutua pressione subquadrangularibus, heterocystis globosis, (Char. emend.)

Presentasi comunemente sulla terra umida dopo la pioggia, in masse irregolari, fosche, gelatinose, con pellicola coriacea, internamente acquose. Le coroncine sono fatte da cellule ora sferiche ora poliedriche (compresse). Per la soverchia umidità la fronda

[1]) Nomen apud Paracelsum obvium, originis mihi ignotae, forsan alchymisticum — Lyngb. *Hydrophyt. Dan.* p. 198.

diviene diffluente e le coroncine spezzate dagli eterocisti, costituiscono gli *ormogonî*, che si rendono liberi. Comune sulla terra umida dei giardini ombreggiati. Arenella, Capodimonte (Bosco), Valle di S. M. dei Monti, ecc.

Osservazione.

In questa, come nelle altre specie di Nostoc, gli ormogonî hanno la proprietà di eseguire dei movimenti di reptazione come le Oscillarie. Borzì (l. c. p. 244) ha misurata la velocità del moto delle coroncine ed ha trovato che essa aumenta in primo tempo, poi diviene costante. La luce non vi ha influenza, ma piuttosto il calore. Egli considera il movimento come spontaneo, ed indipendente dalla luce.

8. * **N. sphaericum** (Poir.) Vauch. Conf. pag. 223 — Rabh. Eur. II, p. 167 — Cooke Brit. Algae, pag. 231, tab. XCI, fig. 8 — Conferva Pisum Oed. — Fl. Dan. tab. 660, 2 (ex p.) — Tremella granulata Linn. Vasche del R. Orto Botanico (Pasquale Catal. delle piante del R. O. Bot. di Nap. 1867, pag. 70.

9. * **N. rupestre** Ktz. — Rabh. Eur. II, p. 163 — Nostoc pregarium Hantzsch — Hormosiphon furfuraceus Ktz. — Exicc. Erb. Critt. it. II, n.° 1326.

Rabenhorst (Syst. Uebersicht d. auf meiner italien. Reise beobacht. Kryptogamen. Flora 1850).

Luoghi grondanti di Napoli — Rabenhorst! l. c.

4. ANABAENA Bory (1823) ex. p.

Da ἀναβαίνω mi muovo, ascendo, mi diffondo, per alludere al movimento ed al galleggiamento delle masse diffluenti.

Sinon. del genere — Sphaerozyga Ag. — Monilia ex p. Poll. — Byssus flos aquae L. (Conf. Menegh. Organogr. delle Alghe p. 28). Trichormus Allm. — Dolichospermum Twait.

Letteratura — Borzì l. c. p. 257-264 — Meneghini. Consp. Algol. Euganeae p. 7 (1837).

10. **Anabaena Azollae**, Mett. - Strasb. Das Bot. Pract. pag. 352, fig. 124. — Icon. nostra, Tab. I, fig. 1 $\left(\frac{600}{1}\right)$ — Exicc. nostra, n.° 7.

A. trichomatibus fasciculatis parum curvatis, brevibus, dilute aerugineis, aequalibus; articulis elliptico-cylindricis subcompressis diametro subaequalibus v. 2plo longioribus, intus granulosis; heterocystis ellipticis v. sphaericis articulorum diametro subduplo maioribus viridi-olivaceis, sub polis punctis binis refringentibus notatis.

Coroncine più o meno flessuose piuttosto brevi, minute, poco intrecciate; di colore verde-azzurrognolo chiaro. Articoli dei filamenti ellittici-cilindraceo-troncati eguali in diametro 1-2 volte più lunghi che larghi; le cellule in via di segmentazione la metà circa del diametro. Eterocisti quasi il doppio del diametro delle cellule vegetative, di colore verde olivaceo chiaro, con due punti brillanti e rifrangenti alle due estremità; questi stessi punti si veggono pure in altre cellule. Diam. dei filamenti 3-4 μ. — Eterocisti: 5-7 μ.

*

Vive nelle lacune delle foglie di *Azolla Caroliniana*, che si coltiva nei vasi dell'Orto Botanico.

Osservazione

Secondo De Bary [1]) e Strasburger [2]) che hanno studiato il fatto della convivenza delle colonie di *Anabaena* nelle cavità delle foglie di Azolla, la presenza dell'alga in tutte le specie di Azolla oggi conosciute è costante, e costituisce un caso di *simbiosi* (De Bary, l. c.) ovvero, secondo Delpino [3]) di *parassitismo gregario*. L'Anabaena, identica per tutte le differenti specie di Azolla esaminate in località diverse, si annida in una cavità particolare formata dal punto vegetativo della Azolla ripiegato verso l'alto, intorno al quale i mammelloni delle foglie nascenti delimitano una cavità, che ricetta costantemente una colonia di Anabaena. Da questa, che può dirsi colonia madre, partono altre coroncine, che penetrano nelle cavità delle foglie giovanissime e vi rimangono incluse finchè dura la vita della foglia stessa. Disfacendosi questa le colonie divengono libere, epperò è facile trovarne nuotanti nei vasi ove vegeta da tempo l'Azolla. Io ho trovato costantemente le coroncine di Anabaena sia nei primi rami, che nelle cavità foliari dell'Azolla Caroliniana.

5. CYLINDROSPERMUM Ktz. Ralfs (1850).

Dalla forma delle spore.

Sinon. del genere — Anabaenae, Sphaerozigae, sp. Auct. (pr. parte).

Letteratura — (Borzì l. c. pag. 272-275.).

11. **C. macrospermum**, Ktz. Phy. gen. Tab. I, t. 98, f. IV. — Rabh. Eur. II, p. 186. — Cooke Brit. Alg. p. 243, tab. XCIV. fig. 1. — Anabaena impalbebralis? Hass. — C. phaeospermum, Rabh. l. c.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 61. — Erb. critt. Ser. II, n.° 1132. — Exicc. nostra n.° 8.

C. trichomatibus curvatis v. subrectis aequalibus, dilute aerugineis; articulis globosis, ellipticis saepius subcylindraceis, ad genicula plus minus constrictis; cellulis terminalibus plerumque ellipticis, diametro 2 plo longioribus, sporis elliptico-oblongis, viridi vel luteo-fuscis granulosis, diam. 2 plo longioribus.

Filamenti di pallido colore ceruleo più o meno intrecciati per lo più poco curvati e quasi dritti, articoli globosi, ma spesso cilindracei o subcilindracei, granulosi, ristretti un poco alle articolazioni. Tra questi gli eterocisti per lo più ovali di lunghezza circa il doppio del loro diametro quasi scolorati. Spore cilindracee o ellittiche fosche granulose di lunghezza doppia del diametro.

Dimensioni filam. 3-5 μ — Spore 13 × 35 μ.

[1]) De Bary — De la Symbiose (trad. nella *Brébissonia* II, p. 17, 38, 99, (1879).
[2]) Strasburger — Das Botanische Practicum (1884) pag. 352.
[3]) Delpino — Rapporti tra Azolla ed Anabaena. Ann. Scient. Ind. di E. Treves, XVI, p. 770 (1880).

Non infrequente nelle acque stagnanti. *Pascone Capece*, ed altri rigagnoli del Sebeto.

12. **C. humicolum**, Ktz. Phyc. gen. 212 — Tab. Phyc. I, t. 93, fig. 1. — Rabenh. l. c. p. 188.

Exicc. Erb. critt. it. n.° 330. Roumg. Alg. Fr. n.° 272. Exicc. nostra n.° 9.

C. saturate aerugineo-viridi, strato tenui opaco, trichomatibus flexuoso-curvatis (vel subparallelis!) uno apice attenuato, altero incrassato; articulis sphaericis dense et arcte conjunctis, cellulis terminalibus globosis, aquose coeruleis, diametro duplo longioribus. Sporis fuscis vel luteolo-fuscis, ovato-cylindraceis, granulosis.

Somiglia al precedente per l'aspetto, però è sparso più regolarmente, più denso ed opaco, i filamenti sono di colore carico ad articoli globosi od anco ellittici o cilindracei, più o meno intricati. Eterocisti globosi, di colore più chiaro, doppi del diametro. Spore cilindracee, verdi o brune (mature granulose, giallobrune). Dimensioni: filam. 6,5 μ — Spore: 25 × 12 μ.

Sul suolo arenoso umido. Valletta presso i Cangiani sopra muschi; Camaldoli (selve) vicino ad un corso d'acqua.

Fam. III. — * RIVULARIACEAE

6. * ANHALTIA, Schwabe. (1835).

Dedicata a Federico *di* Anhalt-Dessau.

* 13? **A. Fridericae.** Schwab. (Linnaea IX, p. 127. T. II, f. 1-2). Erb. critt. ital. Ser. II, n.° 781.

Napoli — Appiè d'un pioppo entro un umore linfatico che tramandava dalla corteccia e zona generatrice, lacerata per causa esteriore — Licopoli (in sched. Erb. critt.).

Fam. IV. — SCYTONEMACEAE.

7. SCYTONEMA (Ag. 1817).

Da σκύτος *pelle* e νῆμα *filo per l'aspetto vellutato dei filamenti.*

Sinon. del genere. — Drilosiphon, Ktz.

Letteratura. — Borzì Ficocr. (l. c. XI,) pag. 362-374. — Bornet et Thuret Notes algologiques 1-2. 1876-79.

14. **Sc. truncicula**, Rabh. Eur. l. c. 257. — Icon nostra Tab. I fig. 2 $\left(\frac{400}{1}\right)$.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 352. — Erb. critt. ital. II, n.° 1327.

Exicc. nostra n.° 10.

S. caespitibus parvis tomentoso-velutinis, fusco-nigris, trichomatibus adscendentibus, basi concretis, interius aerugineis v. luteo olivaceis, torulosis, articulis granulosis diam. 1-3 plo brevioribus, saepe laxe connexis, vaginis achrois vel luteolis arctis, indistincte lamellosis superficie nonnunquam corrugatis (Rabh.).

Distinguesi a primo aspetto questa specie pel color nero e per l'apparenza di tomento vellutato. Cespuglietti alti qualche linea, con rametti ascendenti riuniti verso la base, con i pseudorami fascicolati. Filamenti di colore tra il giallastro e l'azzurrognolo con tinte di verde; articoli distintamente granulosi, con vagine fosche o jaline, aderenti, indistintamente lamellose. Dimensioni dei filamenti 12-13 μ.

Sui tronchi degli alberi non raro. Sugli olmi, pioppi ecc. Strada che mena a Poggioreale. Orto Botanico. Capodimonte. Villa comunale.

Es. 1 dall'Orto Botanico. — 2. Strada Arenaccia (alberi).

Fam. V. — CHROOCOCCACEAE

Letteratura. — Naegeli, Gattungen einzelliger Algen. p. 44-60 — Strasburger, Das Botanische Pract. 1884, p. 56-58.

Algae plerunque dubia natura, et fortasse, pluribus ex iis, statum aliarum plantarum, minus evolutum vel primordialem.

8. CHROOCOCCUS, Naeg. (1849).

Da χρόα colorito e κόκκος nucleo, pel colore della cellula nella sua parte centrale.

Sin. del genere. Protococcus Ag. Ktz. ex p. — Pleurococcus Menegh. ex p. — Globulina e Protosphaeria Turp.

15. **Ch. minor.** (Ktz.), Naeg. Alg., pag. 47, t. I, A, fig. 4. Rabh. Eur. II, p. 30 — Protococcus minor Ktz. Tab. Phyc. I, tab. 3.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1143. Erb. critt. it. I, n.° 1450. Exicc. nostra n.° 10 b.

Ch. cellulis rotundatis, singularibus v. geminatis, solitariis v. gregariis, cytiodermate tenuissimo, achroo, cytioplasmate homogeneo plerumque pallide aeruginoso.

Cellule isolate o riunite in masse con membrana trasparente, jalina, contenuto omogeneo e qualche volta leggermente granuloso, di colore verde leggermente azzurrognolo.

Comune sulle cortecce degli alberi, mura umide ecc.

Trovasi spesso associato al *Pleurococcus miniatus* ecc.

Le specie di questo genere sono spesso associate a varie altre alghe e più ancora a forme embrionali di Licheni, dei quali forse rappresentano in gran parte lo stadio primitivo di evoluzione.

9. GOMPHOSPHAERIA, Ktz (1836)

Da γόμφος cuneo, e σφαῖρα palla, alludendo alla forma cuneata delle cellule, riunite in cenobio globoso.

Letteratura — Kützing. Linaea XVII 1843. Phyc. gener. p. 165 — Trevisan Alghe coccot. p. 99.

16. **G. aurantiaca**, Bleisch. in Rabh. Alg. Eur. n. 1810 — Rabh. Eur. III, pag. 418 (addenda) — Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1810 — Erb. critt. ital. Ser. II, n. 1253 ex Horto neapolitano (Cesati). — Exicc. nostra, n.° 11.

Icon. nostra — Tav. I, fig. 3-9.

G. aurantiaca, cellularum familias $\frac{5-8^{mm}}{400}$ longis, cellulis singulis $^{7}/_{400}$ longis, $^{5}/_{400}$ latis. Color aurantiacum post mortem in viridi mutatus (Rabh.).

Masse di color giallo-dorato, libere, nuotanti nell'acqua. Cellule riunite in famiglie da 8-15 ogni famiglia; le periferiche cuneate, le centrali oblunghe o irregolarmente cilindracee.

Abbonda nelle vasche dell' Orto Botanico, specialmente nella vasca maggiore, tingendo l'acqua in giallo ocraceo. Aprile-Luglio.

Osservazioni sulla Gomphosphaeria aurantiaca.

Avendo avuta occasione di raccogliere a varie riprese quest'alga, che attira l'attenzione pel colore ocraceo di cui tinge l' acqua, potetti coltivarla ed osservarne lo sviluppo.

Nello stato vivente la Gomfosferia d'ordinario si trova sparsa nell'acqua, la quale se si guarda in una provetta attraverso la luce, si vede limpida, ma cospersa di piccolissimi corpicciuoli quasi pulviscolo di color fulvo o giallo ocraceo. Questi corpicciuoli tendono ad andare alla superficie e dopo qualche ora si vedranno tutti raccolti in uno strato, il quale è di color giallo alquanto più brillante, l'acqua restando perfettamente limpida ed incolore. Se si raccolgono queste masse e si lasciano seccare su vetrino, appaiono, a luce trasmessa, di un bel color giallo di oro brillante. Lasciando nell'acqua l'alga vegetante, dopo non molto tempo (nelle mie coltivazioni dopo quattro a cinque giorni) il colore da ocraceo comincia a divenire più brillante, sicchè dopo qualche mese lo strato galleggiante ha perduto il colore ocraceo ed è divenuto di un bel *giallo di cromo* chiaro più o meno, secondo la stagione. Dopo alquanti mesi lo strato galleggiante comincia ad impallidire e tende ad aggrupparsi sotto forma di masse fioccose, nelle quali sviluppasi una vegetazione di Diatomee o di altre alghe unicellulari. Finalmente dopo qualche anno, continuando a tenerla nelle medesime condizioni, tutta la massa scende al fondo, ove forma uno strato grumoso-fioccoso di colore verde sporco. Queste diverse fasi dipendono dalla attività di vegetazione dell'alga, la quale a misura che procede la segmentazione delle masse, cangia di colore. Nello strato inferiore adunque si osserveranno dalle masse di Gonfosferie ancora gialle, in mezzo a moltissime scolorate ed altre verdi.

La sostanza colorante gialla non si mantiene dunque indefinitamente, ma tende a sparire, ed a trasformarsi. Avendola cimentata con varii reattivi, ho trovato in essa i seguenti caratteri. È di colorito giallo intenso a luce trasmessa, giallo ocraceo a luce riflessa, insolubile nell'acqua, nell' alcool e nella benzina, si dissolve completamente nell'olio d' ulivo, e questo mezzo fa meglio osservare la interna disposizione delle cellule, le quali allora appariscono di color verde. L'acido nitrico diluito scolora il pigmento dopo alquante ore e con acido solforico allungato e tintura di jodo si ha intensa colorazione *rosso-sangue*. Il cloruro di zinco jodato invece cangia il color giallo in *verde* più o meno cupo, e nelle grandi masse la colorazione comincia dai bordi. La tintura di jodo e quella jodo-jodurata non modificano il colore.

Circostanze sfavorevoli non mi han permesso di far l' analisi spettroscopica del pigmento giallo, analisi che, per quanto so, non è stata ancora fatta.

La Gomfosferia si moltiplica per divisione successiva secondo tre direzioni perpendicolari; cosicchè produce un tallo globoso-sinuoso, composto di masse riunite assieme (Tavola I. fig. 3). Al microscopio le cellule interne si presentano cuneate colla parte ristretta rivolta verso il centro della massa, nel quale trovansi 3 o 4 altre cellule in altra posizione. Tutte queste masse, specialmente se giovani, si veggono distintamente circondate da una membrana comune (Fig. 4ª). Colla fuoriuscita, o meglio collo sparpagliarsi delle cellule cuneate si ha la formazione delle nuove colonie. Queste cellule vengono emesse dallo interno del tallo con una specie di scatto e si veggono isolate nel liquido ambiente. Dopo qualche tempo ho potuto vedere come ciascuna celletta prendendo un colorito verde, acquistava la forma sferica, con membrana esterna ben distinta e contenuto interno granuloso verde scuro (Fig. 5ª *a*). Non tardava però ad ingrandirsi per la segmentazione della massa interna (Fig. 5ª *b*, *c*,) la quale diveniva refrangente e di un verde più chiaro, divisa prima in due, poi in quattro, otto o sedici cellule aggruppate ed involte dalla comune membrana (Fig. 5ª *d*, *e*, *f*.).

Da questo stadio, le cellule così prodotte ingrandiscono, passando a costituire delle famiglie incluse di 11-13-15 cellule, in ciascuna delle quali si vede un principio di segmentazione (Fig. 6ª, 7ª, 8ª). Ciascuna di queste massoline mostra una membranella propria. In un dato tempo le masse, sempre di color verde, si conformano come a piccole Gonfosferie, cioè si veggono lobato-rugose e più scure; mentre dapprincipio erano quasi sferiche e di un color verde chiaro. La membrana comune si distende per la accresciuta massa interna, quindi si disfà e le cellule figlie si rendono libere. Ciascuna di essa dapprima di colore verde, a poco a poco sviluppa il pigmento (di cui il primo indizio qualche volta si vede anche sulle cellule ancora chiuse nella membrana comune) continua a segmentarsi e raggiunge lo stato adulto, conservando la membrana propria nella quale sono contenute le cellule cuneate (Fig. 3ª, *b*). Molte volte mi è occorso di vedere, nelle cellule ancora racchiuse (Fig. 8ª, 9ª) uno spiccato movimento di rotazione intorno al proprio asse; movimento che hanno conservato nell'uscire dalla cellula madre e che si faceva più celere colla maggiore illuminazione.

Per questa successione di fenomeni il primo stadio di una *Gomphosphaeria* somiglia in parte a quello della *Pandorina*, nella quale le colonie sono dotate di ciglia vibratili. Sarebbe forse da ritenere il genere *Gomphosphaeria* come forma di passaggio delle cianoficee a quelle cloroficee rappresentanti le Palmellaceae, e dalle quali differirebbe soltanto per la mancanza della fase sessuale. Ciò forse spetta ancora ad altre forme, le quali non hanno fin ora un posto costante nella sistematica delle alghe.

II. — CHLOROPHYCEAE

Chlorophyllophyceae, Rabenh.

(Alghe clorofillose, raramente con pigmenti accessorî)

Letteratura — (V. la letteratura delle singole famiglie).

Character ordinis.

Algae chlorophyllosae, aquaticae v. aereae, rarissime parisiticae, uni vel pluricellulares. Cellulae aut singulae aut in familias consociatae, saepe substantia gelatinosa

amorpha inclusae. Vegetatio terminalis et non terminalis, ramificatio vera vel nulla. Membrana cellularum (*cytioderma* Rabh.) non silicea, stratificata et substantiam gelatinosam, praecipue in vitae primordiis, exudans. — Plasma chlorophyllosum, uni-vel plurinucleatum ; massa chlorophyllacea varie efformata , rarius diffusa ; interdum et substantiae oleosae aurantiacae — v. aurantiaco-rubrae et granulis amylaceis consociata.

Multiplicatio fit sporis mobilibus *(zoosporis)* rarius quiescentibus; reproductio autem sexualis, oosporis ex varia foecundatione ortis.

Le cloroficee sono distinte dalla presenza della clorofilla , la quale ora impregna tutto il protoplasma, ora vi si trova localizzata in punti determinati sotto forma di granuli, fasce, lamine, variamente disposte. Alla vera clorofilla si associa qualche volta del pigmento per lo più giallo, bruno o rossastro, di aspetto oleoso, più refrangente. Le cloroficee vivono nelle acque dolci salmastre o salate, sulla terra e sulle pietre umide, raramente divengono endoparassite per le piante di ordine superiore.

Il tallo è formato da una o più cellule e queste ora libere, ora riunite in famiglie, qualche volta incluse in una massa gelatinosa più o meno diffluente. Secondo il modo e la direzione dello accrescimento, il tallo acquista forme diverse e talvolta raggiunge considerevoli dimensioni , anche essendo formato da una sola cellula *(Siphoneae)*. La segmentazione del tallo può avvenire in una, due o tre direzioni; quest'ultimo caso riscontrasi nelle *Characeae*. Le cellule riunite in famiglie possono disgiungersi, per la gelificazione e diffluenza dello strato esterno della parete cellulare.

La membrana della cellula è per lo più jalina, raramente colorata in brunastro; liscia ovvero striata, punteggiata verrucosa, echinata o pure fornita di processi filiformi; molte volte presentasi stratificata con zone di varia densità, e quindi diversamente refrangenti ; la gelificazione dello strato esterno è frequente e costante in alcune famiglie *(Desmidiaceae, Palmellaceae, ecc.)*.

La massa protoplasmatica, per lo più raggiante, avvolge uno o più nuclei più o meno spiccati, ora centrali, ora parietali e contiene i cromatofori o cloroleuciti nei quali si veggono i *pirenoidi* e corpuscoli amilacei, che si colorano col jodo assai più fortemente di quelli delle altre piante. L'acido picrico e l'alcool assoluto fissano la massa protoplasmatica ed i cloroleuciti.

La moltiplicazione avviene o per dissociazione del tallo, con o senza isolamento completo delle cellule, ovvero per mezzo di spore mobili nude (zoospore) e più raramente per spore immobili. Le zoospore, dopo un periodo più o meno lungo di mobilità perdono le ciglia vibratili, si fissano, si rivestono di una parete di cellulosa e germogliano, dando origine a novelle piante.

La riproduzione è sempre sessuale e può essere isogama od eterogama. L'oospora, che è il prodotto della fecondazione, presentasi di colore dapprima verde, poi bruno nella maturità; rimane nello stato di vita latente per più o meno lungo tempo e quindi riproduce o un novello individuo direttamente *(Characeae, Conjugatae)*, ovvero una zoospora *(Oedogoniaceae)* dalla quale deriva il nuovo tallo.

CHIAVE DELLE FAMIGLIE E DEI GENERI

Zygnemaceae — Thallus filamentosus articulatus, articulis cylindricis arcte conjunctis: vegetativis aequipolaribus, fructiferis tumidis v. inflatis. Membrana lamellosa e stratis pluribus formata. Endochroma effusum aut effiguratum, saepissime spirale, nucleum plasmate radiante involutum, et granula amylacea includens. Vegetatio fit divisione transversa cellularum; propagatio zygosporis, copulatione cellularum binarum ortis.

Spirogyra — Fila articulata, cellulis vegetativis cylindricis arcte conjunctis, fructiferis tumidis. Massa chlorophyllosa spirali modo, simplici v. duplici, in quaque cellula disposita, granula amylacea involvens. Vegetatio divisione transversali cellularum, multiplicatio conjugatione et *scaliformi* et *laterali* fit. Zygosporae globosae, ellipticae, v. lenticulares, triplici membrana involutae, superficie laevi v. punctata (Char. emend.).

Mesocarpeae — Thallus filamentosus, articulis cylindricis plerumque elongatis, arcte conjunctis. Membrana pertenuis, massa chlorophyllacea laminam axilem longitudinalem efformans. Vegetatio divisione transversali cellularum: propagatio conjugatione genuflexa v. scaliformis. Zygosporae inter cellulas binas genuflexas conjugatas.

Mesocarpus — Fila articulata, articuli cylindrici, elongati, aequipolares; massa chlorophyllosa initio effusa, postea in fasciam longitudinalem contracta, nucleum centrale et unum v. duo granula amylacea includens. Copulatio scaliformis, nonnumquam genuflexa et plerumque sterilis.

Desmidiaceae — Thallus unicellularis vegetatione terminali et ramificatione destitutus; cellulae aut liberae aut seriatim conjunctae, symmetricae, medio plus minus evidenter constrictae et in duas semicellulas (*hemicytia*) distinctae. Membrana laevi, vel striata, verrucosa, punctata; plerumque initio mucum plus minus diffluentem exudans. Endochroma viride effusum aut effiguratum et laminas chlorophyllaceas e centro v. axi cellulae radiantes efformans, granulis amylaceis non destitutum. Propagatio zygosporis immobilibus ex binarum cellularum conjugatione ortis.

Closterium — Cellulae cylindricae v. fusiformes, rectae v. plus minus curvatae, apicibus sensim attenuatae, in medio linea transversali unica v. 2-5 partitae; membrana laevi v. striata. Massa chlorophyllacea, granulis amylaceis sparsis v. seriatis in fascias longitudinaliter radiantes disposita, et sub polis cellulae vesiculis binis hyalinis, corpusculis mobilibus minutissimis includentibus, praedita. Zygosporae sphaericae v. quadrangulares.

Cosmarium — Cellulae oblongae v. cylindraceae v. ellipticae, medio plus minus profunde et transverse constrictae, utroque polo obtusae v. rotundatae, panduraeformes; membrana laevi, punctata, vel verrucosa. Massa chlorophyllacea transverse radiata granulum amylaceum unicum involvens. Zygosporae muricatae.

Staurastrum — Cellulae liberae, medio constrictae; semicellulae a vertice 3-6 angulares, radiatae v. incisae, membrana laevi v. plerumque verrucosa, verrucoso-aculeata, processis simplicibus v. incisis armata. Massa chlorophyllacea in laminas binas v. plures axiles radians et granulum amylaceum involvens. Zygosporae sphaericae, armatae.

Hydrodictyeae. — Thallus unicellularis. Cellulae divisione carentes, inter se plus minus arctae conjunctae et *coenobium* lineare, planum, disciforme v. saccato-reticulatum efformantes. Multiplicatio fit zoosporis ex plasmatis divisione simultanea ortis et coenobium immobile constituentibus. Reproductio cellulis mobilibus (microgonidia Rabh.) ex conjugatione *aequali* ortis et ciliis binis instructis. (Char. emend.).

Scenedesmus. — Cellulae (zoosporae) ellipticae, oblongae, utroque polo aequales, v. inaequales, haud raro in cornu spiniforme productae, dilute virides, initio homogeneae, deinde granulosae, locello achroo plus minus centrali instructae et in seriem (2-4-16) simplicem plus minus arcte conjunctae.

Pediastrum — Coenobium planum, disciforme, astroideum, libere natans, e cellularum strato unico, rarius centro duplici efformatum, continuum v. interdum clathratum. Cellulae (zoosporae) depressae, angulosae, perifericae integrae v. bilobae, lobis plus minus productis, simplicibus v. bifidis. Membrana tenuis, hyalina, interdum, aetate provectiori, purpurascens. Endochroma viride, initio homogeneum postea granulosum.

Hydrodictyon — Coenobium solidum, saccato-reticulatum libere natans. Cellulae oblongo-cylindricae, aequipolares, in quibus et zoosporae (macrogonidia) et gonidia mobilia (microgonidia) oriuntur.

? Palmellaceae — Thallus unicellularis, cellulae aut solitariae aut plus minus numerosae in familias, consociatae, saepe muco matricali involutae. Multiplicatio fit cellularum divisione vegetativa ad tres directiones. Propagatio gonidiis mobilibus, cytioplasmatis divisione ortis.

Algae dubia natura et fortasse statum primordialem (*palmelloideum*) aliarum algarum, ex variis chlorophycearum ordinibus, gerentes.

Rhaphidium — Cellulae solitariae, binae v. fasciculatim aggregatae, fusiformes v. cylindraceae, rectae v. plus minus curvatae; apicibus attenuatis v. attenuato-cuspidatis. Endochroma subtiliter granulosum, locello achroo, plus minus evidenti, notatum. Divisio cellularum ad unam (diagonalem) directionem.

Tetraspora — Cellulae globosae v. angulosae, laxe connexae familias (thallus auct.) explanatas, varie efformatas, modo membranaceas, modo saccato-clausas, gelatinosas, constituentes; tegumentis cellularum plus minus crassis in mucum homogeneum diffluentibus. Multiplicatio in duas directiones alternantes. Propagatio gonidiis mobilibus ex ultima cellularum generatione ortis et ciliis binis praeditis.

Pleurococcus — Cellulae segregatae, globosae, v. e pressione mutua angulosae, nucleatae, tum singulae, tum in familias consociatae. Membrana saepe firma, crassa hyalina; plasma homogeneum viride vel oleoso-rubrum. Divisio cellularum in directionem ad omnes dimensiones alternantem. Propagatio gonidiis intra cellulas proprias ortis.

Palmella — Cellulae globosae v. oblongae, tegumentis plus minus crassis, in mucum gelatinosum difluentibus involutae, stratum difforme efficientes. Multiplicatio divisione cellularum in omnes directiones.

Confervaceae — Thallus filiformis; fila articulata, aut simplicia, aut proliferatione laterali, ramosa; vegetatione apicali non limitata instructa. Articuli cylindrici plus minus elongati v. abbreviati, membrana laevi v. incrassata plerumque manifeste lamellosa. Endochroma granulosum vesiculas amylaceas includens, effusum, parie-

tale, saepe subspirale, postremo in parte centrali cellulae contractum. Vegetatio divisione transversa cellularum; propagatio zoogonidiis.

Conferva — Fila articulata simplicia, articulis cylindricis plus minus elongatis. Endochroma homogeneum v. granulatum, vesiculas amylaceas involvens.

Cladophora — Fila articulata proliferatione laterali varie ramosa. Membrana cellularum plerumque crassa, lamellosa. Endochroma granulosum parietale. Propagatio zoogonidiis mobilibus ex plasmatis divisione ortis, et e cellulae ruptura apicali v. laterali examinantibus, ciliis binis praeditis.

Chroolepus. — Fila articulata, ramosa, membrana firma subcartilaginea, crassa v. subcrassa, articulis plus minus elongatis; pulvinulos minutos v. stratum tenue tomentosum efformantes. Endochroma rubellum, aureum aut flavo-fuscum, oleosum, homogeneum v. granulosum. Propagatio zoogonidiis cellulis propriis terminalibus, v. lateralibus ortis. Zoogonidia oblongo-ovalia, ciliis binis instructa. Algae aëreae, violae plus minus odore fragrantes.

Bulbotrichia. — Fila achroa firma, indistinte articulata subcartilaginea, ramosa; ramis basi bulbosis apicibus intumescentibus sporangia efformantibus.

Ulothrichaceae. — Thallus filamentosus articulatus, fila simplicia rarissime ramosa, nonnunquam in fascias laterales conjuncta. Cellulae initio diametro multoties longiores, demum, partitione repetita, breviores v. brevissima, membrana tenui v. crassa, saepe crassissima et lamellosa. Endochroma initio effusum, parietale, deinde in gonidia transmutatum. Propagatio macro-et microgonidiis in cellularum cavitatem ortis.

Ulothrix. — Fila articulata simplicia; articulis brevibus plerumque diametro brevioribus, membrana tenui, tenuissima, rarissime lamellosa. Endochroma, viride homogeneum, granula amylacea includens.

Oedogoniaceae. — Algae monoicae v. dioicae. Thallus filamentosus, fila articulata, simplicia aut ramosa, vegetatione terminali praedita; cellula radicali obovata v. obovato-clavata basi lobata, saccata v. ramoso-partita, innata. Propagatio fit zoogonidiis in quavis cellula ortis et ciliis binis, polo antico, praeditis. Reproductio fit oosporis ex oogoniis singulis v. pluribus plus minus tumidibus, ortis. Oosporae maturae globosae, rubro-aut flavo-fuscescentes, ante germinatione in zoosporas plerumque quatuor dilabentes. Antheridia brevi-filiformia 1-2-3-10 articulata, plerumque singula aut oogonio, aut filo vegetativo insidentia.

Oedogonium. — Fila articulata simplicia, initio affixa, cellula basali palmatiloba praedita, postea libere natantia et caespites plus minus intricatos efformantia. Cellula terminalis plerumque in setam producta; cellulae vegetativae sub polis striis transversalibus (membranae segmentatione intercalari) notatae.

Siphonaceae — Thallus unicellularis, cellula utriculiformis saepe lateralibus prominentiis ramulosa, valde elongata, ramuli vegetatione terminali praediti, demum septo discreti, et parte anteriore in oosporangia, posteriore in antheridia transformati. Endrohroma viride, granulosum, vesiculis chlorophyllosis et granulis amylaceis farctum. Multiplicatio fit divisione cellularum v. sporis tranquillis vel etiam zoosporis. Reproductio isogama, oosporis sine foecundatione vel (heterogama) ex varia foecundatione ortis.

Protococcus — Cellulae sphaericae, sphaeroideae, segregatae, membrana tenui hyalina,

absque tegumentis, libere natantes, v. stratum tenue pulvereum cumulatae. Endochroma viride, homogeneum. Propagatio fit zoogonidiis (macro-et microgonidiis Rabh.) ex quibus et sporae tranquillae et zoosporae oriuntur.

Botrydium — Thallus unicellularis, cellula initio globosa, postea clavato-pyriformis vertice rotundata, die clausa, basi in radiculas subtilissimas hyalinas varie partita. Endochroma mucilaginosum, viride, granulosum; denique zoogonidia, ex plasmatis divisione ortis, relinquens.

Vaucheria — Thallus unicellularis filamentosus; cellula valde elongata, utriculoso-clavata, saepe varie ramosa, plerumque dichotoma, membrana tenui, hyalina. Endochroma viride, granulosum. Propagatio sexualis et non sexualis: una zoosporis, altera oosporis ex varia foecundatione ortis.

Characeae. — Thallus filamentosus, articulatus, plerumque corticatus, ramosus; ramis verticillatis, vegetatione terminali definita praeditis. Multiplicatio fit cellularum proliferatione laterali et divisione vegetativa, v. etiam bulbillis in ramulorum axillis positis. Reproductio oosporis ex foecundatione ortis. Antheridia primum viridia demum rufescentia; oogonia ovalia, cellulis, plerumque 5, spiraliter tortis et apicibus liberis, *coronulam* efformantibus, circumdata, in ramulorum superficie vel axillis, individuo unico vel variis insidentia et ideo plantas monoicas v. dioicas constituentia.

Chara — Caulis et ramuli corticati v. nudi, articulis superficie spiraliter tortis; antheridiis superficie inferiore ramulorum, oogonis ovalibus coronatis, coronula persistente.

Sub-ordo I. — *ZYGOSPOREAE*

(*Conjugatae*, De Bary — *Zygophyceae*, Rabenhorst).

Letteratura. — De Bary Untersuchungen über die Familie der Conjugaten. Leipzig 1858.

Le zigosporee si possono dividere secondo le maniere della loro riproduzione nel seguente modo:

Conjugamento	Tra filamenti	Fusione di due masse protoplasmatiche con rinnovamento:	totale. . . .	*Zygnemaceae*
			parziale . .	*Mesocarpeae*
	Tra cellule libere.			*Desmidiaceae*

Fam. VI.—ZYGNEMACEAE

10. SPIROGYRA, Link (1820).

Dalla conformazione spirale della massa clorofillosa.

Sinonimia del genere. Choaspis, Gray—Salamacis, Bory—Conjugatae, Vauch.—Zygnematis sp. (ex. p.) Ag., Endl.—Confervae Auct.

Letteratura.— De Bary Conjugaten etc. pag. 1-8.— Petit Observations sur les genres Spirogyra et Rhynchonema (Bull. Soc. Bot. de France 1874, 38 p. 1 tav.) — Spirogyra des environs de Paris 1880. — Pringsheim Keim. der ruhenden Sporen. v. Spirogyra (Flora 1852) — Hoffmeister Bewegungen der Faden der Spirogyra (Würtz. nat. Jahrsber. XXX. 1874).— Strasburger Sur la formation et la division des cellules etc. Trad. fr. 1876, pag. 38 e seg. — Carter On misdirect efforts in conjugation of the Spirogyra. (Ann. of Nat. hist. 5ª ser. v. 6, 1880)—Bessey Hybridism in Spirogyra (Am. Natur. XVIII, n. 1, p. 67, 1884 etc.)—Zuckal Parthenogen. bei einig. Spirogyra (Journ. of R. Micr. Soc. III, 139).

Osservazione.

Il genere *Spyrogira* pel numero delle specie e per la difficoltà a poterne osservare la fruttificazione è uno di quelli che presenta le maggiori dubbiezze nella determinazione delle specie. S'aggiunga che gli esemplari disseccati non hanno gran valore come materiale di confronto, poichè le fasce di clorofilla si alterano stranamente colla disseccazione; e l'iconografia, meno alcune opere, lascia pur molto a desiderare. Non avendo potuto consultare la classica opera dell'Hassal: *A History of the British Freshwater Algae*, non ne ho citato le figure.

* *Membrana sub polis cellulae replicata.*

17. **Spirogyra Weberi** Ktz. Phyc. gen. p. 279.—Tab. Phyc. V. t. 14, fig. III.— Petit Spir. p. 9, tav. I, fig. 10-12. — Cooke Brit. Alg. pag. 95, tav. XXXIX, fig. 2, *a*, *b*, *c*.—Spirogyra ventricosa Ktz. Sp. 487. — Tab. Phyc. V, tav. 29-30. — Zygnema longatum Hass.

Exicc. nostra, n.° 12.

Sp. caespitibus laete-viridibus, expallescentibus, articulis vegetativis diametro 6-16plo longior. (diam. cellul. 22-28 μ), *spira unica;* articulis fructiferis *non* inflatis, sed saepius parum dilatatis; zygosporis cylindraceo-ellipticis.

Cespuglietti o masse libere nuotanti o più spesso in filamenti misti ad altre specie; colore giallastro verdognolo, alquanto mucosi, cellule 6-16 volte più lunghe che larghe: con spire di clorofilla verde chiaro, lasche e con granuli amilacei spiccati; 6-15 giri di una spirale *unica*. Articoli fruttiferi non rigonfiati o appena un poco dilatati, zigospore ovali ed ovato-cilindriche 1 ½-2 volte più lunghe che larghe.

Dimensioni filamenti: 22-28 μ; zigospore: 25-29 × 38-50 μ.

Figura nostra, tav. I, fig. 10-11.

Nelle vasche del R. Orto Botanico: tra le piante acquatiche coltivate in vasi.

18. **Sp. Weberi** *forma elongata* (sub Sp. Weberi P. Petit). Colla precedente ma in scarsi filamenti.

** *Membrana sub polis cellulae non replicata.*

* 19. **Sp. parva** (Hass.) Ktz.—Rabh. Eur. III. p. 236.— Ktz. Tab. Phyc. V, tab. 18, fig. III.

Vasche dell'Orto Botanico (Pedicino)—Pasquale Catal. del R. Orto Bot. di Napoli 1867, pag. 99.

* 20. **Sp. quinina** (Ag.) Ktz. Phyc. gen. 279, tav. XV, fig. 1—Rabh. Eur. III, pag.

240. — Zygnema quininum Ag. Syst. — Conjugata porticalis Vauch. — Nelle vasche dell'Orto Botanico (Pedicino) — Pasquale, l. c.

Osservazione

Queste due specie non ho potuto rinvenirle nelle vasche, nè meno negli stagni del Sebeto. Qualche filamento di *Spirogyra quinina*, ho riscontrato tra le Cladofore delle vasche alla Villa ; ma non ho potuto ricavarne esemplari.

21? Sp. arcta (Ag.) Ktz. — Rabh. Eur. III, 239. — Zygnema arctum. Ag. Syst. pag. 79. — Exicc. Rabenh. Alg. Eur. 1532!

Sp. obscure viridis, caespitosa, articulis aequalibus vel duplo longioribus, fascis spiralibus granulosis, anfractibus 1 $^1/_2$ - vel 3 - 3 $^1/_2$; zygosporis?

Osservazione

Premetto un segno dubitativo a questa specie, che ho incontrato più volte tra varie alghe filamentose (Fontana Medina — Villa — * Caserta alla Cascata ecc.) non avendo vedute le zigospore, nè avendone potuto conservare esemplari.

22. Sp. gracilis (Hass) Ktz.

— *b flavescens* Rabh. Eur. III, pag. 237. — Zygnema flavescens Hass. (cit. dal Petit.) Spirogyra flavescens Petit Spir. pag. 15, tav. III, fig. 5-6. — Spirogyra flavescens Hass. forma *b flavescens* Cooke Brit. Algae, pag. 98, tav. XXXVII, fig. 2.

Exicc. nostra n.° 13.

S. flavo-viridis, articulis sterilibus diametro 6-4 plo longioribus; fertilibus distincte tumidis (?) spirae anfractibus 2.

Cellule 3 volte più lunghe che larghe, spire di due o tre giri larghi e di color verde assai chiaro. Non ho veduto le zigospore.

Dimensioni dei filamenti 12-14 μ; zigospore 20 × 35 μ.

Nelle acque stagnanti del Sebeto ho raccolto questa specie, la quale forma delle masse di color verde giallognolo, come nubecole, ora libere, ora attaccate alle piante, acquatiche.

Osservazione

Pel riscontro delle figure questa specie mi sembra convenire con la *Sp. gracilis q. flavescens,* riportata negli autori. Petit dice che essa non è mai galleggiante ; io ne ho raccolto esemplari galleggianti e puri, come è quello sotto al n.° 13 dell'*exiccata.*

23. Sp. condensata (Vauch.) Ktz. Tab. V, tav. 22, fig. 3. — Rabh. Eur. III, 241. — Petit Spir. p. 22, tav. IX, fig. 6-8. — Cooke Brit. Alg. pag. 91. tav. XXXVI, fig. 1 *a-g.* — Conjugata condensata, Vauch. Hist. t. 5, fig. 2. — Spirogyra varians Ktz. Sp. 439.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2514. Exicc. nostra, n.° 14.

Sp. saturate viridis, articulis sterilibus diametro aequalibus aut paulo longioribus; fertilibus modice inflatis non abbreviatis, fascis spiralibus latis, granulatis, anfractibus arctis, 2-4. (Zygosporas non vidi!)

Cespuglietti di color verde carico alquanto increspati, cellule cilindriche più o

meno brevi secondo lo stato di sviluppo, con fascia di clorofilla larghetta a giri più o meno ristretti.

Dimensioni: filam. 40 μ; zigospore 35-40 μ.

Tra le Cladofore alla Fontana Medina. Non abbondante.

*24. **Sp. dubia**, Ktz.

b. longiarticulata Ktz. Tab. V, p. 8, tav. 28, fig. 1. — Articulis cylindricis diametro 5plo longioribus; spirae 2-3, anfractibus 7-8 ½ (Rabh.).

Nelle vasche dell'Orto Botanico (Pasquale Catal. del R. Orto Bot. 1867, p. 99).

*25. **Sp. subaequa** Ktz. Tab. Phyc. V, tab. 26, fig. II.—Rabh. Alg. Eur. n. 23.— Sp. bellis? (Hass) Clève. — Pet. Spir. pag. 31, tav. X, fig. 1-3. — Colla precedente (Pasquale l. c.)

26. **Sp. orthospira** (Naeg.) Kütz. — Rabenh. Eur. III, 244. — Petit Spir. pag. 30, tav. X: fig. 4-5.—Cooke Brit. Algae, pag. 87, tav. 33, fig. 2.—Sp. majuscula, Ktz. Sp. Alg. pag. 441. — Tab. V, tav. 26, fig. 1.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. 1099! — Roumg. Alg. Fr. n.° 195.

Exicc. nostra n.° 15.

Sp. pallide viridis, fructificationis tempore fuscescens, articulis sterilibus cilindricis, extremis truncatis, diametro 2 — 4-10plo longioribus (Cooke); spiris chlorophyllosis 3-5, modo rectis, modo laxissime spiralibus. Zygosporis lenticularibus; articulis fructiferis vix tumidis, diametro 2plo — 4plo longioribus.

Filamenti di color verde chiaro isolati in mezzo ad altre alghe, articoli (60-68, μ. diametro) 2-3-10 volte più lunghi che larghi: articoli sporiferi poco o nulla rigonfiati; zigospore lenticolari e quindi mutabili d'aspetto secondo la posizione. Questa specie è distinta dalla posizione quasi dritta delle fasce di clorofilla, le quali sono di color verde chiaro.

Diam. delle zigospore 70-73 μ.

Vasi di piante acquatiche al R. Orto Botanico, rara altrove. Esemplari in fruttificazione!

Ic. nostra, Tav. I, fig. 12-15.

Osservazione

Il processo della divisione cellulare nei filamenti della *Sp. orthospira* è stato studiato e minutamente descritto dallo Strasburger[1]). Nel materiale raccolto e coltivato artificialmente ho potuto constatare gli stessi fatti notati dallo Strasburger, meno alcune particolarità, che non mi è riuscito di vedere quantunque avessi ripetutamente esaminato i filamenti nelle ore della notte (avvenendo soltanto allora la segmentazione cellulare) ed avessi fatto uso di opportuna illuminazione, temperando la luce della lampada a petrolio con vetro di colore azzurro chiaro.

27. **Sp. crassa**, Ktz. — Tab. Phyc. V, Tav. 28, fig. II, Rabenh. Eur. III, 246. — Petit Spir. pag. 32, tav. XII, fig. 3-4. — Cooke Brit. Algae p. 85, tav. XXXII, fig. 1. — Zygnema serratum, Hass.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 397. Erb. critt. ital., Ser. II, n.° 128, 1241. Roumg. Alg. Fr. n.° 79. — Exicc. nostra n.° 16.

Spirogyra sordide viridis, demum fuscescens, setae crassitie: siccando chartae mi-

[1]) Strasburger. *Sur la formation et la division des cellules.* Ed fr. trad. par Kickx 1876. pag. 38-57.

nus adhaerens, rigida; articulis sterilibus diametro aequalibus, duplo longioribus vel brevioribus (post divisionem factam) membrana tenui homogenea, ad genicula laevissime constrictis (Rabh.); fasciis spiralibus 4, sublatis, profunde dentatis v. tuberculatis, irregulariter remotis; zygosporis late ellipticis v. ovoideis.

Questa specie è la più grande di tutte: i filamenti sono visibili ad occhio nudo, alquanto rigidetti, di un bel colore verde, mucillaginosi, con fasce di clorofilla larghette *dentate* irregolarmente distanti, con granuli amilacei brillanti; le spire divengono più o meno numerose e ristrette secondo che le cellule tendono o no a dividersi. Non ho vedute le zigospore.

Dimensioni: filamenti 145-158 μ; zigospore 144-150 μ (Petit).

Viene nelle vasche della città, raramente. Nella vasca del gran viale dell' Orto Botanico.

Osservazione

Questa specie presentasi quasi sempre in masse di color verde carico, ed i cui filamenti sono di un bel colore verde. Rabenhorst dice che è alquanto ristretta nelle articolazioni; mentre questo carattere non si vede nelle figure del Petit e del Cooke; io non ho mai osservato restringimento di sorta, soltanto un lievissimo indizio ne ho veduto nello stadio di segmentazione dei filamenti.

Oltre le specie qui enumerate ho potuto raccoglierne delle altre, la cui determinazione è tuttora dubbiosa, mancandomi la conoscenza delle zigospore.

Fam. VII. — MESOCARPEAE

11. MESOCARPUS Hassall (1845).

(Da μέσος mezzo e καρπός frutto; per la posizione della zigospora).

Sin. del genere. — Mougeotia, Ag. et Auct. — Pleurocarpus A. Br. — Zygogonium (ex p.) Ktz.

Letteratura — De Bary, Conjugaten etc. — Wittrock. On the Spore formation of the Mesocarpeae 1878. Riassunto in Cooke Brit. Algae, p. 101-102.

28. **Mesocarpus pleurocarpus**, De Bary Conjug. 81. — Cooke Brit. Alg. 105, tav. XLIII, fig. 1. — Pleurocarpus mirabilis A. Br. Alg. unic. pag. 60. — Rabenh. Eur. III, pag. 258. — Mougeotia genuflexa, Ag. et Auct. — Zygogonium pleurospermum, Ktz. Tab. Phyc. V, tab. 13. — Conferva genuflexa, Dillw. Conf. tab. 6.

Cellulae cylindricae diametro (25-30 μ) 2-3plo longiores; zygosporis subglobosis, fuscis, laevibus (Rabenh. l. c.).

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. n.° 1119 cum icone — Roumg. Alg. Fr. n.° 25 — Exicc. nostra n.° 17.

Abbondante nei corsi d' acqua dei Pasconi; copre la superficie delle acque sta-

gnanti o poco scorrenti, presentandosi in masse irregolari, muccoso-fioccose di color verde giallognolo o flavescente. Seccando diviene bruna e aderisce fortemente alla carta. Una sola volta ho veduto la zigospora.

Raramente viene nelle vasche ed aquarî: nelle vasche dell' Orto Botanico (Pasquale, Cat. del R. Orto Bot. 1867, pag. 68).

Fam. VIII. — DESMIDIACEAE

Bibliografia — Meneghini. Synopsis Desmidiacearum etc. Linnaea 1840.— Ralfs. The British Desmidiaceae. Lond. 1848. — Brèbisson. Liste des Desmidiacèes de Normandie, 1856.— Pritchard. Hist. of Infusoria etc., 1861.— De Notaris. Elementi per lo studio delle Desmidiacee italiche, 1867. — Lundell. De Desmidiaceis quae in Suecia inventae sunt etc., 1871.— Delponte. Specimen Desmidiacearum subalpinarum. Atti Acc. Sc. di Tor., 1873.— Jacobsen. Aperçu systematique et critique sur les Desmidiacèes de Dannemark, 1874. (In quest' opuscolo riscontrasi una ricca bibliografia sull' argomento).— Van Tieghem. Traitè de Botanique (pag. 1119-1121) 1884. — Wolle Desmids of the United States etc. Bethlehem, Pa., 1884.

(Algae ex unica cellula medio deinde abrupta, in partes duas eximie symmetricas, aliae obtusae liberae, aliae aggregatae, nempe e cellulis quae prout dimidiantur invicem cohaerent atque in catenam abeunt, cujus primus annulus atque postremus, cellulas dimidias referunt, e quibus universa prodiit soboles intermedia.

Individuorum nexus hujusmodi fit per substantiam plasticam intermediam, minime per continuitatem organicam, accedente sentore quodam mucoso, qui desmidiacearum omnium corpora de more obvestit.

Qui quidem mucus strato quodam evolutionis tempore in plerisque speciebus, probabili ratione in omnibus, magna effuditur copia et laxae vaginae ad instar in saccum translucidum abit, inclusa cellula duplo triplo grandiore.

Exinde orta desmidiacearum divisio in *vaginatas* atque *evaginatas*, seu nuda. Delponte Specim. pag. 15).

La cellula delle Desmidiacee *(lorica)* è formata di due parti simmetriche (*hemisomata* Bréb. *hemicytia* Delp.), ma però di età differente, dappoichè dopo una prima segmentazione, una delle due metà produce, completandosi, un'altra semicellula simmetrica alla prima, come può osservarsi specialmente nei Cosmarium.

Queste cellule ora sono libere, ora rimangono insieme riunite in filamenti, per lo più avvolti da uno strato gelatinoso. La superficie della lorica può esser liscia ovvero striata, tubercolosa o munita di processi spiniformi, più o meno pronunziati, tenuti da alcuni come mezzi protettivi (Jacobsen [1]).

L'endocroma clorofilloso con granuli amilacei è disposto nel sacco protoplasmatico della cellula in vario modo: disposizione che fornisce buoni caratteri per la distinzione dei generi. Oltre a ciò nei Closterii e Pleurotenii esistono, agli estremi della cellula, due vacuoli (spazii vescicolari) ove numerosi corpuscoli si veggono muovere con movimento browniano e sono detti *corpuscoli trepidanti*. Il Morren [2]) credea che questi corpuscoli avessero uno speciale ufficio nella riproduzione delle specie.

[1]) Jacobsen — *Aperçu etc. sur les desmid. de Dannemark, p. 2.*
[2]) *Mèmoires sur les Closteriès.* (Ann. des Sc. Natur. Botanique) 2 serie, vol. V, pag. 365.

Le desmidiacee libere vanno soggette a movimenti più o meno spiccati, quantunque sprovvedute di organi locomotori.

L' Ehrenberg classificò le Desmidiacee tra gli *infusorii anenterî poligastrici* poco diversificandole dalle Criptomonadi. Ammise in alcune la presenza di piedi come nel Pleurotenium; questi pretesi piedi sono le papille che adornano la lorica di questo genere.

Le radiazioni luminose eccitano i movimenti nelle desmidiacee. Infatti specialmente nei Closterium il moto verso la luce è assai spiccato; come l'hanno osservato Delponte [1]) e Stahl [2]) e come io stesso ho potuto sempre verificare nelle coltivazioni artificiali di queste piante ed anche in certi casi osservandole sul loro naturale sostrato. Ricordo come nel settembre del 1881 mi occorse di vedere la superficie dell' acqua della grande vasca in Piazza Cavour letteralmente coperta di estese macchie verde azzurro a contorni irregolari ma definiti, tal che a prima giunta somigliavano a feltri di Oscillarie. Era una fitta massa di *Closterium acerosum* (exicc. n.° 19) la quale emerse dal fondo, essendosi fatto limpido il cielo dopo alquanti giorni di nuvolo, ed elevata alcun poco la temperatura. Questo stato di cose durò per due giorni; dopo i quali tutti i Closterî scomparvero come per incanto. Ho veduto sempre le cellule delle desmidiacee farsi strada attraverso il fango e portarsi alla superficie dell'acqua non pure, ma ancora attaccarsi, elevandosi, alle pareti dei recipienti nei quali erano racchiuse e assai più dal lato della luce: i Closterî, ad esempio, allorchè l' illuminazione è conveniente, o si dispongono nella direzione stessa del raggio incidente, o normalmente a questa, secondo che la luce è debole o forte. I movimenti che la cellula del Closterio esegue sotto l'azione della luce dipendono dalla energia e dalla refrangibilità delle radiazioni.

Il processo di riproduzione nelle desmidiacee, osservato già in principio dal Lyngbye nel *Desmidium Swartzii*, consiste nello accoppiamento di due cellule libere, o di due consecutive dello stesso filamento, le quali si uniscono, fondono i loro protoplasmi e danno origine ad una zigospora di forma variabile, la quale germoglia dopo parecchi mesi di vita latente. L'analogia delle desmidiacee e delle zignemacee fu rilevata dal Lyngbye [1]) e di poi, essendo stato osservato l'accoppiamento nei *Closterium* da Morren nel 1836 [2]) e da Ralfs nel 1843 (nei generi *Staurastrum* e *Tetmemorus*), la riproduzione per zigospore divenne un carattere di famiglia.

Io non ho mai potuto vedere le desmidiacee in riproduzione, e non è a meravigliarne stante la scarsezza di rappresentanti nella regione che ho esplorato. Non fu più fortunato il De Notaris, come egli stesso dichiara nel suo lavoro sulle Desmidiacee italiche [3]).

[1]) *Hydrophytologia Danica*, pag. 178.
[2]) *Mém. sur les Closteriées*, pag. 328.
[3]) *Elementi per lo studio delle desmidiacee italiche*, pag. 19 (nota).

12. CLOSTERIUM, (Nitzsch 1827). Ehr. 1828.

Da κλοστηρ fuso, per la forma della cellula.

Sin. del genere — Vibrio, Müll. 1777, — Trachelius (ex p.) Schranck. — Lunulinae et Naviculae sp. Bory.

Letteratura. — Morren, Mem. cit. 1836.— Ritter (Hyac.) Ueber eine wahre Safstromung in Closterium Lunula (Linnaea 1840).— Focke Physiologische Studien, 1847.—Naegeli Gattung. einzell. Algen pag. 105.—Braun, Betrachtungen über die Erschein. der Verjungung in d. Natur., p. 213-214, 1853.— De Bary Conjugat. p. 48, 1858.—Osborne Quart. Journ. of Micr. Science III, p. 54. VIII, p. 235. — Zuchal Wien. bot. Zeit. 1869, n. 8, p. 152.— Archer Quart. Journ. 1862.— Schumann Ueb. die Bewegung. in der Zelle von Clost. Lunula. Flora 1879, p. 65.— Stahl Bot. Zeit., 1880.

Osservazione

Il Nitzsch riguardato dagli autori come il fondatore del genere, lo formò con tre specie di *Vibrio* del Müller delle quali solo una è veramente un Closterium (*Vibrio Lunula* Müll. — *Clost. Lunula* Nitzsch non Ehr!). Devesi però all'Ehrenberg l'aver arricchito questo genere di molte specie e di averne delineati i caratteri; quindi a buon dritto ne deve essere tenuto per autore [1]).

29. **Closterium Lunula** (Müll.) Ehr.—Cl. Lunula Nitzsch.—Kütz. Sp. p. 163. Rabh. Eur. III, pag. 127. De Notaris Desmid. pag. 59, tav. VI, fig. 61.—Delp. Desmid. pag. 91, tav. XVI, fig. 1-3—Wolle Desmids, pag. 40, tab. L, fig. 26 (porzione di cellula; figura di niun valore!). Vibrio Lunula (?) Müll.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1767! — Erb. critt. ital. Serie I, n.° 1446—Roumg. et Manour. Alg. Fr. n.° 219—Exicc. nostra n.° 16.

Cl. permagnum, sublaeve, semilunare, dorso alte convexum, ventre subplanum, apicibus attenuatis rotundatis (*obtusis*) vesiculis chlorophyllaceis numerosis sparsis; locello distincto subapicali, corpuscula numerosa includente (Char. emend.).

Dimensioni: 400 — 600 × 80 — 100 μ.

Nelle vasche del R. Orto Botanico, della Villa Comunale, nelle acque stagnanti di uno spanditoio a Poggioreale (con *Cl. acerosum!*) etc.

30. **Cl. acerosum**, Ehr. (Char. emend.)—Ktz. Sp. 164. — De Not. Desmid. p. 61, tav. VIII, fig. 65.—Delp. Specim., p. 193, tav. XVI, fig. 4-13.—Wolle Desmids, p. 41, tab. VI, fig. 7, 11, et tab. VIII, fig. 17. — Vibrio acerosus Schr.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 706! — 1957 (forma striata!). Exicc. nostra, n.° 19.

Cl. lineari fusiforme, subrectum vel leviter curvatum, utroque fine sensim attenuatum, apicibus obtuse conicis rectis, diametro 12-15 (vel 16plo) longiore; membrana plerumque distinctissime, striata; vesiculis amylaceis 6-11 in utroque crure in serie axili simplici ordinatis; locello subapicali, parvo, corpuscula ad 20 includente.

Cellule fusiformi dritte o leggerissimamente incurvate ad apici acuti, con loculo e corpuscoli mobili ben distinti, endocroma di color verde scuro a fasce longitudinali con una serie di granuli.

[1]) Jacobsen — *Aperçu etc.*, pag. 166.

Abbondantissimo (per due giorni soltanto!) nella vasca grande a Piazza Cavour Settembre 1881.

31. **Cl. Leibleinii**, Ktz. var.? *angulatum* mihi. Ic nostra, tav. I, fig. 16-18. — Cellula semilunaris parum curvata, medio parte dorsali et ventrali subito porrecta. Endochroma cum granulis amylaceis uniseriatis, plus minus evidenter linea media ordinatis. Magnitud. 160 × 56 μ.

Exicc. nostra, n.° 20.

Cellula semilunare, però poco convessa, rigonfiata nel mezzo, e più verso il ventre che verso il dorso sporgente ad angolo bruscamente; quasi acuta agli apici il cui lato ventrale è quasi dritto. Endocroma chiaro con piccoli granuli verdi; facilmente contraesi dividendosi in due masse, che collo schiacciamento della cellula *escono dal lato dorsale* a guisa di sacco tenuissimo.

In una vasca alla Villa.

Osservazione

Ho rinvenuto questa forma in una vasca alla Villa Comunale, e mi parve differire alquanto da quelle forme di Closterii che ho potuto esaminare. Corrisponde, in quanto alla sagoma, alla fig. 5 della tav. XVII dello Specim. Desmid. subalpin.; ne differisce però per la maggiore sporgenza del ventre e del dorso. Non avendo potuto consultare l'opera del Ralfs, nè esemplari tipici del Cl. Leibleinii Ktz., do con riserva questa mia varietà.

32. **Cl. Dianae**, Ehr. non Ralfs.—Rabh. Eur. III, p. 133.—Delp. Desmid. p. 195.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 547, 1407, tav. XVII, fig. 45-51. Closterium Venus Ktz. Wolle Desmids, pag. 44, tab. VI, fig. 6.

Exicc. nostra, n.° 21.

Cl. anguste fusiforme semilunare magis curvatum, utroque polo valde attenuatum, apicibus subacutis, vesiculis chlorophyllaceis 6-7 in unica serie ordinatis, membrana laevi achroa.

Dimensioni 9 — 20 × 90 — 180 μ.

Cellule perfettamente semilunari, ad apici acuti o subacuti, ma però non tagliati a sbieco, endocroma verde chiaro, che colla preparazione e disseccamento forma un cordone assile; granuli amilacei e clorofillosi disposti in serie. Locello indistinto.

Nella vasca maggiore dell'Orto Botanico, frequentissimo.

Osservazione

Questa specie si nota da Delponte come avente gli estremi tagliati a sbieco. Così pure le figure del Jacobsen (tav. VII, fig. 3, *a*, *b*, *c*, appena accennano ad una leggiera obbliquità dell'apice, di cui però l'autore non fa menzione.

Il Wolle (l. c.) note come distinte specie il *Cl. Dianae* (tav. VI, fig. 8-9) e il *Cl. Venus* (ibid. fig. 6); mentre Delponte li ritiene per sinonimi. Le figure però di queste due specie non differiscono che per la grandezza mancando, nel *Cl. Dianae* disegnato dal Wolle, il carattere degli apici della cellula obliquamente troncati.

33. **Cl. incurvum**, Brèb. Liste des Desmid. pag. 150, tav. II, fig. 47—Rabenh. Eur. III, pag. 135.—Delp. Specim. p. 198, t. XVII, fig. 22-27.

Exicc. nostra, n.° 21.

Lorica semiorbiculata, diametro 3plo-5plo longiore, apicibus acutis, vesiculis chlorophyllaceis serie unica dispositis.

Differisce dal Cl. Dianae per una maggiore larghezza ed apici acuti. Endocroma verde chiaro, vescicole assili, corpuscoli poco visibili. Membrana liscia.

Dimensioni: 8-10 × 75 × 120 μ.

Nelle vasche dell'Orto Botanico in società con *Cosmarium Botrytis e C. Meneghinii.*

Osservazione

Gli esemplari raccolti somigliano a piccoli *Cl. Lunula* ma ne differiscono pel ventre uniformemente concavo. Convengono colle figure del Delponte. Non ho potuto vederne esemplari autentici. Con tuttociò non esito a ritenerli come ben definiti presentandosi sempre con gli stessi caratteri nelle diverse epoche in cui li ho raccolti.

13. COSMARIUM, Corda.

Da κόσμος ornamento, per la forma simmetrica della lorica.

Sin. del genere. — Cosmarium et Colpopelta, Corda. — Heterocarpellaé et Pandurellae sp. Ktz. — Ursinellae et Heterocarpellae sp. Turp. — Cymbella ex p. Ag.

Letteratura.—Naeg. Gattung. etc. pag. 114.— De Not. Desmid., p. 34. — Archer Ueber unahnlichen Zygosporen zweier kleiner Cosmarium (Quart. Journ. 1877, p. 94). — Cooke, New Cosmarium. (Grevillea IX, 1880 p. 16).

34. **C. Botrytis,** (Bory) Menegh. Syn. Desm. p. 220.—Ktz. Sp. p. 175. De Bary, Conjug. p. 7, tav. VI, fig. 1-24. — Grun. in Rabenh. Beitr. Heft. II, p. 15. Tavola II, fig. 26. — De Not. Desm. p. 43, Tav. III, fig. 28. — Delp. Desm. pag. 118, Tav. VIII, fig. 81-39. — Wolle Desmids pag. 74, tab. XIII, fig. 5-7. — Cosmarium deltoides, Corda. — Euastrum Botrytis, Ehr.—E. margaritaceum Focke Phys. Stud. Tav. II, fig. 17-19. — Cymbella reniformis, Ag. Consp. Diat. 103. — Heterocarpella Botrytis, Turp. Dict. Tav. VIII, p. 180.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1960! — Alg. Sachs, n.° 17. Exicc. nostra, n.° 22.

Semicellulae obtuse triangulares, diametro subaequales v. paulo longiores, ventre subplanae, dorso late truncatae. Cytioderma granulatum.

Cellula di grandezza variabile, quasi $^1/_5$ più lunga che larga, profondamente strangolata nel mezzo, le due semicellule deltoideo-troncate o rotondate al contorno, coi lati commessurali rotondati. Endocroma verde, lamine di clorofilla raggianti, uno o due globuli di fecola in ogni semicellula. Membrana verrucoso-punteggiata.

Dimensioni: 30-65 μ.

Non raro nelle vasche, tra le *Cladophorae*, ai Pasconi, e nella vasca del giardino del Liceo V. E.; nell'Orto Botanico.

35. **C. Meneghinii,** Bréb. Liste, pag. 127, n.° 10—Rabh. Eur. III, p. 163—Delp. Spec., pag. 98, tav. VII, fig. 5-9. — Wolle Desmids pag. 65, tab. XVI, fig. 7.—He-

terocarpella bioculata? — Cosmarium bioculatum Menegh. Lyn. (Sinn. 1840, p. 220, n.° 11).

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. n. 1902 d.—Erb. critt. ital. Serie I, n.° 1255—Roum. Alg. Fr., n.° 61. Exiccata nostra, n.° 22.

C. parvum subquadratum, modo paulo longius, modo brevius, profunde constrictum, sinu lineari extrorsum non ampliato; semicellulis subquadratis, laeviter sinuato-hexagonis, angulis rotundatis, cytiodermate laevi, v. subtilissime punctulato.

Piccolo, di fronte quasi quadrato o sub-rettangolare con le due semicellule ugualmente lunghe che larghe, o metà più brevi, scissura mediana ristretta, contorno sinuoso esagonale, angoli più o meno smussati. Un globulo di fecola per ogni semicellula. Membrana liscia o leggierissimamente punteggiata.

Dimensioni 19-22 μ.

Nelle vasche dell'Orto Botanico, al Pascone, rigagnoli del Sebeto, ove però è raro; frequente nelle vasche ed acquarî.

Osservazione

Questa specie presentasi polimorfa, avvicinandosi o discostandosi dalla forma tipica. Secondo la stagione ho veduto le cellule di questa specie ora in tutto simili, ora alquanto dissimili, più o meno angolose (var. *angulosum* Rabh., l. c. — (*C. angulosum* Bréb.), e qualche volta retuse. Alcune forme convengono piuttosto col *Cosmarium euastroides* figurato da Delponte alla tav. VII, fig. 52.

36. **Cosmarium neapolitanum**, *n. sp.* Ic. nostra, tav. II, fig. 1-4.

Exicc. nostra n.° 23. In un acquaio presso al Pascone Capece.

C. parvum, subquadratum, plerumque tam longum quam latum, sinu brevi, lineari; semicellulae fronte subrectangulae, v. saepe trapezoideae, diametro subduplo longiores, angulis rotundatis, e latere ellipticae medio sensim sensimque inflatae; membrana punctulata, punctis in seriebus subrectis ordinatis: endochroma viride effusum, granulis binis in quavis semicellula notatum.

Cellule quasi rettangolari con angoli rotondati, qualche volta quasi trapezoidali poco ristrette nel mezzo, 2 volte, o poco più, lunghe che larghe, di fianco ellittiche e a poco a poco rigonfiate nel mezzo. Due granuli di amido in ogni semicellula.

Dimensioni: semicell: 22 × 48 μ.

Osservazione

Avendo riscontrate le figure che si trovavano disegnate nelle opere che ho potuto avere alla mano, non ho potuto identificare questa specie con niun'altra. Per la forma sta tra il *C. Broomei* ed il *C. biretum* Bréb.; differisce dal primo per la grandezza e per la forma delle semicellule, che di fronte sono quasi rettangole, con troncature angolari però meno estese; ne differisce ancora per la superficie della membrana che è punteggiata e non granulata, come nel *C. Broomei*. Qualche individuo somiglia alquanto alla varietà di questo disegnata dal Wolle (pl. XVII, pag. 8), ma è alquanto meno arrotondato ai lati. Somiglia al *C. biretum* per la forma subtrapezoidale delle semicellule, forma che non è però spiccata e sempre assai meno che in quello. Di lato

conviene perfettamente per la forma colla figura del *C. biretum*, almeno seconda la figura del Wolle (l. c., fig. 2); ne differisce e per la grandezza e per l'aspetto non granulato della superficie.

14. STAURASTRUM, Meyen (1829).

Da σταυρός aculeo, croce, per la forma delle cellule.

Sin. del genere. Binatella, Bréb. — Micrasterias, Sp. Ktz. — Phycastrum Naeg.
Letteratura — Naeg. Gatting. pag. 124. — De Bary Conjug. p. 71.

34. **St. Incus** (Bréb.) Menegh. Syn. — Jacobsen Desm. Danemk. in Bot. tidsskr. 2, r. IV, pag. 204, tab. VIII, fig. 26 — St. cuspidatum, Delp. Desm., t. X, f. 26, pag. 136. — Arthrodesmus Incus (Hass.) Bréb. — Rabh. Beitr. I, p. 15, t. II fig. 29. Ejusd. Fl. Eur. III, pag. 226. — Wolle Desmids, pag. 97 tab. XXIV, fig. 6, 7.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n° 1204; Exicc. nostra, n° 21.

St. parvum, subquadrangulum, sinu lineari exciso, semicellulis oblongo quadrangularibus aculeatis; aculeis singulis divergentibus. — Species polymorpha.

In rari individui tra varie diatomee nelle vasche dell'Orto Botanico.

Osservazione

Questa specie varia per la forma delle cellule e per la direzione delle spine, le quali ora sono parallele ora convergenti, ora divergenti. Jacobsen sotto lo *St. Incus* disegna una forma, che si accorda perfettamente colla nostra, la quale è per sè stessa polimorfa. Però tra i generi *Arthrodesmus* e *Staurastrum* vi è poca differenza, per modo che la nostra specie può convenire collo *Staurastrum cuspidatum* (Rabh. Eur. Alg. n.° 1327), e coll'*Arthrodesmus Incus* Rabh. Alg. Eur. n.° 1204.

Sub-ordo II. — *ZOOSPOREAE*

Fam. IX. — HYDRODICTYEAE

Letteratura — (Veggasi il gen. Hydrodictyon).

15. SCENEDESMUS, Meyen (1829).

Da σκῆνός dimora e δεσμός legame per lo stato delle cellule sempre riunite in famiglia.

Sin. del genere. Achnanthes Bory, Encycl. Dict. 1830 — Arthrodesmi sp. Ehr. Scenodesmus Ktz., Bréb.

Letteratura — Meyen. Beobacht. über einige niedere Algenformen (N. Act. Ac. Nat. Curios. etc. XIV, Pars II) 1829 — Naegeli. Gattungen einzell. Alg. etc., p. 89,

* *Cellulae inermes.*

35. **Sc. obtusus**, Mey. — Rabh., Eur. III, p. 63 — Ktz. Sp. Alg. 185 — Ralfs. Ann. of. Nat. Hist. XV, pag. 404; tav. XII, p. 8 — Cooke Brit. Alg. pag. 38, tav. XIII fig. 5.

Exicc. Erb. critt. ital., Ser II, n.° 283. Exicc. nostra, n.° 24.

Sc. cellulis oblongo-ovatis, utroque polo obtusis, 4-6-8 in seriem simplicem aut duplicem, rectam vel obliquam, plus minus arcte connexis; diametro 3-5plo longioribus.

Cellule ovate od ovato-oblunghe, ottuse, disposte in serie unica ora per dritto, ora oblique: endocroma verde leggermente granulare, con punto brillante (nucleo) più o meno spiccato.

Dimensioni: 5-7 μ diam.

Sviluppasi comunemente nelle vasche, stagni, e per lo più negli acquarî artificiali; in alcune località è impossibile conservare lungo tempo dell' acqua senza che si sviluppi una massa verde di Scenedesmi.

36. **Sc. acutus**, Mey. — Rabenh., Eur. III, p. 63. — Ktz. Sp. Alg. p. 186. — Ralfs. Ann. of. Nat. Hist., tav. XII, fig. 6. — Cooke Brit. Alg., pag. 33, tav. XIII, fig. 6, *a*.

Exicc. nostra, n.° 25.

Sc. cellulis ovato-fusiformibus utrinque acutis, 2-8 in seriem arctissime conjunctis, ordinate vel inordinate, nonnunquam solutis; diametro 3-6plo longioribus.

Dimensioni: 3-6 μ diam.

Differisce dal precedente per le cellule fusiformi, acute agli estremi strettamente congiunte, spesso obblique; le cellule qualche volta sono riunite due a due, qualche volta isolate; e ciò secondo gli stadii di sviluppo.

In società col precedente; si sviluppa nelle stesse località e condizioni. È però, secondo le mie osservazioni più frequente nelle vasche e fontane che negli acquarî.

** *Cellulae armatae*

37. **Sc. quadricauda** (Bréb.). Turp. 1820. — Rabenh. Eur. III, pag. 65, Cooke Brit. Alg., pag. 34; tav. XIII, fig. 8. — Scenedesmus caudatus Corda Alm. de Carlsb. 1834. — Ktz. Sp., pag. 186. — Arthrodesmus quadricaudatus Ehr. — De Not. Desmid. 73, Tav. IX, fig. 84.

Exicc. Erb. critt. ital. Ser. II, n.i 917, 1136. Exicc. nostra, n.° 26.

Sc. cellulis oblongo cylindricis utroque scolo obtuso-rotundatis in familias 2-8 arctissime conjunctis, simplici v. duplici serie, omnibus rectis; extremis utroque apice mucronatis aculeis curvatis, saepius item dorso armatis.

Dimensioni: 7-8 μ × 10-20 μ.

Le cellule in questa specie sono per lo più riunite a quattro a quattro, di forma cilindracea oblunga, strettamente congiunte ed ottuse; le due ultime della serie portano a ciascuna estremità una setola più o meno lunga.

Vive nelle acque delle fontane della città, e sviluppasi qualche volta negli acquarî artificiali.

Osservazione

Il Meyen [1]), fondatore del genere *Scenedesmus*, descrisse e disegnò le forme dello *Sc. quadricauda*, sotto i nomi di *Sc. magnus* e *Sc. longus* (Beobacht., pag. 774, Tav. XLIII, fig. 26, 27, 28, 29) secondo che era formato da quattro, ovvero da otto

[1]) Beobachtungen über einige niedere Algenformen (in *N. Act. Acad. Nat. Curios. XIV. Pars II*, 1829).

cellule. Ne disegnò ancora uno (fig. 29), formato di 3 cellule di cui la mediana fornita di setola sul dorso. Tutte queste non sono che gradi di sviluppo di una sola specie.

Lo sviluppo di queste forme si verifica più specialmente in primavera. Nello *Scenedesmus acutus* e *quadricauda* due coppie di due zoospore si uniscono e formano un cenobio o colonia, la quale sviluppa le ciglia conservando i nuclei brillanti. Le fasi successive della formazione dello *Scenedesmus obtusus*, sono rappresentate nella tav. II, fig. 5. Sviluppatasi l'alga, sparisce dalla superficie dell'acqua ed invece si ha sul fondo una massa di aspetto grumoso, verde, non mucosa, la quale ridà poscia altre colonie. Le zoospore, come tutte le altre, hanno una spiccata tendenza eliotropica. La divisione della massa protoplasmatica nella cellula madre dà luogo alla formazione dei gonidii, i quali si conformano a cenobio, rendendosi liberi con la dissoluzione della membrana della cellula madre.

16. PEDIASTRUM, Meyen (1829).

Da πέδη ed ἄστρον stella per la forma piana e stellata del cenobio.

Sinon. del genere. — Micrasterias Ag. (ex p.). — Crucigenia Morren. — Helierella Bory. — Echinellae sp. Lynb. et Ag. Consp. — Selenaea Nitzsch.

Letteratura. — Meyen Beobacht. etc. l. c. p. 772. — Braun Algar. unicell. gen. 1855. — Ejusd. Betrachtungen über die Erscheinung der Verjüngung in der Natur etc. 1851. — Cooke Brit. Algae pag. 40.

38. **P. Boryanum** (Turp.) Menegh. Syn. — Naeg. Einz. Alg. 95, Tav. V, B figura 1. — Rabenh. Eur. III, 74. — Cooke Brit. Algae p. 42, tav. XVI. fig. 11; — a-d. — Volle Desmids Unit. Stat. pag. 153, tab. LIII, fig. 22, 29, 32. Pediastrum granulatum Braun. — Ped. Napoleonis Ralfs. — Micrasterias Boryana Ehr. Inf. tav. XI p. 5,a-l. Hierella Boryana Turp. Mém. du Mus. XVI.

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. n.° 1213, 1435, Moug. et Roum. Alg. Fr. n.° 135. Exicc. nostra n.° 22.

Coenobium planum, orbiculare, oblongum v. ellipticum; cellulis 4-64 (rarius 128) compositum, laete viride, cellulis perifericis plus minus profunde emarginato-bilobis lobis cornutis, cornibus achrois acutis, obtusis, vel interdum capitellatis.

Species admodum variabilis (Rabh.).

Cellule riunite in un disco piano, continuo, più ordinariamente in numero di 16-32; irregolarmente poligonali, le periferiche bilobe con lobi acuti, acuminati, jalini, le centrali 4-5-6 angolate strettamente congiunte. La membrana talvolta diviene di un leggero colorito roseo; più o meno punteggiata. Contenuto granuloso.

Dimensioni: diam. delle cell. 5-18 μ.

Nelle acque tranquille specialmente delle vasche; non mai abbondante, ma sempre in scarsi ed isolati individui.

17. HYDRODICTYON, Roth (1800).

Da ὕδωρ acqua e δίκτυον rete, per la stazione e per la forma reticolata del cenobio.

Sinon. del genere.— Hydrodictyon Roth.—Reticulina Bory. —? Dictyolema Rafin — Godal sp. Adans. —Confervae sp. L. et Auct.

Letteratura —Braun. Die Verjüngung in der Nat. etc. 1851.— Ejusd. Algar unic. genera etc. 1855.— Cohn N. Acta Acad. Leop. Carol. XXIV, I p. 209.—Pringsheim. Sur les Chronispores de l'Hydrodictyon. An. Sc. Nat. 4e XIV, p. 52.—Ejusd. Monatsb d. K. Akad. Wissensch. z. Berlin 1860 p. 777.— Cesati in Hedwigia I (1852) p. 10.— Wood. The genus Hydrodictyon. Grevillea II p. 54-57. (Riassunto in Coohe Brit. Alg. p. 35-37).

39. **Hydr. utriculatum** Roth. Tentam Fl. Germ. p. 31.—Kütz. Sp. Alg. p. 448.— Tab. Phyc. V, tav. 53.—Rabh. Eur. III, p. 66. — Cooke Brit. Algae pag. 38, tav. XIV, fig. 1.— Conferva reticulata Dillw.—Hydrodictyon pentagonum, Vauch. Hist. p. 88. T. 1, fig. 4 e IX fig. 1-10.

Exicc. Erb. critt. ital. Ser. I, n.° 138.—Rabh. Alg. Eur. n.° 107! 660! 1847 b.—Roumg. Alg. Fr. n.° 131.—Exicc. nostra n.° 27.

Coenobium cellulis oblongo-cylindricis aequipolaribus compositum, reticulato-saccatum, libere natans, sed magnitudine retium et gonidiorum variabile.

Colonie di cellule riunite in forma di reticolo a maglie pentagone, formando dei sacchetti più o meno grandi, secondo l'età e lo sviluppo della pianta; di color verde chiaro nuotanti sull'acqua tranquilla o lentamente fluente. Disseccandosi aderisce più o meno fortemente alla carta e conserva la forma delle maglie.

Nelle acque stagnanti o lentamente fluenti. Pascone Capece nel rigagnoletto di confine verso la destra entrando. Non abbondante, ma frequentemente rinviensi e a diversi gradi di sviluppo.

Osservazione

Questo genere comprende *una sola specie (H. utriculatum)* conosciuta sin oggi e comune all'Europa ed all'America. L'*H. femorale* trovato nel *Canal du Midi*, ed al *Jardin des Plantes* dell'Arrondeau [1]) pare, come è disegnata nella Tav. II, fig. 14 da questo autore, un individuo di *H. utriculatum* a cellule afflosciate nel mezzo.

Fam. X.— PALMELLACEAE

Letteratura. — Reinhardt. Ueber einige Palmellaceen (Verhandl. der Bot. sect. d. IV russische Naturforscheversamml. zu Kasau 1873).— Goroskankin. Die Genesis bei den Palmellaceen etc. Nachricht. d. K. Ges. für Naturwiss. Antropolog. und Etnogr. Bd. XVI. II, Moskau 1875.— Cienkowski. Ueber Palmellen Zustand bei Stigeoclonium. Bot. Zeit. 1876 p. 17-26.—Ejusd. Weitere Beobacht. über den Palmellenzustand d. Algen. Warshau, 1876.

Le Palmellacee che han formato colle Protococcacee, la divisione delle *Cocco-*

[1]) Arrondeau —Essai sur les Conferves des environs de Toulouse 1861.

phyceae del Rabenhorst, biologicamente considerate si concatenano al gruppo delle Confervacee e vanno quindi disperse tra i varî generi di quella famiglia. Molte di esse infatti, credute sin ora forme autonome, non sono che stadî di passaggio di forme superiori, le quali, per l'adattamento biologico alle condizioni del mezzo ambiente, perdurano in uno stato di minore differenziamento, secondo le esterne influenze. Conservo quindi, pel solo scopo della sistematica, questo gruppo di forme, pur riconoscendo la dubbiosa autonomia di molte tra esse. Lo stesso è a dire delle Protococcacee, delle quali alcuni generi si collegano alle Cenobiee, altri prendono posto dappresso alle Sifonee *(Protococcus)*.

* *Multiplicatio vegetativa in unam directionem.*

18. RHAPHIDIUM, Kützing (1845).

Da ῥαφίς ago, per la forma della cellula.

Sinon. del genere. Anckistrodesmus Arch. — Closterii sp. Berck.

Letteratura. — Fresenius. Ueber die Algengattungen *Pandorina*, *Gonium* und *Rhaphidium*. (Abhandl. d. Senckenb. naturf. Geselsch. Bd. II).

40. **Rhaph. polymorphum**, Fres. l. c. pag. 199.

Var. *aciculare* Rabh. Eur. III, p. 45. — Rhaph. aciculare A. Br. — Cooke Brit. Alg. p. 19, tav. VIII, fig. 3. — Ankistrodesmus acutissimus, Arch. Micr. Journ. 1862, tav. XII, fig. 44-56. — Elaterium Griffithsii, Berk. Ann. of Nat. Hist. t. XIII, p. 236, tav. XIV, fig. 2.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1068 (sub Rh. fasciculatum!) — Exicc. nostra n.° 28.

Rh. gracillimum diametro maximo 15-20plo longiore, luteoviride (aetate provecta expallescente!) plerumque singulo, aciculare rectum v. curvatum, in utroque fine acutissime cuspidatum.

Cellule aciculari più o meno dritte, solitarie o riunite in fascetti qualche volta raggianti, di color verde pallido, terminate in punta acuta.

Dimensioni: 3×48 μ.

Nel fango delle vasche: Fontana a Piazza Cavour, in tutte le vasche dell'Orto Botanico ed altrove.

** *Multiplicatio vegetativa in duas directiones*

19. TETRASPORA, Link. (1810).

Dalle cellule riunite ordinariamente per quattro.

Sin. del genere. Pexisperma Rafin. — Tetrasporella Gaill. — Ulvae sp. Auct. vet.

41. T. lubrica (Roth.). Ag. Sp. Alg. — Ktz. Tab. Phyc. I, Tav. 30. — Rabenh. Alg. n.° 51. — Cooke Brit. Algae, pag. 16, tav. VI, fig. 3.

Osservazione

Di questa specie che ho veduta qualche volta nelle altre località del napoletano, e anche tra le alghe al Sebeto, non conservo esemplari.

42. **T. bullosa** (Roth.) Ag. — Rabh. Eur. III, p. 39. — Cooke, Brit. Algae, p. 16, tav. VI, fig. 1. — Ulva bullosa Roth. Cat. III, pag. 320. — Monostroma bullosum Thur. Mem. Cherb. 1854.

Thallus membranaceus, sinuato-bullosus, laete viridis, plus minus verrucosus, cellulis sphaericis, post divisionem factam hemisphaericis v. angulosis, geminatis, v. quaternatis endochromate granuloso. Diam. cellular. 9-12 μ; post divis. 5-7 μ.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. nº 115. — Exicc. nostra. n.º 29.

Nei rigagnoli del Pascone al Sebeto. Esemplare deficiente raccolto tra le branche dei Miriofilli — Pascone Capece.

*** *Multiplicatio vegetativa ad tres directiones.*

20. PLEUROCOCCUS, Menegh. ex p. (1842).

Da πλευρα lato e κοχχός nocella, per le cellule riunite tra loro.

Sinon. del genere. Protococcus Ktz. ex p. — Haematococci sp. Hassall. Chlorococci sp. Grev. — Dichococcus Tetracoccus Naeg.

Letteratura. — Meneghini. Monographia Nostochinearum etc., pag. 38.

43. **Pl. vulgaris** — Menegh. l. c., pag. 38, tav. V, f. 1. — Rabh. Eur. III, pag. 24. — Cooke Brit. Algae, p. 3, tav. II, fig. 1, *a-b.* — Protococcus vulgaris Ktz. Sp. p. 199 ex p. — Protoc. communis Ktz. Tab. Phyc. I, tav. I, fig. 3.

Exicc. Roumg. Alg. Fr. n.º 22 — Exicc. nostra n.º 30.

Pl. cellulis magnitudine variis, singulis, geminis, vel quaternis ad 32 — in familias consociatis, in stratum crustaceum pulverulentum v. submucosum aggregatis.

Forma sulla corteccia degli alberi, sulle mura umide uno strato più o meno polveroso-granoso di color verde gaio. Le cellule riunite da due a 4 ordinariamente lasciano vedere distinta la membrana. Col tempo umido tinge le dita in verde.

Dimensioni: 5-7 μ diam.

Comunissimo dappertutto sugli alberi annosi e nei luoghi umidi.

21. PALMELLA, Lyngb. (1819).

Da παλμός (παλλω) tremolo, per la consistenza gelatinosa del tallo.

Sinon. del genere. Merettia Gray, Trevis. — Cagnardia Trevis. — Porphiridium Naeg.

Letteratura. — Naegeli. Gatt. einzell. Alg. 66. — Phipson. De la Palmelline et Characine. — Comp. rend. 1879. — Ref. in Just. Bot. Jahr. VII, (I.), pag. 458, 459.

44. **Palm. heterospora** Rabh., Eur. III, p. 33.

Exicc. Alg. Eur., n.° 970. Exicc. nostra, n.° 31.

P. thallo effuso mucoso tenui, luteo-viridi; cellulis magnitudine variis, polymorphis; tegumentis subtilissimis, citissime diffluentibus. Icon nostra: Tav. II fig. 6.

Masse ristrette mucoso-gelatinose di color verdognolo o giallo-sporco; formate da cellule minute, di varia grandezza, con tegumenti appena visibili.

Dimensioni: 3-8 μ diam.

Sui vetri di un tepidario nel giardino Calabrese a Foria.

45. **Palm. cruenta** Ag. Syst. pag. 15. — Menegh. p. 50, tab. VI, fig. *a, b, c.* — Porphyridium cruentum Naeg. Gattung. p. 139, tav. IV, H. — Rabh. Eur. III, p. 397. — Cooke Brit. Algae pag. 13, tab. V, fig. 6, *a, b.*

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n° 1071 — Exicc. nostra, n.° 32.

Thallus saturate purpureo sanguineus, lubricus; cellulis anguloso-rotundatis.

Macchie di color rosso-scuro sanguigno a cielo piovoso; rosso tendente al vinoso, sul secco; superficie alquanto lubrica di aspetto granuloso. Cellule con membrana jalina distinta, ora sferiche, ora angolose.

Dimensioni: 7-10 μ.

Comunissima alla base delle mura umide di campagna: Salita del Vomero, Arenella, Capodimonte, Strada di Poggioreale. Abbonda specialmente sulle mura esposte al nord nei giardini e campagne.

Osservazione

La sostanza colorante rossa della *Palmella cruenta* è stata studiata da Phipson[1]). Eliminando prima la clorofilla per la digestione nel solfuro di carbonio e nell'alcool, trattando quindi la pianta con acqua, questa in poche ore ne estrae la *palmellina,* sostanza colorante rossa. È solubile nell'acqua, si colora in giallo col solfidrato ammonico, in azzurro coll'ammoniaca e con gli alcali. L'alcool e l'acido acetico vi producono un precipitato filamentoso (Poulsen Microch. veg. p. 72).

Fam. XI. — CONFERVACEAE

§ I. — Fila articulata simplicia: *Euconferveae* (Mihi)

22. CONFERVA (Linn.) Link. (1820).

Dal latino Conferrumino *consolido, pel modo di comportarsi di queste piante, i cui filamenti impigliano strettamente le piante acquatiche.*

Sinon. del genere. Confervae sp. L. et Auct. — Prolifera (ex p.) Leclerc. — Chantransiae sp., Tyresias, Monilinae sp. Bory — Ulothrix Ktz. — Byssi sp. Auct.

Letteratura — Valle (Öfversigt af Kon. Vetensk. Akad. Förhandl. vol. XXXVIII 1881). — Journ. of R. M. Mic. Soc. 1882, p. 836. — Riassunto in Cooke Brit. Algae, p. 136-137.

46. **C. fontinalis**. Berk. — Rabenh. Eur. III, p. 323. — Kütz. Tab. Phyc. III, tab. 45, fig. 4. — Cooke Brit. Algae p. 137, tav. LIII fig. 6-7.

Exicc. Alg. Eur. n.° 2543. Exiccata nostra n.° 33.

[1]) Compt. rend. de l'Acad. des Sc. 1879 (agosto), p. 316.

C. laete viridis, affixa, articulis diametro 6-10plo longioribus leviter tumidis, ad genicula modice constrictis, vesiculis amylaceis sparsis v. seriatis, cytiodermate subcrasso, homogeneo.

Cespuglietti di color verde più o meno gaio, ordinariamente attaccati a piante acquatiche. Articoli cilindrici leggermente ristretti agli estremi ed alquanto rigonfii nel mezzo, maggiormente nel momento della segmentazione. Massa clorofillosa granulare sparsa, colla disseccazione, contratta nel mezzo della cellula.

Dimensioni: 16-19 μ diam.

Nei vasi di piante acquatiche nell'Orto Botanico ed altrove. Per lo più è mescolata a filamenti di Spirogire o di altre confervacee.

* 47. **C. bombycina,** Ag. (Syst. p. 83). — Rabh. Eur. III, p. 323.—Cooke l. c. tav. 53, fig. 4. — Rabh. Alg. Eur. n. 109. Conferva sordida Dillw. Brit. Conf. Tav. 60.

Rigagnoli del Sebeto (Guss. in herb.).

Osservazione.

Io non ho potuto rinvenire questa specie in quella località; però mi è occorso trovarla in filamenti scarsi tra altre specie, come la precedente. Non ho potuto darne esemplari.

§ II. — Fila articulata varie ramosa: *Cladophoreae.*

23. CLADOPHORA, Kützing. (1843).

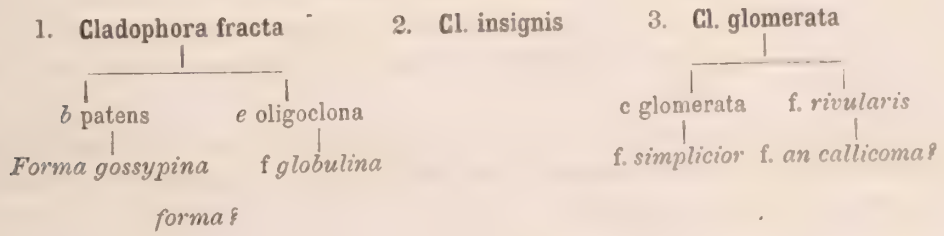
Da κλάδος ramo e φορός che porta; per alludere alla ramificazione del tallo.

Sinonimi del genere. Confervae sp. Auct.

Letteratura.— Magnus. Ueber Verzweigungserscheinungen bei den Cladophoren. (Berl. Gesch. Natursf. Freunde 1873).—Borzì, Studii algologici I°, pag. 51-70. Tav. V, 1883.

La diversità e moltiplicità di forme di ciascuna specie di questo genere; i passaggi quasi insensibili dall'una all'altra di esse; la insufficienza in generale della iconografia, rendono assai difficile la determinazione e la identificazione delle specie. Quindi è che mancandomi abbondante materiale di riscontro, non ancora ho potuto determinare alcune specie raccolte.

A rendere più chiara la relazione tra le specie, che vado a descrivere, ne do qui uno specchietto:



A. *Libere natantes; aetate provecta.*

48. **Cl. fracta** (Dillw) Ktz Sp. Alg. 410. Tab. Phyc. IV t. 50—Rabenh. Eur. III, p. 334 (Cl. *forma normalis*). —Cooke Brit. Alg. pag. 142 tav. LV, fig. 1. 2. — Conferva fracta. Engl. Fl. v. 356—Dillw. Conf. t. 14.—Lyngb. Hydroph. Danica t. 52.—Cladophora crispata Hassall.

Exicc., nostra n.[i] 34-35-36.

Rami ramulique sparsi divaricati, nonnunquam refracti, saepe secundi, inferiorum insertione laterali. Cellularum saltem ramulorum, cytioplasma non spiraliter ordinatum; cytioderma nonnunquam crassissimum. Cellulae fructiferae non terminales plerumque in ramulorum medio aut eorum basi.

— — *b. patens* Ag. Syst p. 110 n.° 83—Rabh l. c. p. 335.

a) *Forma gossypina* (Clad. gossypina Ktz. l. c.) elongata, parce ramosa, laxe intricata.

— — *c. oliglocona* Kit. —Rabenh. Alg. n.° 112.—Eur. III, pag. 336.

b) *Forma globulina?* (Conferva globulina Ktz.) sordide v. luteolo-viridis, arachnoidea, dense intricata, simplex, vel parcissime ramosa; articulis modo cylindricis, modo clavato inflatis; diametro ($^1/_{250}$ — $^{1'''}/_{145}$) 3-12plo longioribus, *cytioplasmate denique in globulòs contracto.*

La specie tipica si presenta in masse gallegianti intricate di vario colorito, verde più o meno sporco, ramosissima a rami divaricati intrecciati; la ramificazione secondaria è laterale; Membrana cellulare più o meno spessa, contenuto sparso non *spirale.* Cellule fruttifere non terminali ma nel mezzo delle branche od alla loro base.

Tutte queste vivono nelle acque stagnanti o lentamente fluenti, nelle vasche e negli acquarî. La forma tipica raramente si rinviene; ma invece presentansi frequentemente le forme secondarie.

La *forma a*) nelle vasche delle fontane. Masse di lunghi filamenti verde sporco, i quali sono pochissimo ramosi, più o meno rigidi, e disseccandosi divengono nerastri. Ho riscontrato la specie con l'esemplare Rabenhorstiano (Alg. Eur. n.° 780), e a me pare che si accordi perfettamente con quello.

La *forma b*) si presenta in masse voluminose leggiere, di color giallastro verdognolo; mi sembra doversi riferire alla *f. globulina* del Rabenhorst per avere distintamente visibili l'endocroma in forma di granuli. L'ho rinvenuta nelle vasche dell'Orto Botanico.

49. **Cl. insignis** Rabh Eur. pag. 338.—Conferva insignis Ag. (Flora 1827).

Cl. viridis setacea, plerumque elongata, parce ramosa, plerumque crassior (quam spec. *crispata*) rami primarii 0^{mm},10-16 crassi; plerumque base intricati; articulis diametro 4-5plo longioribus, cytioplasmate effuso, cytiodermate tenue laevi.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2542 (leg. Cesati ex H. Neap.). Exiccata nostra n.° 37.

Masse di color verde più o meno chiaro, grandemente estese con filamenti crassi alquanto ramosi, lascamente intrecciati e che disseccandosi s'increspano alquanto.

Nelle vasche dell'Orto Botanico.

B. *Per totam vitam innatae.*

50. **Cl. glomerata** (L.). Ramuli fili primarii in parte superiore atque ramorum ordinis secundi et tertii plerumque fasciculato-vel penicillato-aggregati. Cellulae maximae vegetae, cytioplasmate cellularum parietibus retiformi vel subspiraliter applicato. Cellulae fructiferae semper terminales, inferiores semper steriles videntur.

a) Forma rivularis Hilse in Rabh. Alg. Eur. n.° 147. Gracilis, non mucosa, 3-4 poll. longa; ramulis penicilliformi-aggregatis. Exicc. nostra n.° 38.

Nella vasca della Fontana Medina sotto agli stillicidii. Conviene perfettamente col citato esemplare Rabenhorstiano.

b) Forma simplicior. Cl. glomerata β simplicior Ktz. Saturate viridis, parcior ramosa, subnitens, ramulorum fasciculis subnullis. Exicc. nostra n.° 39.

Colla precedente.

c) Forma an callicoma? (Cl. callicoma Ktz.?) semper tenuior, articuli longiores ut in praecedenti; viridis, luteo-viridis, vel lutescens, subtilis, subsericea, plumoso-fasciculata. Exicc. nostra n.° 40.

Conviene per i caratteri di forma e per l'aspetto, colla *C. callicoma;* ne differisce però per la stazione, onde io la noto con riserba, sperando poter fare in seguito i dovuti confronti con altri materiali.

Colle precedenti nella Fontana Medina.

Tutte queste forme si distinguono per essere sempre affisse, di un colorito verde cupo, più o meno mucose, aderendo alla carta; le forme della *Cl. glomerata*, oltre per l'abito, differiscono da quelle della *Cl. fracta* per la posizione dei rami di secondo e terzo ordine, per la configurazione dell'endocroma, che è subspirale, ed infine per la posizione delle cellule fruttifere, che stanno all'apice dei rami; mentre nella sezione della *Cl. fracta* si trovano nel mezzo, od alla base dei medesimi.

Parecchie altre forme di Cladofore raccolte, non ho potuto determinare, e quindi non le noto in questo censimento.

24. CHROOLEPUS. Agardh (1824).

Da χροός (gen. omerico di χρώς) colore e λεπίς corteccia.

Sinon. del genere. Lichen, Byssus, L. (ex p.) — Trentepohlia Mart.

Letteratura. — Caspary Regensb. Flora 1858. — Sur les zoospores du Chroolepus etc. (Ann. Sc. Nat. IV Ser. vol. IX, p. 307-322).

51. **Chr. aureum** (Lin.) Ktz. Phyc. gen. — Spec. p. 426. — Tab. Phyc. IV, tab. 93. Rabh. Eur. III, pag. 371. — Cooke Brit. Algae, pag. 185, tab. LXXII, fig. 1 — Trentepohlia aurea Mart. Fl. Erlang. — Ag. Syst. pag. 36. — Amphiconium petraeum Nees. — Byssus aurea L. Sp.; Engl. Bot. I, t. 212. — Conferva aurea Dillw. Conf. 55.

Exicc. Rabenh. Alg. Eur., n.° 13. — Erb. critt. ital., I^a Serie, n.° 221 Roum. Alg. Fr., n.° 156. — Exicc. nostra n.° 41.

Ch. color rufo-aureum v. aurantiacum, filis nunc in caespitulos parvos, nunc in stratum molle holosericeo aggregatis (saepe longe lateque expansum) ramosissimis; articulis diametro 1 $^1/_2$-3plo longioribus. Diam. filam. 10-13 μ; zoosporangior. 21-30 μ.

Cespuglietti o strati tormentosi di color giallo aureo od arancio più o meno carico, dapprincipio verdognolo, disseccandosi di color cenerognolo o biancastro. Filamenti o cellule a parete spessa, con contenuto oleoso giallo arancio, ramosissimi, ad accrescimento apicale. Cellule uguali, o 2-3 volte più lunghe del diametro.

Si presenta in due forme, sulle rocce e mura umide nelle valli.

a) *caespitosum* caespitulis parvis, discretis, confluentibus — dense aggregatis, S. M. dei Monti S. Rocco, Via di Montelungo ai *Cangiani*, ecc.

b) *pannosum*. Valle dell'Eco (volg. *Verdolino*) ai Camaldoli, ove è abbondante sulle pietre umide.

Osservazione.

La sostanza gialla oleosa contenuta nei filamenti di quest' alga e che maschera completamente la clorofilla, si colora in blù sporco col jodo; mentre poi la membrana della cellula colorasi, come al solito, col jodo ed acido solforico allungato.

52. Chr. umbrinum, Ktz. Tab. Phyc. IV, tab. 93. — Rabh. Eur. III, p. 372.

Chroolepus irregolare, Ktz. l. c. — Protococcus crustaceus, Ktz. Sp. Alg. pag. 203.

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. n.° 83, 1496. — Exicc. nostra, n.° 42.

Chr. strato tenui, crustaceo, sub-pulverulento, fusco-rubro: expallescente post mortem; filis ramisque *torulosis*, articulis subaequalibus v. globosis, aut subglobosis.

Si distingue questa specie per avere i filamenti torulosi abbreviati, ramosi, formando una crosta pulverulenta di color rossastro oscuro su i corpi su cui cresce.

Dimensioni degli articoli: 8-20 μ.

Nasce sui tronchi degli alberi specialmente querce, faggi etc. esposti a settentrione. Capodimonte nel bosco dalla parte del *vallone di Miano;* valle di S. Rocco, S. M. dei Monti.

25. BULBOTHRICHIA — Kützing. (1849).

Da βολβος bulbo, e θρίξ capello, per gli sporangi portati dai filamenti.

53. Bulb. botryoides Ktz. Tab. Phyc. IV, pag. 22, Tav. 97. — Rabh. Eur. III, p. 374.

Exicc. nostra, n.° 43.

B. strato pulverulento cano-viridi, filis irregulariter ramosis, achrois; sporangiis viridibus.

Masse pulverulente o pulverulente-grumose, di color verde-cenerognolo, formate da filamenti jalini ramoso-dicotomi o irregolarmente ramosi, che alle estremità portano gli sporangi (?) di color verde.

Nasce sui tetti (Rabh.) e sui tronchi morti o di alberi annosi (Valle di S. Rocco — S. M. dei Monti).

Osservazione.

L'ispezione della figura delle Tabulae Phycologicae, mostra una ramificazione quasi dicotoma in alcuni punti. Alla osservazione le spore (?) presentansi di color verde o leggermente grigiastro, ed i rami intrecciati. Il nostro esemplare è stato paragonato a quello della *Bulb. Ookensis* Wolle in Rabh. Alg. Eur. n.° 2428 e conviene in quanto al genere. È però secondo me, una specie di dubbiosa natura.

Fam. XII. — ULOTHRICHACEAE

26. ULOTHRIX, Kützing. (1845).

Da οὖλος crespo, ricciuto e θρὶξ capello, alludendo allo intreccio dei filamenti.

Sinon. del genere. Confervae sp. Auct. — Lyngbya Hassall non Ag. — Myxonema, Nemathrix Fries (ex p.).

Letteratura. — Cramer. Paarung der Schwärmsporen von Ulothrix (Bot. Zeit. 1871). — Dodel Ulothrix zonata (Jahrb. für wissensch. Bot. X, 1875) — Bornet et Thuret. Notes Algologiques, etc. — Cienkowski Zur Morphologie der Ulotricheen. Petersb. 1877.

Formae terrestres ** HORMIDIUM

54. **U. flaccida** Ktz. Tab. Phyc. II, t. 95. Sp. Alg., p. 349. — Rabh. Eur. III, pag. 367.

U. articulis diametro aequalibus v. duplo longioribus; cytioplasmate saepe unilaterali, hemispaerico contracto; cytiodermate tenuissimo, achroo, hyalino, homogeneo

Fili variamente intrecciati, tenui, articoli uguali o poco maggiori del diametro; endocroma, nel secco, riunito in globulo.

Sulla terra a secco pietre e ghiaie. Strada del Vomero e altrove.

Osservazione

Di questa specie che ho incontrata in varii punti non ho potuto conservarne esemplari.

55. **U. varia**, Ktz. Tab. Phyc. II, t. 95, Sp. Alg., p. 350. — Rabh. Eur. III, pag. 367. — Hormidium varium Ktz. Phyc. germ., p. 193.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 372, e 2280. Exicc. nostra, n.° 44.

Luteolo-viridis, filis inaequicrassis in stratum tenue sub-arachnoideum intricatis; articulis diametro sub-aequalibus; cytiodermate subtilissimo hyalino.

Membranelle come ragnateli di un bel color giallo-verde, molli e facilmente staccabili dalla terra; filamenti ad articoli uguali al diametro, endocroma alquanto contratto omogeneo, membrana jalina sottilissima.

Diametro dei filamenti: 4-25 μ.

Sulla terra nuda nei viali dei giardini — Nell'Orto Botanico nel viale presso la valletta.

Osservazione

Questa specie si accorda con quella pubblicata al n.° 2280 delle Algen Europa's del Rabenhorst; è però alquanto diversa all'aspetto, essendo di colore più traente al giallo.

56. **U. nitens?** Rabh. Eur. III, 367 — Ulothrix nitens Ktz. Sp. Alg., p. 349 — Hormidium nitens Menegh. in litt.

Exicc. nostra, n.° 45.

U. saturate viridis vel viridi lutescens, subnitens, in stratum tenui, et in sicco arctissime adhaerente; filis ut in *U. varia*.

Sopra di un *Polyporus*, al piede di un albero a Capodimonte.

Osservazione

Per ora noto questa forma, che forse dovrà riferirsi alla *U. nitens;* ma non posso affermarlo; non avendo potuto avere alla mano esemplari autentici di quella. Le figure date dal Kützing corrispondono. Però è sempre necessario il confronto con esemplari tipici.

Sub-ordo III.—*OOSPOREAE*

Fam. XIII.—OEODOGONIACEAE

Letteratura. — Thuret, Recherch. sur les zoospores des Algues Ann. Sc. Nat. III. Ser. 1851. — Pringsheim, Morphologie der Oedogonieen (Jahrb. für wiss. Bot. I, 1855. — Nordstedt et Wittrock, Desmidiaceae et Oedogonieae in Italia et Tyrolio collectae (Holm.) 1876, 8° con 2 tav. — Wittrock, Prodromus Monographia Oedogoniearum (1874) — Cooke Brit. Algae, pag. 148-152.

27. OEDOGONIUM, Link (1820).

Da οἴδος tumore e γονης, o meglio γονὶας generativo, per alludere alla funzione delle cellule rigonfiate od oogonii.

Sin. del genere. Confervae sp. Auct.— Vesiculifera Hassall — Tiresias Bory Dict. class.

Letteratura.—Braun, A. Verjüng. in der Nat. etc.—De Bary, Oedogonium und Bulbochacte 1854 — Wolle, Fresh-wather Algae of the Unit. States 1872. — Wittrock, Prodromus etc. 1874.

57. **Oed. vesicatum** (DC.) Link.— Rabh. Eur. III, p. 348.— Cooke Brit. Algae pag. 172, tab. LXV, fig. 5. — Conferva vesicata Ag. Syst. — Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 279. —Exicc. nostra, n.° 46.

O. dioicum, cellula basali biloba, pl. foemina articulis diametro 2-4plo longioribus; planta mascula 2-5plo long., oogoniis depresso globosis, ternis vel pluribus, cum articulis vegetis alternantibus; oosporis sub-globosis, antheridiis patentibus erectis.

Diam. pl. foemincа $\frac{1}{200} - \frac{1'''}{240}$; pl. mascula $\frac{1}{250} - \frac{1'''}{280}$ (Rabh.).

Comune nelle vasche e negli aquarii presentasi in masse filamentose di color verde più o meno pallido; e lo diviene anche di più seccando filamenti con cellule vegetative alquanto dilatate, alternando le fertili colle sterili. Endocroma da principio omogeneo pei granuloso, oospore quasi globose.

Vive nelle vasche e negli acquarî — Villa Comunale, Giardino del R. Liceo V. E. Orto Botanico etc.

58? **Oed. capillaceum** Kütz. Phyc. gen. pag. 255. — Tab. Phyc. III, tab. 39, fig. 6.— Rabh. Eur. III; pag. 353.—Cooke Brit. Algae, pag. 170, tab. LXVI, fig. 3.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 37. Exicc. nostra n.° 47.

Non saprei determinarmi ad accettare questa specie dalla semplice ispezione delle figure: non ho veduti gli oogoni.

Vasca di un giardino privato.

59. **Oed. tenellum** Ktz. Tab. Phyc. III, tab. 33, fig. 9. — Rabh. Eur. III, p. 355. — Cooke Brit. Alg. pag. 169, tab. LXVI fig. 6.

Oed. cellula basali bi-triloba initio affixum; articulo terminali obtuso, articulis cylindricis vel subclavatis, diam. 9—12 μ; oogoniis valde inflatis. (diam. 25 μ) oosporam globosam aurantiacam, lucidam, laxe involventibus.

Exicc. nostra n° 48.

Comunissimo negli stagni del Pascone, sia libero sia tra le piante acquatiche.

60. **Oed. delicatulum** Kütz. Tab. Phyc. III, tab. 33 —Rabh. Eur. III. p. 355.— Cooke Brit. Algae, pag. 169, tab. LXVI fig. 7.

Exicc. Rabh. Alg. 1156. Exicc. nostra n° 49.

Oed. pallidum, cellula basali bi-triloba affixum; articulis cylindricis, diametro (5-6μ) plerumque 3plo longioribus; oogoniis vesiculoso inflatis, oospora globosa perfecte repletis, utroque polo paullum productis.

Si presenta in masse fioccose leggiere, mucose all'aspetto, galleggiante ovvero attaccato a piante acquatiche e ordinariamente trovasi associato al precedente nelle medesime località.

Fam. XIV. — SIPHONACEAE

I. — Sciadieae. — *Protococcaceae* Auct. (ex max. p.).

28. PROTOCOCCUS, Agardh. (ex p.) 1824

Da πρωτός *primo e* κοκκός *seme, quasi primo nucleo.*

Sin. del genere. Protococcus Menegh. — Endl. (ex p.) — Zoogalactina Sette — Globulinae sp. Turp. — (Cfr. Meneghini Organogr. delle Alghe p. 25).

Letteratura. — De Bary. Alg. unic. genera etc. — Cohn. Zur Naturgesch. der Protococcus. Act. Ac. Leop. 1850 pag. 607-764, mit. 2 taf.

61. **Pr. viridis.** Ag. Syst. pag. 13. — Ktz. (ex p.) Sp. Alg. pag. 199.— Rabh Eur. III, p. 56. — Cooke Brit. Algae p. 29, tav. XII fig. 1

Exicc. nostra n° 50.

Pr. cellulis minimis segregatis in stratum late expansum luteoviride aut pulverulentum aut (coelo pluvio) humidum mucosum cumulatis.

Strato di color verde giallognolo polveroso che diviene umido più o meno secondo lo stato dell'atmosfera. Cellule globose piccolissime, variabili, riunite insieme od isolate.

Comunissimo dapertutto; copre i tronchi vetusti, le mura umide, specialmente quelli esposti a settentrione.

Osservazione

Il Protococcus si riproduce per zoospore mobili o quiescenti secondo le condizioni di vegetazione. Così nell'eccessiva umidità produce, per segmentazione del plasma, una serie di zoospore munite di due ciglia, e che escono per apertura della membrana, e dopo aver vagato nell' acqua si fissano e danno altrettanti protococchi. Se la pianta sarà al secco, allora si produrrà invece una serie di spore immobili rivestite di cellulosa, le quali pure daranno origine a nuovi talli.

II. — Botrydieae. — (*Hydrogastreae*, Rabenh. Eur. III, pag. 265).

29. BOTRYDIUM, Wallroth. (1815).

Da βοτρυδὸν a modo di grappolo, per alludere all'aspetto dei talli riuniti assieme.

Sinon. del genere. Rhizococcum Desmaz. — Hydrogastrum Desw. et Duby. — Conferva multicapsularis Dillw? — Ulva granulata L. — Tremellae Auct — Vaucheria Ag. et Lyngb.

Letteratura — Braun, Die Verjügung etc. — Archer, Grevillea I, p. 103 — Ejusd. Quart. Journ. of Micr. Sc. Ser. II, 1878. — Parfitt Botrydium granulatum. Grevillea 1873 p. 103 — Woronin Entwckelungsgesch. von Botryd. granulat. (Arb. d. S. Petersbourg Geselsch. d. Naturf. Bd. VII, p. 133-140) — Rostafinski et Woronin Ueber Botrydium (Bot. Zeit. 1877 n° 41-42) — Riassunto in Cooke Brit Algae pag. 111-114 etc.

62. Botr. granulatum (L) Desv. — Cooke Brit. Algae, p. 114, tab. LXV — Botrydium argyllaceum Wallr. Ann. bot. p. 153. — Kützing Ueber Botrydium. N. Act. Acad. Nat. Cur. t. LXIX. — Tab. Phyc. VI, t. 54. — Hydrogastrum granulatum Rabh. Eur. III, p. 265 — Vaucheria granulata Grev. — Ulva granulata L.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. 86 — 537 — Erb. critt. 1139. Roum. Alg. Fr. 189 — Exicc. nostra n° 51.

Botr. plerumque gregarium, saepe aggregatum, haud raro confluens.; cellula e globoso-pyriformi, magnitudine seminis papaveris et ultra (diam. $1^{mm},5$ ad 2^{mm}) prasinoviridi, superficie pulverulenta.

Cellule piriformi, minutissime; riunite assieme presentano un'apparenza rugiadosa. Membrana tenue elastica, endocroma granuloso verde, che o riempie la cellula, ovvero si concentra nella parte inferiore radiciforme della stessa.

Viene sulla terra umida al fondo degli stagni disseccati.

Nella valle di s. Rocco, Orsolona, Camaldoli; nell'Orto Botanico appiè degli alberi. La formazione delle zoospore si vede in primavera.

Disseccato forma uno strato lamelloso, nerastro-verdognolo o pallido, quasi foveoloso.

III. — Vaucherieae (Rabh. l. c. pag. 266).

30. VAUCHERIA, De Candolle (1805).

Dedicato al naturalista, Giov. Pietro Vaucher.

Sinonimia del genere. Proliferae sp. Vauch. — Ectosperma Vauch. — Vaucheria Lyngb., Ag. (non Bory) — Godal sp. Adans. — Confervae sp. Auct.

Letteratura (Scritti principali) Schenk, Entwickelung. und Fortpflanz. org. von Vaucheria geminata (Verh. der Phys. med. Gesel. z. Würzbourg VII, 1858) — Walz Beitr. der morphologie der Gattug Vaucheria (Jahrb f. wiss. Bot. VII, 1858) — Woronin Beitr. zur Kennt. der Vaucherien (Bot. Zeit. 1869) — Nordstedt Vaucheria—Studien (Botaniska Notiser 1879 p. 177-80) — Hanstein, Reprod. und Reduct. der Vaucheria-Zellen (Bot. Abhandl. v. Hanstein 1880 p. 45-56 mi 3 taf.) etc.

* *Sessiles (Oogonia sessilia vel vix stipitata)*

63. **V. sessilis**. (Vauch.) DC. — Fl. fr. — Ag. Syst. — Ktz Sp. Alg. pag. 487. — Tab. Phyc. VI, t. 59, fig. II. — Ectosperma sessilis Vauch. hist. p. 31. Tab. II, fig. 7 — Vaucheria caespitosa Ag. et Auct. etc. — Rabh. Eur. III. p. 267.

a) forma caespitosa (Vaucheria caespitosa Ag. et Auct. — Rabh. Alg. n° 76) — Cooke Brit Algae pag. 123 t. XLVIII fig. 3. — Laete viridis, dichotoma; caespites spongiosos dense intricatos formans; oogoniis plerumque binis, ovatis, oppositis, antheridio intermedio plerumque brevi uncinato. Exicc. nostra n° 52.

Cespugli estesi intricati spongiosi di color verde più o meno carico a rami dicotomi; oogonî ovati opposti, anteridio intermedio rostrato od uncinato.

Nel rigagnolo presso il Pascone Capece colla seguente:

b) ornithocephala Cooke Brit. Algae, p. 124, tav. XLVIII. Sordide viridis, thallo parce ramoso in caespites dense intricatos: oogoniis oblique rostratis, rostris truncatis obversis, antheridio cylindrico subulato.

Colla precedente, ovvero isolata, nelle acque lentamente fluenti.

La prima forma è la più abbondante.

64. **Vaucheria repens**. Hass. — Ktz. Sp. Alg. pag. 487 — Vauch. sessilis formae terrestres Rabh. Eur. III, p. 268 — Cooke Brit. Algae p. 124 tab. XLVIII fig. 4. — Stratum tenue subarachnoideum, viride, laxe intricatum. Oogonia oblonga ovalia, brevater rostellata, antheridia solitaria, aut recta aut declinata vel incurva. Exicc. nostra n° 53

Forma degli strati di color verde lascamente intrecciati, estesi, sulla terra umida dei giardini.

* 65. **Vauch. terrestris** Lyngb. Kütz. Sp. Alg., pag. 488. — Rabh. Eur. III. p. 270 — Alg. Eur. n° 1079 — Cooke, Brit. Algae p. 126, tab. XLIX fig. 1-3.

Selva dei Camaldoli sulla terra umida.

** *Stipitatae*

66. **Vauch. geminata** (Vauch.) DC. — Rabh. Eur. III, p. 269—Cooke Brit. Algae, pag. 125, tab. XLVIII, fig. 6-9 —Vaucheria Dillwynii Rabh.— Ectosperma geminata Vauch.

Exicc. Rabh. Alg. Sachs. n° 1078. Exicc. nostra n° 54.

Rami capillari, oogonii ovati od obovati, opposti, distintamente pedunculati.

Sviluppatasi in un acquario artificiale.

Osservazione.

Non ho potuto osservare che il primo stadio di sviluppo di questa specie come nella tav. II fig. 7. che illustra il preparato al n° 53.

Probabilmente delle zoospore provenienti dal Sebeto in mezzo ad altre alghe, svilupparonsi nell'acqua, la quale però si mantenne limpida e non conteneva che porzioncine di fango proveniente da lavande di alghe di quella località.

Mi è incontrato di costatare nelle Vaucherie una spiccata tendenza verso la luce, e la proprietà di orientarsi secondo la direzione di quella. Coltivando delle masse di *Vaucheria caespitosa* in un acquario, che era innanzi ad una finestra, tutti i filamenti si dirigevano verso la luce, cosicchè l'aspetto cespitoso della massa si modificava interamente: pareva di vedere un fascio di filamenti confervacei, essendosi disposti con gli assi tutti paralleli e nella direzione della luce.

Movimento simile verso la luce ebbi ad osservarlo pure nella *Vaucheria repens*, che coltivai dirimpetto ad una finestra. I diversi raggi dello spettro influiscono sull'accrescimento e la produzione di sostanza oleosa nello interno delle cellule di Vaucherie. come ho potuto osservare esaminando filamenti di Vaucherie coltivate sotto i raggi rossi, gialli e blù.

Fam. XV. — CHARACEAE

31. CHARA, Agardh (1824)

Da χαίρω mi rallegro, godo, perchè vegeta bene nell'acqua.

Letteratura — Ganterer, Die bisher bekannt. Oosterreich. Charen (Inaugural-Abhandlung.) Wien 1847. — Martius (Ch. Fr.) Ueber den Bau und die Natur der Charen (K. Akad. der Wissensch. zu München p. 183-213, 18...) — Amici, Osservazioni sulla circolaz. del succhio nella Chara (Atti Soc. ital. delle Scienze resid. in Modena, t. XVIII, 1818) — Montagne, Multiplication des Charagnes etc. (Ann. Sc. Nat. 3ª ser. XVIII, 1852) — Braun, Ueber die Richtungsverhältnisse der Saftstrome in den Zellen der Characeen — (Jahrbuch. für wissensch. Bot. III, 1863) — De Bary, Die Keimungsgeschichte der Charen (Bot. Zeit. 1875) — Braun, Die Characeen (Kryptogamen-Flora von Schlesien 1877) — Van Tieghem, Traitè de Botanique pag. 1145-1157.

67. **Chara vulgaris**. Wallr., Kütz. Sp. Algar. p. 523—Oed. Fl. dan. tab. 150.— Tenore Flora medica univ. e part. della prov. di Napoli II. p. 99. — Chara foetida A. Br., Ganterer l. c. pag. 18.

Nelle acque lentamente fluenti; al Sebeto. Tenore (l. c.)* — Pascone S. Martino!

68. **Ch. fragilis.** Desv. Ktz. Sp. Alg. pag. 521. — Ch. vulgaris L. (ex p.) — Ch. hirta Meyen — Ch. pulchella Wallr. ann. bot. 1840.

* Pascone S. Martino nelle acque poco scorrenti.

69. **Ch. tomentosa** Linn. — Ktz. Sp. Alg. 526. — Tenore (l. c.) — Ch. ceratophylla Wallr. β *macroptila* A. Br. — Ganterer l. c., p. 16.

Al Sebeto (Tenore).

Delle molte specie di Chare nelle acque del Sebeto ne vegetano due, per quanto è a mia conoscenza, cioè la *Ch. fragilis,* Desw. e la *Ch. vulgaris* Wallr. (*Ch. foetida* A. Br.); tutte e due però vengono fuori i limiti del Comune di Napoli. Finora non l'ho raccolte altrove.

III. PHAEOPHYCEAE

Alghe con pigmento bruno.

(Algae plerumque marinae, aliquis exceptis ex Diatomacearum familia, quae tantum hoc loco consideranda).

Fam. XVI. — DIATOMACEAE

Agardh (1824) — Bacillariae Nitzsch (1771) — De Bary (1822) — Focke (1854) — Pfitzer (1871).

Bibliografia *). — Ehrenberg, Die Infusionthierchen als vollkommene Organismen etc. Leipz. 1838. — Meneghini, Sull'animalità delle Diatomee etc. Padova 1846. — Rabenhorst, Die Süsswasser Diatomaceen (Bacillarien) etc. 1853. — Ehrenberg, Mikrogeologie etc. 1854. — Smith, A Synopsis of British Diatomaceae 1853-56. — Kützing, Die Kieselschaligen Bacillarien oder Diatomeen (1ª ed. 1844 — 2ª 1865). — Pritchard, A History of Infusoria etc. (1ª ed. 1845 — 2ª 1861). — Castracane, Memorie diverse sulle Diatomee. Atti Acc. dei Nuovi Lincei etc. (1864-1883). — Pfitzer, Ueber Bau ünd Entwiklung der Bacillarien (Bot. Abhandl. v. Hanstein) Bonn 1871, 8° mit taf. — Brébisson, De la structure des valves des Diatomées Paris 1872. — Moreuse, On the structure of Diatoms. etc. (Montly Micr. Journ. Nov. 1874). — Schmidt, Atlas der Diatomaceenkunde etc. Arschesleben 1874-83. — Van Heurck, Synopsis des Diatomées du Belgique. 1883-85.

Algae unicellulares (sensu latiori) minutissimae, in aqua vel libere natantes vel muco matricali *(Thallo)* nunc amorpho nidulantes, nunc stipites aut pulvinulos efformante, affixae. Cellulae (*individua*, *frustula* Auct.) bivalves, exacte symmetricae, involucro triplici instructae; exteriore scilicet laevi *(coleoderma)*; medio firmo, siliceo, ri-

*) Della sterminata letteratura diatomologica cito qui, come saggio bibliografico, le principalissime opere — Oltre a queste, numerosissime note e scritti di varia mole trovansi inseriti nell'*Hedwigia*, nel *Botnische Zeitung*, nel *Quarterly Journal of Microscopical Science* — *Montly Microscopical Journal* — *Micrographic Dictionary* — *Journal de Micrographie* — *Journal of Royal Microscopical Society*. etc. etc. Per la letteratura generale dal 1873 in poi veggasi il Just's *Botanischer Jahresbericht:* I (1873) pag. 23-26; II (1874) pag. 33-34; III (1875) pag. 44-45; IV (1876) pag. 62-63. V (1877) pag. 33-34; VI (1878) pag. 403-405; VII (1879) pag. 486-488; VIII (1880) p. 580-582. IX (1881) pag. 381-89 — X (1882) pag. 334-343 (I.). — Veggasi ancora per la bibliografia Van Heurck *Synopsis des Diatomées du Belgique*, pag. 43-49

gido, incombustibile, striis v. punctis subtilissimis notato *(cytioderma)*; interiore vero laevissimo. Valvae, ad instar pyxidulae inter se connexae, substantia cellulosa (*membrana* Auct.) in acido nitrico solubili, conglutinantur.

Endochroma *(cytioplasma)* aureum, fulvum, vel aurantiacum, interdum guttulis oleosis commixtum et *laminas* aut *granulos* in cellula efformans, per mortem vel per acidum muriaticum in colorem viridem mutatur.

Propagatio fit: et divisione vegetativa cellularum, ac semper in eadem directione repetita; et cellularum binarum copulatione, ex qua zygosporae (*Auxosporae* Auct. plur.) oriuntur. Interdum *ovula*, multiplicatione *isogama* formantur.

Individua libera, imprimis Naviculae, motu quasi spontaneo gaudent.

Ratione propagationis, Diatomaceae Conjugatis sunt arctissime affines.

Le Diatomee o Bacillariee, le cui prime forme furono scoverte e descritte dal Müller [1]) nel 1773, sono alghe unicellulari microscopiche, di forme svariatissime e spesso assai eleganti, con membrana o guscio siliceo, su cui delle esilissime righe o delle serie di punti formano disegni delicati e regolarissimi.

Esse vivono dovunque trovisi dell'acqua e però anche sulla terra umida e sulle piante inondate; ovvero sono libere alla superficie delle acque o parassite sulle piante sommerse, rivelandosi all'occhio pel color bruno che prendono i corpi sui quali esse si sviluppano. Per la loro resistenza agli agenti distruttori trovansi in abbondanza fossilizzate, formando spesso estesi depositi *(tripoli)*, e la loro esistenza è rivelata dal microscopio perfino nelle ligniti dell'êra paleozoica [2]).

Furono dapprima credute animali e classificate tra i *Vibrioni* dal Müller, tra gli *Infusorii poligastrici* dall'Ehrenberg; mentre il Kützing ne fece l'anello di passaggio tra le piante e gli animali. Questa teorica, esposta e criticata dal Meneghini [3]), fu fatta rivivere dall'Haeckel, il quale pose le Diatomee nel suo regno dei *Protisti* [4]). Oggi però, la natura vegetale di questi esseri è da tutti riconosciuta, ed essi formano un gruppo assai naturale della classe delle alghe [5]).

Il frustulo delle Diatomee è di forma variabilissima, però ordinariamente simmetrica, ed è munito di rilievi, strie, punti o costole, ordinati con ammirabile simmetria e di tale finezza da poter servire come oggetti di prova pel microscopio. Ogni frustulo è formato di due valve, che si adattano l'una all'altra come le due parti di una scatoletta, della quale i due fondi, o le due facce ordinariamente più larghe, prendono il nome di *facce valvari*, i fianchi invece di *facce commissurali* o *connettive*; chiamandosi *zona*, o *cingolo*, o *connettivo* la parte laterale delle due valve. In questa zona avviene lo sdoppiamento delle valve e però essa varia di larghezza.

Le valve delle Diatomee, qualunque ne sia la forma, sono ordinariamente convesse verso lo esterno e quindi all'interno concave. In quelle a simmetria bilaterale esiste nel mezzo della valva un cordone *(rafe)* longitudinale, ovvero semplicemente una linea similmente posta, che divide la valva in due metà simmetriche; in altre a simmetria centrale, manca ogni traccia di rafe o di linea.

[1]) Per ciò che riguarda la parte storica veggasi: Kützing Bacill. p. 1-11.

[2]) Castracane. Le Diatomee della età del Carbone. Atti Acc. Nuovi Lincei vol. XXVII, pag. 104-110 — 1874.

[3]) Meneghini. Sull'animalità delle Diatomee ec. pag. 1, e seg.

[4]) Maggi (L.) Protistologia (Manuali Hoepli) p. 50 e p. 90-95.

[5]) Delponte a pag. 35 dello Specimen Desmidiac. appoggiandosi sull'opinione del Meneghini, afferma *essere consentita da tutti l'animalità delle Diatomee e la vegetabilità delle Desmidiee.*

La struttura delle valve ha richiamata l'attenzione di tutti i micrografi dal De Brébisson in poi; e se lo studio di queste minute pianticelle ha contribuito non poco al perfezionamento del microscopio, la fotomicrografia ha reso segnalati servigi ai diatomofili, rivelando loro particolarità di struttura che la natura della luce non permette di vedere direttamente nel campo del microscopio, anche con i sistemi obiettivi più perfetti che oggi si conoscano.

A risolvere talune quistioni sulla struttura delle valve delle Diatomee e sulla natura dei rilievi, strie, granuli o perle, che si mostrano alla osservazione nel microscopio servono benissimo le sezioni trasversali delle valve ottenute in questi ultimi tempi [1]), le quali fanno vedere i rapporti tra la superficie esterna e la interna della valva.

Nello interno di queste valve evvi una sottile membranella la quale avvolge, come il sacco protoplasmatico, l'endocroma. Questo è di colore bruno giallastro spesso con goccioline di grasso, le quali si veggono per la maggiore rifrangenza sotto al microscopio. L'endocroma è formato secondo le ricerche di Millardet, Plitzer, e Petit [2]) da un miscuglio di *clorofilla* e *ficoxantina;* fu detto da Naegeli *diatomina; sostanza gonimina* dal Kützing. Presentasi nella cellula ora sotto forma di placche, ora di granuli, costantemente per alcuni gruppi; disposizione che servì allo Pfitzer ed al Petit come carattere tassonomico. Insolubile nell'acqua a calde ed a freddo, l'endocroma è scolorato dall'alcool, che diviene verde brunastro; i cloroleuciti non cangiano forma. Una soluzione concentrata di diatomina è bruna per trasmissione, con fluorescenza rosso porpora come la clorofilla. L'acido cloridrico cangia il color bruno in un bel verde blu intenso; come fa pure l'acido solforico.

Le Diatomee, specialmente le specie del genere *Navicula,* vanno soggette a movimenti, i quali sembrano spontanei ed attirarono sempre mai l'attenzione dei micrografi e dei naturalisti e per alcuni costituivano il carattere principale dell'animalità delle diatomee. Furono studiati dal Siebold nel 1849, mentre erano stati già segnalati dal Müller e da Ehremberg: quindi dagli altri naturalisti e recentemente dal Merensckowsky [3]) e dall'Hogg [4]). Caduta l'opinione antica della esistenza di organi locomotori nelle diatomee, rimane a spiegare i movimenti il fenomeno meccanico della diffusione dei liquidi tra l'interno della cellula semovente e l'ambiente esterno.

Le Diatomee si moltiplicano per divisione dei frustuli, e riproduconsi per conjugamento, risultato del quale è, secondo Pfitzer, la formazione di un'*auxospora*, che divenuta libera dà origine a frustuli più grandi (frustuli sporangiali) e da questi per divisione ulteriore, derivano i frustuli di dimensioni ordinarie.

In alcune abbiamo ancora la riproduzione per germi, cioè per la fusione di due masse protoplasmatiche vicine, le quali danno poi origine ad altri talli *(Epithemia, Amphora).*

La vasta famiglia di queste minute pianticelle è stata variamente ordinata; e co-

[1]) Flögel, *Untersuchung. über die struct. der Zellwand in d. Gatt. Pleurosigma (Arch für micr. Anat. VI,* 1870 p. 472-514.

Prinz et Van Ermengem, *Recherches sur la struct. de quelques Diatomées cont. dans le « Cementstein » du Jutland (Ann. Soc. Belg. Microsc. VIII).* Rif. in Brébissonia III, p. 161-173.

[2]) Kraus ei Millardet, *De la Matière colorante des Phycochromacées et des Diatomées* (Mém. Soc. Sc. Nat. de Strasbourg VI (1868).—Petit, *De l'Endochrome des Diatomées.* Brébissonia II, p. 81-89 (1880).

[3]) *Beobacht. über die Bewegungen d. Diatomeen.* Bot. Zeit. 1880, p. 31.

[4]) Hogg. *Observ. sur les mouvem. des Diatom.* (Journ. de microgr. 1884 p. 109-115).

me per le Alghe in generale, la sistematica delle diatomee lascia ancora a desiderare. Io ho scelta la classifica dello Smith (Ham. Lav.) adottata dai diatomologi del giorno.

Quadro sinottico della classificazione.

I. — RAPHIDEAE

I.	II.	III.	IV.	V.
Cymbelleae	*Naviculeae*	*Gomphonemeae*	*Achnantheae*	*Cocconeideae*
Amphora	Navicula	Rhoicosphaenia	Achnanthes	Cocconeis
Cymbella	Pleurosigma	Gomphonema	—	—

II. — PSEUDORAPHIDEAE

VI.	VII.
Fragilarieae	*Surirelleae*
Epithemia	Cymatopleura
Synedra	Surirella
Fragilaria	Nitzschia
Denticula	—
Diatoma	—
Meridion	—

III. — CRYPTORAPHIDEAE

VIII.

Melosireae

Melosira

CHIAVE DELLE SOTTOFAMIGLIE, TRIBÙ E GENERI

I. — RAPHIDEAE — Frustula plerumque bacillaria v. ovalia, valvae nodulo centrali rarissime subnullo v. nullo et linea media, longitudinali valida, notatae.

CYMBELLAE. — Frustula cymbiformia valvis asymmetricis, linea media et nodulo centrali valido instructis et nodulis terminalibus raro deficientibus.

Amphora. — Frustula libera, solitaria, ovalia, oblonga, vel oblongo-elliptica, subquadrangularia; valvae cymbiformes nodulis marginalibus v. submarginalibus, saepe stauriformibus; linea media saepe incurvata et stries longitudinalibus subtilissimis notatae.

Cymbella. — Frustula libera v. stipitata, valvae cymbiformes, linea media plus minus curvata asymmetrice partitae, nodulo medio valido excentrico, nodulis terminalibus apicibus approximatis.

NAVICULEAE. — Frustula naviculacea symmetrica, libera, valvae transverse striatae v. costatae, v. etiam lineis longitudinalibus praeditae, nodulo centrali valido, rotun-

dato, nonnumquam stauriformi-dilatato, nodulis terminalibus minoribus, et linea media recta, nonnumquam curvata v. sigmoidea.

Navicula. — Frustula libera, solitaria rarius geminata v. in fascias conjuncta. Valvae symmetricae, linea media recta et nodulo centrali et terminalibus instructae.

Pleurosigma. — Frustula naviculacea oblonga; valvae convexae plus minus sigmoideae, linea media plus minus sigmoidea et striis subtilissimis decussatis vel rectangulis notatae.

Gomphonemeae. — Frustula (a latere) plerumque exacte cuneata, basi truncata, sessilia vel stipitata, nodulis binis terminalibus, fronte oblongo cuneata, supra medium plus minus dilatata et nodulo centrali instructa.

Gomphonema. — Frustula cuneiformia valvis naviculaceis asymmetricis. Individua parasitica sessilia v. stipitata plerumque in muco matricali nidulantia.

Rhoicosphenia. — Frustula cuneata et arcuata, nodulo centrali in latere ventrali inflexo.

Achnantheae. — Frustula curvata, in latere ventrali inflexo, nodulo centrali instructa, nodulis terminalibus non semper distinctis, dorso plus minus convexo nodulo centrali nullo. Individua solitaria v. in fascias conjuncta.

Achnanthes. — Frustula e fronte curvata: valvae naviculaeae, linea media recta dissimiles. Individua solitaria, geminata v. in fascias conjuncta plerumque stipitata.

Cocconeideae. — Frustula elliptica solitaria valvae dissimiles depressae v. compressa una linea media subnulla; altera et linea media et nodulis praeditae.

Cocconeis. — Frustula curva parasitica; valvae ovales ellipticae v. ovoidales, superficie lineolata et saepe linea longitudinali instructae.

II. — PSEUDORAPHIDEAE — Frustula bacillaria ovalia v. suborbicularia; carina destituta, nodulo medio vel nullo et linea media simplici (pseudo-raphe) praedita.

Fragilarieae. — Frustula recta v. curvata, carina distincta et nodulo centrali destituta, nonnunquam pseudonodulo instructa, elatere plerumque exacte linearia. Individua solitaria v. plus minus in fascias conjuncta.

Epithemia. — Frustula valvis curvatis costis validis et striis punctiformibus notatis; fronte linearia in medio plus minus inflata. Individua plerumque parasitica.

Synedra. — Frustula primum plerumque flabellatim innata v. affixa, deinde libera, rectangula, recta v. curvata, saepe linea media subdistincta et pseudo-nodulo medio, v. etiam nodulis terminalibus minutissimis subdistinctis praedita, transverse, striata; striae plerumque subtilissimae.

Fragilaria. — Frustula rectangula in fascias conjuncta; valvae rectangulae ecostatae.

Denticula. — Frustula libera geminata v. in fascias brevissimas conjuncta; valvis plus minus lanceolatis carinatis, trasverse costatis, costis punctatis, extremis capitatis.

Diatoma. — Frustula quadrangulo-oblonga in fascias conjuncta et hystmo gelineo concatenata; valvae lanceolatae v. lineares transverse costatae, carena et pseudo nodulo centrali et terminali destitutae.

Meridion. — Frustula fronte cuneata flabellatim conjuncta; caetera ut in *Diatoma*.

Surirelleae. — Frustula libera, solitaria plus minus orbicularia, ovata v. cuneata, v. etiam flexuosa v. ephippiiformia, valvae plus minus planae convexiusculae v. concavae carinatae; carina saepe alata, costis validis plerumque radiatim dispositis et linea media tum attingentibus, tum area centrali circumdantibus: nodulo centrali nullo.

Cymatopleura. — Valvae transverse undulatae, subtiliter striatae, linea media distincta sed parum visibili. Frustula fronte sinuoso-undulata.

Nitzschia. — Frustula libera, rarius inclusa v. conjuncta; valvae carinatae, carina punctis v. costis brevibus validis notata. Striae transversae pertenues.

Surirella. — Frustula libera solitaria, ovata oblonga, fronte transverse costata, ad marginem plus minus evidenter carinata, nodulo centrali nullo, costis abbreviatis vel lineam mediam, vel vittam longitudinalem attingentibus.

III. — CRYPTORAPHIDEAE — Frustula orbicularia, suborbicularia, rarius elliptica v. bacillaria; saepe in filamenta conjuncta, linea media v. area, vel nodulo centrali semper destituta, valvis plerumque processibus dentiformibus ornatis.

MELOSIREAE. — Cellulae solitariae binae v. numerosae in fascias conjunctae, e latere cylindricae commissura magis minus conspicua notatae, fronte disciformes, planae v. laeviter convexae, laeves v. radiatim punctato-striatae.

Melosira. — Valvae disciformes planae v. convexae saepe commissuris plus minus dentatae v. denticulatae. Individua in fascias confervaceas fluctuantes conjuncta.

Subfamilia I.—RAPHIDEAE

Trib. I. — *CYMBELLEAE*

Letteratura. — Rabenh, Süssw. Diat. pag. 21. — Kutzing, Bacill. pag. 78. — Pfitzer, Ueber Bau und Entwikel. d. Bacillariaceen, p. 75.

32. AMPHORA Ehr. (1834).

Da ἄμφω ambidue, per i noduli posti da ambo i lati.

Sinon. del genere (ex p.). Frustulia Ag. — Cymbella Ag. — Navicula Ehr. — Amphipleura Brèb. — Kütz.-Sm. Ralfs. — Brachysira Kütz.

Letteratura.— Meneghini, Diat. pag. 91-92.— Pfitz, l. c. p. 92-83.

70. **A. minutissima** Sm. — Rabenh. Eur. I, 87.— Süssw. Diat. p. 54, tav. III, fig. 9. A. ovalis δ Pediculus Ktz. Van Heurck Syn. pag. 59, tab. I, fig. 6,7.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1061! Exicc. nostra n.° 58.

Minuta, elliptica v. ovata, polis rotundatis vitta longitudinali et nodulis vittaeformibus transversalibus.

Minutissima, di lunghezza variabile (da $0^{mm}006$ a 005) faccia ventrale attraversata dal nodulo, estremità attenuate; faccia connettivale quasi rotonda od ovale, strie delicatissime (30 in 10 μ, Brun.).

Dimensioni: 18-20 μ.

Sulla *Utricularia vulgaris,* nei rigagnoli del Sebeto.

Osservazione.

Ne ho vedute di varie grandezze; alcune bislunghe, altre abbreviate. La specie ivi notata corrisponde all'esemplare del Rabehorst.

71. **A. ovalis**, Ktz. Bac. p. 107, tav. 5 fig. 35, 99.—Rabh. Süssw. Diat. p. 31, tav. IX. 1.—Brun. Diat. p. 53, tav. I fig. 6.—Van Heurck. Syn. pag. 59, T. I. fig. 1. (A-B disposizione dell'endocroma). — Navicula amphora Ehr. — Cymbella ovalis Brèb.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 765. Exicc. nostra n.° 56.

Frustula ovalia, utroque polo late rotundata v. truncata, valvis semilunatis, arcuatis, medio introrsum inflato, striis trasversalibus granulatis; area striis longitudinalibus subtilissimis.

— *b forma elliptica;* elliptico-elongata; versus polos magis magisque attenuata apicibus obtuso-rotundatis.

Lunghezza e larghezza variabile (33-35 a 85-100 μ). Frustuli con faccia ventrale semilunare colla linea ventrale a doppia curvatura col nodo marginale: faccia connettivale ovale ellittica ad apici troncati. Strie granulate, nette, facilmente visibili (sist. 7-8 Prazm. luce obliqua) 10-12 in 10 μ (9-11 Brun).

Sulle piante acquatiche nelle acque stagnanti. Insieme al tipo *b* sui muschi umidi al Pascone.

33. CYMBELLA Agardh. (1830).

Da κύμβη vaso da bere, per la forma curva del frustulo

Sinon. del genere. Cocconema Thr.—Echinella Lyngb.—Lunularia Bory.

Letteratura.—Meneghini, l. c. pag. 75-76.—Pfitz, l. c. p. 79-80.

72. **C. affinis**, Ktz. Bacill. p. 80. Tav. 6 fig. 15. — Rabh. Süssw. Diatom. Tav. VII. fig. 3. — Brun. Diat. pag. 11, tav. III, fig. 14. — Van Heurck. Syn. pag. 62, Tav. II. fig. 19. Cym. ventricosa Brèb. — Cocconema Fusidiun Ehr.

Exicc. nostra n.° 59.

Frustula minima, plus minusve gracilia, dorso elato-convexo, ventre tumidulo vel plano; apicibus obtusiusculis, saepe nodulo terminali validissimo: striis validis. Variabilis quoad magnitudine et numero striarum.

Frustuli piccolissimi piano o subpiano convessi con nodulo e rafe centrale visibile, apici più o meno ottusi, noduli terminali netti. Strie sottili e poco convergenti (9-12 in 10 μ).

Dimensioni: 12-25 μ.

Fango della fontana Medina, a terra sotto lo spruzzo dei getti.

73? **C. variabilis**, Wartm. (Cym. maculata Rabh. Eur. II, 80.—Ktz. Bac. T. 6 fig. 2).—Brun. Diat. p. 61, tav. III, fig. 8.

Mediocris dorso elato-convexo, subito in apices obtusos vel acutiusculos attenuata; ventre leniter inflato, a latere oblongo elliptica, utroque polo truncata, striis delicatulis.

Osservazione

Noto con dubbio questa specie avendone riscontrati scarsissimi esemplari e non essendo stato possibile isolarli. Forse potrà trovarsi colla precedente sotto al n.° 59. dell'exiccata qui annessa. È chiaro che se alla osservazione si presentano, nel campo del microscopio, svariatissime forme, non tutte potranno rinvenirsi nell'esemplare preparato in massa; come per contrario se ne potranno ivi trovare alcune, che non si presentavano alla osservazione. Noto perciò soltanto le specie più abbondanti di ciascuna preparazione.

Trib. II. — *NAVICULEAE*

Letteratura. — Ktz. Bacill. pag. 88-89 — Rabenh, Süssw. Diat. pag. 86 — Pfitzer, Bacill. pag. 28-74.

Nelle Navicolacee l'endocroma si presenta in due lamine, che riposano su ciascun lato della zona connettiva e sono nel mezzo interrotte (Petit).

In questa tribù si osservano più spiccati i movimenti e più rapidi.

34. NAVICULA, Bory (1822).

Dal latino Navicula *navicella, per la forma dei frustuli.*

Sinon. del genere. Conferva Engl. Bot. — Dill. — Gaill. — Tabelleria Ehr. — Frustulia Bréb. — Kütz. — Grev. — Jenn. — (ex. p.) — Synedra Naeg. [1]) — Pinnularia Mhr. Rabh. etc.

Letteratura. — Menegh. Diat. pag. 80-89. — Pfitzer, l. c. pag. 40-56; 67-69. (Pinnularia) e pag. 36-39; 62-65 (Navicula).

74. **Nav. cuspidata** Ktz. Bac. p. 94, tav. 3. fig. 24 e 37 — Rabh. Süssw. Diat. pag. 37 t. V, fig. 16 — Brun Diat. p. 66, tav. VII, fig. 6 — Van Heurck Syn. pag. 100, tav. XII fig. 4. — Nav. fulva Ehr. — N. vulpina Rabenh.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n° 1186 *b!* Exicc. nostra n° 61. 63.

N. late lanceolata, utroque fine attenuata, acuminata, apicibus leviter productis obtusis, striis subtilibus parallelis lineam mediam attingentibus, nodulo centrali parvo oblongo v. rotundato-orbiculari; e latere anguste linearis, utroque fine obtuso-rotundata.

Di fronte nettamente lanceolata larga ed angolosa, strie parallele dritte appena punteggiate (12-15 in 10 μ) Silice, nel secco, incolore.

Dimensioni: 65-140 μ.

Frequente nelle vasche e nelle acque stagnanti. Fontana Medina (rara) — a Piazza Cavour (frequente) — Vasche dell'Orto Botanico.

[1]) Per l'estesa sinonimia di questo genere veggasi Van Heurck *Le Microscope* ecc. pag. 317-318 (3ª ed.).

75. **Nav. viridula** Sm.—Brun Diat. p. 80, tab. VIII, fig. 7.—Pinnularia viridula Rabh. Eur. I, pag. 214. — Navicula gracilis Sm.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. 1146! Exicc. nostra n.° 60, 62.

N. parva, elliptico-lanceolata, acuminata, apicibus plus minus acutis productis. Striis transversis granulosis radiantibus, lineam mediam attingentibus, nodulo parvo; e latere linearis, ad utrunque finem attenuata.

Individui minuti, ellittico-lanceolati, con estremità piuttosto ottuse attenuate che acute, e prolungate alquanto; 9-15 o 16 strie in 10 μ.

Dimensioni 20-60 μ.

Frequente nel fango dei rigagnoli al Sebeto, con altre diatomee.

Osservazione

Brun. Diat. l. c. nota il sinonimo di Pinnularia viridula Rabh. che è riportata sotto al n.° 682 dell'exiccata delle Algen Europa's.

76. **Nav. elliptica**. Ktz. Bac. pag. 98, t. 30 fig. 55.—Rabh. Eur. I, 179.—Brun. Diat. pag. 77.—Van Heurck. Syn. pag. 92, tab. X, fig. 18.—N. ovalis Sm.

Exicc. nostra n.° 64, 66.

Elliptica, ovalis, nonnunquam subrotundata, apicibus obtusis rotundatis, striis convergentibus distincte granulatis, lineam mediam versus vitta longitudinali curvata interruptis; nodulo centrali saepe obliterato.

Variabile per grandezza e per forma; ordinariamente ellittica con strie facilmente visibili a luce obbliqua, raggianti verso il centro (10-14 in 10 μ) e che lasciano al centro un'area dilatata. Linee longitudinali accentuate di più verso la linea mediana. La silice secca è azzurrognola.

Dimensioni: 20-60 μ.

Comune e qualche volta abbondante nelle acqne stagnanti. Pascone etc.

76.*bis* — — *var. oblongella* Naeg.—Van Heurck. Syn. pag. 92, tab. X, fig. 10!—Navicula oblongella Naeg. — Rabh. Eur. I. p. 185.

Exicc. nostra n° 66.

Insieme alla precedente, ma più rara.

* 77. **N. amphisbaena**. Bory—Ktz. Bacill. pag. 95, tab. 3, fig. 41.—Rabh. Süssw. Diat. tab. VI, fig. 66—Van Heurck. Syn. pag. 102, tab. XI, fig. 7.—Brun. Diat. pag. 72, tab. VII, fig. 17.

Nelle vasche dell'Orto Botanico (Pedicino).

78. **Nav. pusilla**, Sm.—Brun Diat. pag. 75, tab. VII. fig. 36 *b*.—Van Heurck Syn. pag. 99, tab. XI, fig. 17 — Navicula gastroides. Greg.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1185. Exicc. nostra n.° 62.

N. ovalis sub polis constricta, apicibus porrectis obtuso-rotundatis, striis moniliformibus lineam mediam subvalidam non attingentibus; nodulo centrali valido subquadrangulari.

Osservazione

Ho trovato questa specie raramente nel fango del Sebeto. L'ho trovata identica all'esemplare del Rabenhorst sotto al n° 1185; essa però è abitatrice delle acque salmastre e raramente delle acque dolci. È notata pure, per la flora Ligure, dall'Ardissone.

79 ? **Nav. affinis** Ehr. — Ktz. Bac. tab. 28, fig. 65; tab. 30 fig. 46. — Brun Diat. pag. 72, tab. VIII fig. 21. — Rabh. Eur. I, p. 196.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1484 — Exicc. nostra n.° 62.

N. lineari lanceolata v. elliptica, polis plus minus constricta, apicibus obtuso-rotundatis productis, striis subtilibus transversalibus (25 in 10 μ) et longitudinalibus (20 in 10 μ); nodulo centrali valido.

Tra le alghe e nei fanghi dei rigagnoli del Sebeto, nelle acque tranquille.

Osservazione

Ho notato con dubbio questa specie, poichè gli individui scarsi che ho potuto osservare non mi han lasciato ben distinguere la striazione.

Tra essi vi hanno delle forme che si avvicinano alla var. *c. Amphirhynchus* (Ehr.) (Brun. l. c. tav. VII, fig. 20).

80. **Nav. cryptocephala** Ktz. Bacill. p. 95, tab. 3, fig. XX, e fig. XXVI — Rabh. Süssw. Diat. tab. VI, fig. 71. — Brun Diat. pag. 70, tab. VII fig. 24. — Van Heurck Syn. pag. 84, tab. VIII, fig. 1, 5 — Rabenh. Eur. I. p. 198.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n. 447-2019. — Exicc. nostra n.° 58. 62.

N. parva, anguste lanceolata, ad utrumque finem acuminata: apicibus plus minus porrectis, globoso-capitatis; striis transversis subtilibus, subradiantibus (28 in 10 μ) nodulo centrali parvo, oblongo.

Specie assai frequente nelle acque stagnanti e scorrenti, però tante volte si scambia e confondesi con alcune forme delle Navicule vicine come p. e. la *N. exilis*, la *N. gracillima* ecc.

Nelle fossate e acque stagnanti del Sebeto, delle vasche e negli acquarî. Rigagnoli del Pascone Capece.

** *Pinnularia*

* 81. **N. (Pinnularia) maior** (Rabh. Diat. p. 42 tav. VI, fig. 5. Alg. Eur. n.° 621). Ktz. Bacill. t. 4, fig. XIX. — Van Heurck Syn. pag. 73, t. V. fig. 3-4. — Pinnularia nobilis var. maior Brun Diat. pag. 82 tab. VIII, fig. 6.

Spontanea nelle vasche dell'Orto Botanico (Pedicino) — Pasquale Catal. del R. Orto Bot. di Napoli p. 80 (1867).

Osservazione

Mentre l'ho rinvenuta frequentemente altrove, questa specie non mi si è mai presentata allo sguardo nei limiti del Comune di Napoli.

82. **N. (Pinn.) viridis** Ktz. — Pinnularia viridis (Ehr.) Rabh. Süssw. Diat. tab. VI, fig. 4. — Eur. I, pag. 212. — Brun. Diat. pag. 83, tab. VIII, fig. 5. — Van Heurck Syn. pag. 73, tab. V, fig. 5. — Navicula viridula Ehr. — Bacillaria viridis Nitzsch.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n° 1065, 1105, 1105 *b*. — Exicc. nostra n.° 64, 65.

N. elliptica v. elongata sublanceolata, ad utrumque finem sensim attenuata, apicibus obtusis, nodulo centrali valido, costis radiantibus validis (7-9 in 10 μ) lineam mediam non attingentibus.

Lunghezza 55-127 μ. Ellittico-lanceolata, di fronte per lo più ellittico bacillare, subcilindrica, attenuata sino agli estremi arrotondati.

Nodulo centrale grande, noduli termali obliqui. Rafe ricurvato ai due estremi; costole valide (7-9 in 20 μ) raggianti soltanto al centro e brevi, in modo da lasciare un'area larga per tutta la lunghezza della valva.

Comune nelle acque stagnanti — Pascone — Sebeto; nelle vasche ed acquarî tra le altre alghe; tra i muschi umidi sugli alberi e tra le epatiche nei luoghi inondati ecc.

83. **N. (Pinn.) radiosa** Ktz. Bacill. tab. 4, fig. 23.—Van Heurck Syn. pag. 83, tab. VII, fig. 20. — Pinnularia radiosa Rabh. Eur. I. pag. 214. —Pinnularia silesiaca Bleisch. in Rabh. Alg. n.° 954.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2522. — Exicc. nostra n.° 57.

N. mediocris, lanceolata v. oblongo-lanceolata, apicibus obtusis v. parum acutatis, costis radiantibus (11-12 in 10 μ) terminalibus densioribus, nodulo centrali oblongo; a latere linearis, apicibus parum attenuatis, obtuso-truncatis.

N. lanceolata, gradatamente assottigliandosi agli estremi, terminazioni ottuse, ovvero un poco acute; 9-12 strie nette in 18 μ (Brun) nodulo oblungo.

Comune nelle acque stagnanti e specialmente nelle vasche. Fango della vasca grande dell'Orto Botanico. Sebeto, rigagnoli dei Pasconi.

Osservazione

Brun (l. c. pag. 78) dice: *stries nettes*, *finement ponctuèes;* io per altro non ho potuto rilevare la *punteggiatura* delle strie. Non avverte però con quale ingrandimento è giunto a risolvere le righe in granuli; ciò che avviene in quasi tutte le Navicule, che presentano delle strie bene spiccate.

84. **Nav. (Pinn.) gibba** *var. minor.* — Rabh. Alg. Eur. n° 1700.

N. gracilis medio laeviter tumida, sub polis constricta, apicibus dilatatis et rotundatis: Similis *N. (Pinn.) gibbae* sed gracilior.

Conviene colla figura della *Pinn. gibba* (Brun l. c. tav. VIII, fig. 17) però è più gracile, più ristretta alle estremità e con apici ugualmente arrotondati. Le costole sono radianti e alquanto più avvicinate che nella specie tipica. La diagnosi l'ho fatta sull'esemplare del Rabenhorst. n.° 1700, col quale conviene perfettamente la specie qui notata.

Frequente nelle vasche dell'Orto Botanico e propriamente nel fango della vasca presso la serra calda, insieme alla *Cymatopleura apiculata.*

85. **Nav. (Pinn.) lata** Rabh., Eur. I, p. 212. — Brun Diat. p. 85, tab. VIII, fig. 25. — Van Heurck Syn. pag. 76, tab. VI, fig. 1-2.

Osservazione

Ne ho veduti dei pezzi di frustuli tra alghe della Fontana Medina. Non ho potuto ricavarne esemplari, stante la scarsezza del materiale. Probabilmente potrà vedersene qualche frustulo nel preparato sotto al n.° 67.

35. PLEUROSIGMA W. Smith (1853).

Da πλευρά costa e Σ, per la forma sigmoidea del rafe.

Sin. del genere. Navicula Turp. — Cymbella Ehr. — Sigmatella Bréb. — Scalprum Corda.

Letteratura. — Pfitzer, l. c., pag. 57-58; 69-73.

86. **Pl. Spencerii.** Sm. Rabh. Eur. I, 240. — Brun Diat. pag. 94. tab. V, fig. 14. — Van Heurck Syn. pag. 118. — Icon nostra tab. II fig. 8.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2016. — Exicc. nostra n.° 62, 64, 65.

Pl. auguste lanceolatum, leniter sigmoideum, pallide fuscum; apicibus obtusis, linea media parum excentrica, nodulo centrali oblongo.

Lunghezza 50-90 μ. Faccia ventrale lanceolata stretta, regolarmente sigmoidea. Le strie sono longitudinali e trasversali e si veggono a luce obbliqua 20-25 long. in 10 μ; e 23-25 trasv. Silice di color gialletto bruno.

Sebeto — Vasca del R. Liceo V. Emanuele — Pascone Capece. Non è abbondantissimo, ma si rinviene in molte località. Però il Rabenhorst non cita tra le località l'Italia, e Brun lo dice piuttosto raro.

Trib. III. — *GOMPHONEMEAE*

Letteratura. — Pfitzer, l. c. pag. 88-92.

36. RHOICOSPHENIA Grunow (1860)

Sin. del genere. Gomphonema Auct.

Letteratura. — Pfitz. l. c., pag. 91-92.

87. **Rh. curvata.** Grun. Rabh. Eur. I, 112. — Brun. Diat. pag. 41, tav. 6, fig. 21. — Van Heurck Syn. pag. 127, tav. XXVI, fig. 1-4. — Gomphonema curvatum. Ktz. Bacill. pag. 85, tav. VIII, fig. 1. — Rabh. Süssw. Diat. pag. 59, tav. VIII, fig. 18. — Gomphonema minutissimum. Ehr.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 408 e 481. — Erb. critt. ital. Ser. II, 135. — Exicc. nostra, n.° 35.

R. mediocris, transverse striata (10-14 striae in 10-μ), valvis e basi cuneatis-obovato-lanceolatis, apice superobtuso-rotundatis, stipiti plus minus elongato, simplici vel diviso. Longitudo frustulor. 25-65 μ.

Frustuli ora solitarî, ora riuniti in tre o più per corti pedicelli, attaccati ad alghe filamentose: faccia ventrale con strie sui bordi ben distinte e forti, faccia connettiva più o meno curva, a sommità troncata e *con un nodulo nella curvatura ben distinto;* il nodo del dorso poco visibile o mancante.

Dimensioni: 13-60 μ.

Abbondante sulle piante sommerse nelle acque stagnanti; in alcune località è però scarsa.

37. GOMPHONEMA — Agardh. (1824).

Da γομφός cuneo e νῆμα filo, per la forma cuneata dei frustuli portati da filamenti.

Sin. del genere. Vorticella Müll. (ex p.). — Echinella Lyngb. (ex p.). — Gomphonella Rabh. — Sphenella Kütz.

Letteratura. — Menegh. Diat. p. 78-79. — Pfitzer, l. c., pag. 88-91.

88. **Gomph. tenellum.** Ktz. Bacill. 84, tab. 8, fig. VIII-6, et tab. 14, fig. VII. — Brun Diat. p. 35, tab. VI, fig. 5 — Van Heurck. Syn. tab. XXI, fig. 3-4.

Exicc. Eulenst. Diat. typ., n.° 98 — Rabh. Alg. Eur. n.° 1163 — Exicc. nostra n.° 56.

Valvae augustae, lanceolatae stipite brevi, vel adnatae, sub polis constrictae, apicibus leviter productis, nodulo rotundato, striis parallelis validis vittam media attingentibus (15 in 10 μ).

Faccia ventrale o valvare lungamente lanceolata, pochissimo costretta ai due poli, che sono un po prominenti, strie parallele sottili ma visibili; faccia connettiva larga e poco conica. Individui con brevi peduncoli uniti due a due per lo più.

Sulle piante acquatiche con altre diatomee. Pasconi.

89. **G. dichotomum.** Ktz. Bacill. pag. 85, tab. 8, fig. 14. — Brun. Diat. pag. 36, tab. VI, f. 2-3. — Gomph. gracile *var. dichotomum* Van Heurck Syn. pag. 125, tab. XXIII, fig. 13. — G. gracile, Ehr. — G. pulvinatum Br. — G. minutum Ag.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1264 — Exicc. nostra, n.° 66.

G. anguste cuneatum, truncatum, stipite elongato dichotomo, valvis gracilis lantis utroque fine acutis, supra medium laeviter constrictis: nodulo medio mediocri, striis radiantibus.

Col precedente in individui rari ed isolati.

90. **G. constrictum** Ehr. Ktz. Bac. tab. 13, fig. I, 1-3. — Rabh. Süssw. Diat. t. VIII, fig. 12. — Brun. Diat. p. 38, tab. 6, fig. 1. — Van Heurck Syn. pag. 123, tab. XXIII, fig. 5.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 452. Roumg. Alg. Fr. n.° 107. Exicc. nostra n.° 56.

G. valvis clavatis, supra mediam partem plus minus constrictis, apice late rotundatis vel depresso-aut subdepresso-truncatis, e medio deorsum cuneato-attenuatis; striis transversis subrectis, nodulo centrali valido; e latere exacte cuneatum, apice superiori plano-convexo, inferiori obtuso.

Più grande e robusto del precedente, distinto per la costrizione più o meno profonda nella parte media della faccia valvare, con estremità variamente arrotondata spesso un poco ottusa-schiacciata. Nodulo centrale rotondo, strie trasversali sottili (10-12 in 10 μ). Faccia connettiva larga e conica; silice forte, scolorata. Resiste benissimo al trattamento degli acidi; Pedicelli variabili.

Dimensioni: 35-60 μ.

Comunissimo nelle acque tranquille sulle piante acquatiche ecc.

91. **G. capitatum.** Ehr. Kutz. l. c., pag. 86, t. 16, fig. II, e tav. 21, fig. XIII,

Rabh. Süssw Diat., t. VIII, fig. 15.—Brun. Diat. pag. 37, tab. 6, fig. 19. — Gomph. constrictum *var. capitatum* Van Heurck Syn. pag. 123, tab. XXIII, fig. 7. — Gomph. turgidum Ehr.—G. persicum Rabh. — G. italicum Kütz. Bacill. tab. 80, fig. 75.

Exicc. nostra, n.° 69.

G. stipite ramosissimo, valvis brevibus clavatis, medio turgidis, sub apice constrictis; apice rotundato, nodulo medio non dilatato, striis radiantibus; e latere late cuneatum, striae 12-15 in 10 μ.

Dimensioni: 25-65 μ.

Col precedente ma individui isolati e più scarsi. Abbonda invece in altre località.

92. **G. acuminatum.** Ehr.— Ktz. Bacill. tab. 13, fig. III. Rabh. Süss. Diat. tab. VIII, fig. 13.— Eur. I, pag. 290.— Brun. Diat., pag. 39, t. VI, fig. 4. — G. coronatum Kütz. — G. minutum Ralfs.

Ne ho osservato qualche raro individuo in diverse preparazioni di fanghi specialmente del Pascone Capece, e dei rigagnoli ivi presso.

93. **G. olivaceum**, Lyngb. Ktz. Bacill. p. 85, tab. 7, fig. XIII e XV. — Brun. Diat. p. 40, tab. VI, fig. 8. — Van Heurck. Syn. pag. 126, t. XXV, fig. 20. — Gomphonella olivacea Rabh. Alg. Eur. n.° 1085. — Exilaria minutissima Berk — Sphenella olivacea Ktz. — Meridion vernale Ag.

Exicc. Rath. Alg. Eur. n° 1085.— Exicc. nostra n.° 69.

G. valvis ovato-lanceolatis, subclavatis, apice rotundatis, striis radiantibus, nodulo centrali rotundato; e latere cuneatum; stipiti ramosissimo intricato. Gelatina, in qua frustula nidulant, exiccatione pallide olivascèns.

Faccia valvare ovale o subclavata, allo estremo superiore arrotondata, l'inferiore attenuato in pedicello per lo più ramoso, le strie radianti, che arrivano quasi alla linea mediana (10-15 in 10 μ). Faccia connettivale cuneiforme svasata.

Questa specie oltre che per la picciolezza dei frustuli (8-9 a 20 μ) si distingue per essere i frustuli avvolti in una gelatina più o meno abbondante, diafana, di un leggiero color verde giallastro.

Comune in tutte le acque scorrenti e stagnanti: raramente però l'ho potuto raccogliere isolato; quasi mai puro, come ordinariamente si trova in altre località, (Valle dei Mulini a Gragnano). È sempre mescolato ad altre specie di diatomee.

Trib. IV.— *ACHNANTHEAE*

38. ACHNANTHES Bory (1822).

Da ἄχνη palea ed ανθός fiore per i frustuli a forma di laminette portati dai pedicelli.

Sinon. del genere (ex p.). Cymbella Kütz. — Echinella Lyngb. — Diatoma Jurg. — Falcatella Rabh. — Cocconeis W. Sm. — Ceramium (!) Roth. etc.

Letteratura.—Meneghini, Diat. pag. 73-74.— Pfitzer, l. c. pag. 85-86.— Pelletan, *Les Achnanthes* (Journ. de Micrographie 1883, pag. 94-101).

94. **Ach. (Achnanthidium) lanceolata.** Bréb. Ktz. Sp. Alg. 54. — Brun Diat.

p. 29, tab. III, fig. 20.—Van Heurck Syn. p. 131, tab. XXVII, fig. 8-11. — Achnanthid. lanceolatum Rabh. Eur. I, p. 107.

Ach. solitaria, v. 2-8 in fascias conjuncta, valvis lanceolatis, apicibus obtusis, nodulo medio dilatato, striae obscurae.

In rari ed isolati individui in molte parti del Sebeto, però non in tale abbondanza da poterne fare una preparazione. Si può osservare sotto al n.° 55.

95. **Ach. exilis** Ktz. Bac. pag. 76, tab. 21 p. IV.— Rabh. Diat. t. VIII, fig. 1.— Eur. I, 109.—Brun Diat. pag. 28, tav. III, fig. 29.— Van Heurck Syn. pag. 131, tab. XXVII, fig. 16-19.—Ach. minutissima Ktz. Bacill. p. 75, tab. 13, fig. 2.—Brun. Diat. p. 28, tab. III, fig. 30.

Exicc. nostra n.° 62.

A. valvis lanceolatis, polos versus sensim attenuatis, apicibus obtuso-rotundatis: stipite frustulum vix aequante.

Dimensioni: 11-32 μ.

Sulle alghe maggiori nei rigagnoli del Sebeto e nelle fontane e vasche della città. Comune ma non abbondante.

96. **A. (Achananthid.) microcephala** Ktz. Bacill. p. 75, t. 3, fig. 13 et 19.— (Nav. appendiculata?) Brun Diat. pag. 69, tab. VII, fig. 27.

Sparso qua e là nelle diverse preparazioni. Comune nelle acque stagnanti.

97. **A. delicatula.** Ktz.—Brun Diat. pag. 29, tab. III, fig. 24.—Achnantid. cryptocephalum? Naeg. — Falcatella delicatula Rabh. Süssw. Diat. p. 45, t. V, fig. 4— Ejusd. Eur. I, pag. 107.

Ach. e minimis, valvis e latere curvatis, e fronte rectis, medio tumidulis, apicibus leniter capitulatis. Longitud. 2-12-13, μ.

Col precedente nei fanghi e tra le alghe maggiori.

Trib. V. — *COCCONEIDEAE*

Letteratura. — (v. genere).

39. COCCONEIS Ehr. (1835).

Da κοκκος *nocciuolo ovvero bacca e figur.* chermes *l'insetto che dà la cocciniglia, per la somiglianza dei frustuli ovoidei alle cocciniglie parassite.*

Letteratura.—Meneghini, l. c. pag. 71-72.— Pfitzer, l. c. pag. 87-88.

98. **C. Pediculus** Ehr. Infus. p. 194 t. XXI, f. 11, ex p. Ktz. Bacill. pag. 71 f. 5, fig. IX, 1. — Rabh. Eur. I. p. 98. — Süssw. diat. tab. III. fig. 1. — Brun Diat. pag. 31, tab. III, fig. 22.—Van Heurck. Syn. pag. 133, tab. XXX, fig. 28-30.

Exicc. Eulenst. Diat. typ. n.° 64. — Exicc. nostra n.° 54.

Frustula elliptica v. ovata dorso convexo plus minus striolato. Individua minora laevissima; e latere lineari-rectangula, plana v. curvata.

Nei Cocconeis i frustuli sono ora perfettamente ellittici, ora ovati, ora subquadrati, cioè ellissi con le due estremità polari largamente troncate o schiacciate, il contorno si vede semplice o doppio, la superficie delle valve ora liscia (ordinariamente

nelle forme giovani) ora più o meno fortemente striolata, con nodulo centrale più o meno ben distinto. Di profilo piani o concavo-convessi.

Dimensioni variabili (10-30 μ) secondo l'età dei frustuli. Nel secco le valve sono di color giallo bruno.

Comunissima ed abbondante sulle piante acquatiche.

99. **C. Placentula** Ehr. — Ktz. Bacill. pag. 28, fig. 13 — Rabh. Süssw. Diat. tab. III, fig. 3. — Brun Diat. pag. 31, tab. III, fig. 23. — Van Heurck Syn. pag. 133, tab. XXX, fig. 26, 27.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1282 — Exicc. nostra n.° 54. (Grandezze e forme variabili colla f. tipica e con altre diatomee) Id. n.° 69.

C. elliptica leniter convexa v. plana, utroque fine rotundata, margine nodulosa, disco laevi, v. striolato-punctata.

Ellittica, larga, con tre linee marginali punteggiate nella faccia valvare; strie longitudinali ondulate, punteggiate (obiett. 7. Praz.) alcune oblique-trasversali poco visibili. Profilo piano o leggermente curvo.

Dimensioni: variabili $^1/_{192}$-$^1/_{58}$''' (Rabh.) — 20-60 μ, Brun.

Osservazione

L'endocroma in questa specie ora riempie tutta la cellula, ora è concentrato nel mezzo; è di color giallo bruno con gocciole oleose. È ben figurato nella tavola XXX, A. della *Synopsis des Diat. du Belgique.*

Subfamilia II.— PSEUDORAPHIDEAE

Trib. VI.—*FRAGILARIEAE*

Letteratura. — Pfitzer, l. c. pag. 120.

40. EPITHEMIA, Brébisson (1838).

Da επί *sopra e* θεμεν *inf. ep. di* τίθημι *porre, collocare, per la posizione dei frustuli ordinariamente attaccati sopra altre piante.*

Sin. del genere. Frustulia Kütz. — Navicula Ehr. — Eunotia Ehr. — Cymbella Hap. — Captopleura (ex p.) Bréb.

Letteratura. — Meneghini, l. c. pag. 35-36.—Pfitzer, l. c., pag. 83-85.

100. **E. turgida.** (Ehr.) Ktz. Sp. alg. p. 2. — Bacill. t. 5, fig. XIV.—Rabh. Eur. I, 62. — Brun Diat. p. 48, tab. II, fig. 17. — Rabh. Janisch Diat. p. 18, tab. I, fig. 11. — Van Heurck Syn. pag. 138, tab. XXXI, fig. 1-2 (A. B. contenuto dell'Epith. secondo Pfitzer). — Navicula turgida Ehr. — Eunotia turgida Ehr. (1830) — Epithemia adnata Bréb. Comp. pag. 16.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1404 — Erb. critt. ital. Ser. II, n.° 332 — Eulenst. Diat. typ. n.° 32 — Exicc. nostra n.° 57.

Epith. e fronte leniter convexa, versus polos attenuata, apicibus obtusissimis: costis validis divergentibus (10-12 in 10 μ), dorso oblongo convexo, e latere plus minus arcuata.

Variabilissima per la grandezza (42-100 μ). Faccia valvare cilindrica, concavo-convessa, terminazioni attenuate, arrotondate, larghe, dritte, costole forti (5-6 in 20 μ); faccia connettivale rettangolare fianchi alquanto dilatati, con perle ad ambo i lati, formate dai varî rilievi delle costole. Frustuli a silice forte e riuniti per lo più in due, accollati per la faccia ventrale.

Comune su tutte le piante acquatiche (Pasconi) e nelle vasche della città.

101. **E. Westermanni**. (Ehr.) Ktz. Bacill. tab. V, fig. XII, e tab. XXX, fig. 4.— Rabh. Eur. I, 63. — Epith. turgida *var. Westermanni* Brun. Diat. pag. 43, tab. II, f. 17. — Van Heurck Syn. pag. 138, tab. XXXI, fig. 8. — Nav. Westermanni Ehr.

Minor, valde convexa, versus polos attenuata, apicibus vix porrectis, costis vix convergentibus, a latere elliptica, utroque polo truncata. Long. ad 20 μ.

Colla precedente nelle medesime località; ma più rara.

102. **E. Sorex**. Ktz. Bacill. pag. 33, tab. 5, fig. XII, 5. — a. b. — Sp. Alg. p. 1.— Rabh. Eur. I, pag. 64.— Brun Diat. pag. 44, tab. II, fig. 18.— Van Heurck Syn. pag. 139, tab. XXXII, fig. 6, 8.

Exicc. Eulenst. Diat. typ. n.° 34.— Exicc. nostra n.° 57.

Minuta, dorso valde convexa ad polos constricta apicibus obtusiusculis vel acutis porrectis et leniter incurvis, costis convergentibus.

Frustuli ovoidi col dorso molto convesso, estremità contratte, strie convergenti; faccia connettivale ovale egualmente troncata agli estremi. Lunghezza 8-25 μ.

È specie molto distinta per la uguale e considerevole convessità del dorso e per le strie nette e convergenti.

Si trova colla precedente.

103. **E. gibba**. (Ehr.) Ktz. Sp. Alg. p. 3 — Bacill. p. 23, tab. 4, fig. XXI.— Rabh. Süssw. Diat. tab. I, fig. 3. — Eur. I, pag. 64.— Brun Diat. pag. 44, tab. II, fig. 15 — Van Heurck. Syn. pag. 139, tab. XXXII, fig. 1-2. — Navicula uncinata Ehr. — Cymbella incrassata Bréb. — Eunotia gibba Ehr. — Epith. angulosa Perty.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2375. — Exicc. nostra n.° 57.

E latere linearis, medio utroque gibboso clavata apicibus obtusis rectis, striis parallelis, rectis (5-8 in 10 μ); facie linearis, centro et subpolis gibboso-inflata.

Faccia connettivale bislunga, rigonfiata alla parte media; faccia valvare rettilinea bislunga, col ventre piano, linea dorsale rigonfiata ed elevata nel centro, ed un poco rigonfia agli estremi che si terminano con ripiegatura allo interno. Lunghezza 75-180 μ (e più secondo le mie misure).

Comune nelle acque stagnanti sulle piante. Vasche della città, Pasconi.

104. **E. gibba** *var. ventricosa*. Brun. l. c., t. II, fig. 15. — Van Heurck Syn. pag. 139, tab. XXXII, fig. 4-5. — Epith. ventricosa Ktz. Bacill. t. 30, fig. 9. — Rabh. Eur. I, p. 64.

È più breve della precedente (25-60 μ) con dorso molto convesso e attenuato, quasi acuminata agli estremi.

Colla precedente.

Osservazione.

Grunow. (Wien. Verhandl., 1862 p. 327) Brun (Diat. Jura) e Van Heurck (Syn. l. c.) ritengono questa forma come varietà della *E. gibba*; le costole però sono alquanto più distanti nei nostri esemplari e le terminazioni degli apici ora più, ora meno troncate, non mai però rigonfie. Per ora la ritengo come semplice varietà.

105. **E. Zebra** — (Ehr.) Ktz. Bac. p. 34, tab. V, fig. XII, b; e tab. 30, fig. X.— Rabenh. Süssw. Diat. p. 18, tab. I, fig. 8.—Eur. I, pag. 65.—Brun. Diat. p. 45, t. II, fig. 16; e IX, fig. 23 — Van Heurck. Syn. pag. 140, tab. XXXI, fig. 9 *(var. proboscidea)*. — Navicula Zebra Ehr. (1834). — Eunotia Zebra Ehr. (1838). — Epithenia adnata Bréb.—Frustulia adnata Ktz.

Exicc. nostra n.° 57.

Mediocris cylindracea, late connexa, polos versus attenuata, apicibus obtusis non porrectis; costis validis (6-8 in 20, μ) striis inter costas subliliter punctatis.

Si distingue per la forma cilindracea, pel dorso ugualmente convesso ma non molto, il ventre poco concavo e certe volte quasi piano, gli estremi ottusi con strozzamento ai due poli, ma estremità non prolungate. Strie sottili, granulate, 4-5 tra le costole robuste e non parallele, ma più o meno convergenti, secondo la grandezza del frustulo. Sui fianchi una serie di perle; faccia connettivale lineare, convessa nel mezzo, troncata agli estremi. Silice forte.

Comune nelle vasche dall'Orto Botanico ed altrove al Sebeto.

La varietà *proboscidea* del Van Heurck l. c. l'ho veduta qualche volta mescolata al tipo. È forse una forma anzichè una varietà della specie.

41. SYNEDRA Ehrenberg (1831).

Da σύνεδρος *che siede insieme, per l'ordinario aggruppamento di più frustuli sullo stesso punto.*

Sin. del genere (in parte) Bacillaria Nitzsch.—Hystria Bory.—Echinella Ehr., Ktz. — Gomphonema Ktz. (ex p.) — Diatoma Ag. (ex p.). — Frustulia Bréb., Ktz., Menegh.

Letteratura. — Meneghini, l. c. pag. 65-71. — Pfitzer, l. c. pag. 106.

* *Dubiae.*

106. **Syn. pusilla** Ktz. Bacill. tab. 3, fig. XXIX.—Rabh. Eur. I, 127.— Lineari-oblonga, elliptica; valvis oblongo-ellipticis obtuse rotundatis.

Sparsa qua e là in diverse preparazioni; mai abbondante.

** *Adnatae*

107. **Syn. pulchella.** Kutz.— *b fasciculata* Rabh. Eur. I, p. 131.—Syn. fascicu-

lata Ktz. — Exilaria fasciculata Ktz. — Syn. Vaucheriae var. fasciculata Brun Diat. p. 123.

Frustulis solitariis geminatis v. fasciculatis, pulvinulo plus minus elevato, striis transversis 18-20 (in 10 μ).

Exicc. nostra n.° 69.

Frustuli riuniti a due a due ovvero a 4 o 6 parallelamente; strie trasversali visibili a luce obliqua; nodulo centrale dilatato.

Sulle piante acquatiche al Pascone Capece, ed altrove.

108. **Syn. Ulna.** (Nitzsch) Ehr.—Rabh. Süssw. Diat. tab. IV, fig. 4 a-d.—Brun Diat. p. 125, tav. VI, fig. 20.—Van Heurck Syn. pag. 150, tab. XXXVIII, fig. 7.— Frustulia Ulna Ktz. — Diatoma parasiticum Ag. — Bacillaria Ulna Nitzsch.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2026. — Erb. critt ital. I. ser. n.° 1179; II^a, n.° 286. Exicc. nostra n.° 68. (con altre diatome).

Syn. linearis, plerumque singularis vel geminatim pulvinulo innata, dein libere natans; fronte apicibus parum attenuatis, obtuso-rotundatis; striis validis (9 in 10 μ).

Lunghezza da 75 a 200 μ; faccia valvare, lungamente lanceolata, apici attenuati, ovali; area lineare stretta tra le righe, psedonodulo piccolissimo che qualche volta si estende sino ai margini; di lato stretta, a fianchi paralleli. Silice spessa.

Comune in tutte le acque. Sebeto Pasconi. Vasche della città.

109. **Syn. Ulna** *var. longissima.* (W. Sm.)—Brun Diat. pag. 126, tab. IV, fig. 21.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1562, 2226. Exicc. nostra n.° 71. Forma purissima!

Sulla *Vaucheria caespitosa* nel rigagnolo sulla via del Pascone Capece. Febb. 1881.

Lunghezza dei frustuli 200-380 μ.

Osservazione

Ho trovato una volta abbondantissima e perfettamente pura questa specie sulle alghe del detto rigagnolo: in seguito non ho potuto più raccoglierla in tanta copia. Brun nota questa specie come abbastanza rara in pianura: io ho potuto riscontrarla anche in altre località. Conviene con l'esemplare di Rabenhorst. (n.° 1562 delle Alg. Eur.); l'esemplare della stessa varietà al n.° 2226 è firmato: » Pedicino, dalle paludi Pesto ».

110. **Syn. splendens.** Ktz. Bacill. p. 66, tab. 14, fig. XVI.—Rabh. Eur. I, p. 134—S. Ulna var. splendens Brun. Diat. pag. 126, tab. V, fig. 1. — Van Heurck Syn. pag. 150, tab. XXXVIII, fig. 2. — Syn. radians Sm. (ex p.)

Exicc. Alg. Eur. n.° 1082. — Exicc. nostra n.° 69.

S. plerumque fasciculatim aggregata, adnata, latere polos versus parum dilatata, valvis lineari-lanceolatis, apicibus obtusiusculis.

Si avvicina molto alla *Syn. Ulna* sia per la lunghezza dei frustuli che per le strie. Ne differisce per la eguaglianza dei lati, che nella *Syn. Ulna* sono un poco incurvati per dentro, avendo le estremità della faccia connettivale un poco allargate.

Comune sulle piante nelle acque stagnanti.

111. **Syn. acuta.** *v. oxyrynchus.* Ktz. Bacill. 66, tab. 14, fig VIII. — 2 — Brun Diat. p. 125, tab. IV, fig. 26.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 1324. Exicc. nostra n.° 55.

Linearis, utroque fine acuminata, striis transversis 14-16 in 10 μ.

Sparsa in mezzo ad altre diatomee. — Ne ho potuto osservare delle forme di passaggio alla *Syn. Amphirrhynchus* ed alla *Syn. splendens.*

Rara e mai abbondante.

112. **Syn. Acus.** Ktz. Bacill. tab. 15, fig. 7. — Rabh. Süssw. Diatom. tab. IV, fig. 42. — Eur. I, pag. 536 — S. tenuis Ktz. — Brun Diat. pag. 124, tab. V, fig. 9.

Exicc. Rabenh. Alg. Eur. n. 1102, 11026. Exicc. nostra n. 72.

S. gracillima, linearis, acicularis, valvis angustissime linearibus, lanceolatis, apicibus longe porrectis, obtusiusculis, striis delicatissimis.

Individui lineari, aciculati, con estremità prolungate ed ottuse o puntute, strie difficilmente visibili; frustuli solitari o in piccoli gruppi. Lunghezza 80-125 μ.

Sulle piante acquatiche nelle vasche (giardino del Liceo V. Emanuele, Pasconi nei fossi presso il Pascone Capece, rigagnoli del Sebeto sulle *Spirogire* e sul *Pleurocarpus mirabilis* etc.

42. FRAGILARIA Lyngbye (1819) Char. emend.

Fragilaria, *per la facile dissociazione de' frustuli.*

Sin. del genere. Bacillaria Nitzsch. — Conferva Müll. — Diatoma Auct. pl.

Letteratura. — Pfitzer, l. c. pag. 120.

* 113. **Fr. capucina** Desmaz. — Rabh. Eur. I, pag. 118. — Brun Diat. pag. 120, tab. IV, fig. 1. — Van Heurck. Syn. pag. 156, tab. XLV, fig. 2. — Fr. pectinalis Lyngb. — Fr. tenuis Ag.

Qualche volta mi è occorsa vederla in preparati di alghe dal Sebeto. Non ne ho mai fatte raccolte pure.

43. DENTICULA Kützing (1844).

Dai piccoli punti dentiformi dei lati delle valve.

Sinon. del genere. Eunotia Ehr. (ex p.).

Letteratura. — Meneghini, l. c. pag. 41.

* 114. **D. tenuis** Kütz. Bacill. p. 43, tab. 17, fig. 8. — Rabh. Eur. I, p. 114. — Van Heurck. Syn. pag. 159, tab. XLIX, fig. 20-31.

Probabilmente tra le altre diatomee ai Pasconi.

44. DIATOMA De Candolle (1805).

Da διατομή separazione, per la separazione dei frustuli riuniti prima in fasce.

Sin. del genere. — Denticella Jan. et Rabh. — Bacillaria Ehr. — Nitzsch. — Conferva Dillw. — Meridion Greg. — Fragilaria Grun etc.

Letteratura. — Meneghini, l. c., pag. 45-47. — Pfitzer, l. c., pag. 120.

115. **D. vulgare** Bory Dict. 1828. — Arthrodieés fig. 1. — Ktz. Bacill. pag. 47. tab. 17, f. XV, 1-4.—Rabh. Süssw. Diat. tab. II.—Eur. I, 121.—Brun Diat. p. 216. tab. IV, fig. 13. — Van Heurck Syn. pag. 160, tab. L, fig. 1-6 (*B* contenuto del frustulo a tav. LI). — Bacillaria vulgaris Ehr. — Diatoma fenestratum Ktz. — Diat. floccosum Ag. — Denticula obtusa Ktz.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 563. — Roumg. Alg. Fr. n.° 404. — Exicc. nostra n.° 67.

D. fronte oblongum v. ovato lanceolatum, sub polis leniter constrictum, apicibus obtuso-rotondatis; costis 6-10 in 10 μ; e latere rectangulum, apicibus truncatis.

— — *b forma cuneata*

— — *e forma quadrata*

Lunghezza 25-55 μ; di fronte ellittico-ovale un poco compresso ai poli, estremità rotonde.

Sulla *Cladophora glomerata* alla Fontana Medina, ed altrove. Sebeto, Pasconi, Villa Comunale (vasche) ecc.

116. **D. tenue**. Ag. — Rabh. Süssw. Diat. p. 57, tab. IV, fig. 1. — Eur. I, 122. — Ktz. Bac. p. 48, tab. 17, f. X, 6-14. — Brun Diat. p. 118, tab. III, fig. 35, tab. V, fig. 14. — Diat. elongatum *var. tenue?* Van Heurck Syn. p. 160, tab. L, fig. 22. — Bacillaria pectinalis Ehr.

Exicc. Roumg. Alg. Fr. n.° 17. — Exicc. nostra n.° 67.

Diat. gracile plus minus tabellatum, cuneatum v. quadratum, valvis anguste lanceolatis, apicibus obtusis parum productis, striis 6-8 in 10 μ — Longitud. admodum variabilis 30-70 μ.

Frustuli poco numerosi, riuniti a zig-zag o a strisce brevissime, di forme e grandezze variabili, ordinariamente con la faccia valvare od ovale, od ellittico-lanceolata, con apici o poli larghi allungati.

Col precedente sulle alghe filamentose; nelle vasche e ruscelli, acque scorrenti e sotto gli stillicidii delle fontane. Fontana Medina, vasche della Villa (vasca di Galatea!) Sebeto presso alle cadute d'acqua.

45. MERIDION, Agardh (1824).

Da μερίζω divido, per la facile divisione dei frustuli.

* 117. **M. circulare** (Grev.) — Ag., Ktz. Bac. pag. 41, tab. 7, fig. XVI-1 — Rabh. Süssw Diat. tab. I, fig. 1. — Brun Diat. p. 128, tab. IX fig. 11. — Van Heurck Syn. pag. 161, tab. LI, fig. 10.

Nelle acque del Sebeto ai Pasconi (Cesati).

Trib. VII. — *SURIRELLEAE*

Letteratura.—Kützing, Bacill. p. 58-59.—Pfitzer, l. c. pag. 107.

46. CYMATOPLEURA Smith (1853)

Da κῦμα onda e πλευρά costole, per le costole ondeggianti del frustulo.

Sin. del genere. — Surirellae sp. Auct. — Melosira Perty — Navicula Thr.

118. **C. Solea** *var. apiculata* Pritch.—Brun Diat. p. 97 tab. I, fig. 11 — Cymat. apiculata W. Sm.— Rabh. Eur. I, p. 61. — Navicula librile Ehr.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n. 1487, 1521, Exicc. nostra n.° 56, 63.

C. minor ad 1,50 lata, medio leniter constricta, polis apiculo producto. Forma plus minus elliptica, nodulis marginalibus plus minus conspicuis.

Presentasi di forma ovoidale o bi-ovale alquanto ristretta nel mezzo con un contorno nettamente perlato, strie trasversali o costole di vario sviluppo; Endocroma diffuso, in lamine larghe.

Non rara, ma sempre in frustuli scarsi nelle vasche, nelle fontane, acque stagnanti etc. (Villa—Orto Botanico. Sebeto).

47. SURIRELLA Turpin (1827).

Dedicata al D.r J. Suriray

Sin. del genere — Suriraya Pfitz. — Denticula Kütz. (ex p.) etc.

Letteratura. — Meneghini, l. c. p. 63. — Pfitzer, l. c. pag. 107-110; 117-119.

119. **S. biseriata** (Ehr.) Bréb. Alg. Falaise t. VII.—Ktz. Sp. Alg. pag. 37—Brun Diat. pag. 99, tab. II. fig. 3.—Van Heurck Syn. pag. 186, tab. LXXII. fig. 1-3. Navicula bifrons Ehr.

Exicc. Rabh Alg. Eur. n. 1103, 1699. Roumg. Alg. Fr. n. 1. Exicc. nostra n. 63.

E maximis, late lanceolata, polis obtusis, costis valdissimis 3-4 in 10 μ, medio parallelis, polos versus declinatis, vitta longitudinali interruptis; latere lineari oblonga, obtusangula, costis subradiatim dispositis, medio vitta latiuscula percursa.

Formae magnitudine variae, plus minus graciles.

Osservazione

Gl'individui di questa specie che ho raramente rinvenuti nelle acque dolci e nelle vasche sono ad estremità più larghe e per la forma si avvicinano alquanto alla *Surirella ovata*; ma hanno le costole larghe e prolungate quasi fino alla linea mediana.

120. **Sur. ovata**. Ktz. Bacill. p. 62, t. 7, f. 1-4 — Brun Diat. pag. 92, tab. II, fig. 2. — Rabh. Eur. I, pag. 57.

— — *var. minuta* Bréb. — Ktz. Sp. Alg. p. 38.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 605. — Exiccata nostra n.° 64. Roumg. Alg. Fr. n.° 353.

E minimis, ovato-elliptica, costis radiantibus 7 in 10 μ, area angusta lanceolata, valvis carina vix alata, latere exacte cuneata, utroque polo truncata.

Colla precedente in scarsissimi individui Pascone, Fontana Medina, Vasche della Villa ecc.

* 121. **Sur. spiralis** Ktz. Bacill. p. 60, tab. 3, fig. LXIV — Brun Diat. p. 102, tab. I, fig. 15 — Van Heurck Syn. p. 189, tab. LXXIV fig. 4-7 — Campylodiscus spiralis W. Sm. Rabh. Eur. I, 50 — Ic. nostra: tab. II, fig. 9.

Rari frustuli osservati più volte in raccolte di alghe dal Sebeto.

48. NITZSCHIA Hassall (1845).

Dedicato a J. Nitzsch *algologo.*

Sinon. del genere: (ex p.) Bacillaria Nitzsch. — Navicula Ehr. — Synedra Ehr.

Letteratura. — Pfitzer, l. c. pag. 95-97.

122. **N. sigmoidea.** (Nitzsch) Sm. — Brun. Diat. pag. 104, tab. V, fig. 22. — Rabh. Eur. I, pag. 156. — Van Heurck Syn. pag. 178, tab. LXIII, fig. 5-7. — Bacillaria Sigmoidea Nitzsch. — Synedra sigmoidea Ktz. Bacill. pag. 67, tab. 4, fig. XXXVI, XXXVII. — Sigmatella Nitzschii Rabh. Süssw. Diat. t. IV, fig. 1.

Exicc. nostra n.° 60.

Maxima, anguste linearis, sigmoidea, utroque fine truncata; valvis linearibus, utroque fine cuneiformi-obtusatis; membrana connexiva latiuscula, longitudinaliter plicata; carina centrali nodosa, striis subtilibus (27-37 in 10 μ).

È la specie più grande, misurando da 100 a 500 μ; Faccia valvare rettilinea un poco curva: sempre lungamente attenuata; faccia connettiva sigmoide troncata con perle marginali (9 perle in 10 μ) strie trasversali sottili e difficilmente visibili.

Non infrequente, ma però in scarsi individui nei rigagnoli del Sebeto. (Pascone Capece) con altre diatomee.

123. **N. Sigma.** (Ktz.) Sm. — Rabh. Eur. l. c. p. 156 — Brun Diat., p. 105, tab. V, fig. 24. — Synedra Sigma Ktz. Bacill., p. 67, tab. XXX, fig. 14.

Exicc. nostra n.° 60.

Mediocris, lineari lanceolata polos versus sensim attenuata, apicibus truncatis; valvis anguste lanceolatis, apicibus longe acuminatis, striis transversis distinctis (56 60 in 0,001″ Rabh. — 23-27 in 10 μ Brun.).

Lungamente lanceolata, sigmoide tanto di fronte che di lato, questa specie si distingue per gli apici acuti con una sola serie di perle ben visibili. A luce obliqua distinguonsi bene le strie coll' obiettivo 8 Prazm.

Più rara della precedente, colla quale si trova associata.

124. **N. thermalis.** Ehr. — Pinnularia thermalis Ehr. — Surirella thermalis K. l. c. p. 60, t. 3, fig. 45. — Navicula umbonata Ehr. N. thermalis Brun Diat. p. 106 tav. V, fig. 17. Rabh. Süssw Diat. III, fig. 10 l. c. (Surirella umbonata).

Exicc. Erb. critt. ital. Ser. II, n.° 587. — Exicc. nostra n.° 64.

N. linearis; medio leniter sinuato-attenuata, utroque fine cuneato-acutata, apicibus obtusiusculis; latere apicibus truncatis. (Rab. Eur. p. 158).

Variabile per grandezza; lunga da 30 a 65 μ; lineare di fronte con i poli conici arrotondati. Strie poco visibili, sottili, leggermente costretta nel mezzo, apici della faccia connettivale troncati.

Le seguenti forme ho potuto osservarle più volte ma in scarsissimi esemplari e sparse in differentissimi preparati.

125. **N. constricta** (Ktz.) Pritch. — Rabh. l. c. pag. 152.

126. **N. tenuis** Sm. — Rabh. l. c. p. 158. Roumg. Alg. Fr. n.° 257.

127. **N. minutissima** Sm. — Rabh. l. c. 159.

128. **N. communis** Rabh. Alg. 949 — Eur. l. c. 159.

Nelle acque più o meno stagnanti o scorrenti del Sebeto, nonchè nelle vasche dell' Orto Botanico, della Villa Comunale e di altri acquarî privati.

Diverse altre specie non è stato possibile determinare, sia per mancanza di materiali di confronto sia per la grande difficoltà della striatura difficilissima a risolversi ed a misurarsi.

Sectio III. — CRYPTORAPHIDEAE (H. Law. Smith).

(Araphideae — Castracane).

Trib. I. — *MELOSIREAE.*

Letteratura. — Pfitzer, l. c. pag. 128-135, Rabh. Diat. p. 11. — Ktz. Bacillar. pag. 48-50.

49. MELOSIRA Agardh (1824).

Da μέλος *articolato e* σειρά *catena, per i frustuli cilindrici riuniti assieme formando il filamento.*

Sin. del genere. — Lysigonium Linck. (ex. p.) — Confervae sp. Müll. Engl. Bot. — Dillw. — Jurg. — Gaillonella Bory — Ehr. — Bailey — Brèb. (1828) — Rosoria Carmichael — Insidella Ehr — Stephanosira Ehr. — Orthosira W. Sm. (ex. p.).

Letteratura. — Meneghini, l. c. pag. 52-58 — Pfitzer, l. c. pag. 128-135

Osservazione

Per ragione di priorità P. Petit [1]) vorrebbe che si conservasse a questo genere il nome di *Gaillonella* dato dal Bory, (che lo dedicava a Gaillon naturalista di Dieppe) e cangiato poi dall'Agardh in quello di *Melosira*. Essendo omai universalmente accettato il nome *Melosira*, noi, pur riconoscendo la giustezza della osservazione del chiarissimo algologo francese, l'abbiamo ritenuto, per non intralciare dippiù la sinonimia delle spe-

[1]) *Brebissonia* II, pag. 106

cie, e coll' esempio di distinti algologi moderni, i quali hanno tuttora conservato il nome Agardhiano.

129. **M. varians** — Ag. Ktz. Bacill. p. 54 tav. 2, fig. X. 1-6. — Rabenh. Süssw. Diat. tab. II, fig. 4.—Eur. I, pag. 40.—Brun Diat. pag. 134, tav. I, fig. 1. a — Van Heurck. Syn. p. 198, tab. LXXXV. fig. 10, 11, 12, 15 — Schuman Diat. der hohen Tatra p. 81.—Conferva fasciata Dillw. — Vesiculitera composita Hassall — Gaillonella varians Ehr.

Exicc. Rabh. Alg. Eur. 451-1189-806-8066 (specim. fructif.) — Erb. critt. ital. Ser. II. n. 131. — Roumg. Alg. Fr. n.° 18. — Exiccata nostra n. 73.

M. frustulis cylindraceis laevibus, utrinque aplanatis, arctissime connatis, saepe solutis v. geminatim conjunctis; diametro subaequalibus, v. duplo longioribus. Articuli frudiferi valde inflati v. globosi.

Assai variabile per grandezza, diametro e lunghezza dei frustuli: le facce valvari sono lisce senza strie raggianti, la faccia connettivale finamente punteggiata, con punteggiature difficilmente visibili.

Dimensioni 25-40 μ diam.

Comune nelle acque stagnanti o lentamente fluenti. — Fontana Medina, Pasconi del Sebeto ecc.

Forma masse fioccose leggiere di color giallo-bruno; disseccandosi sulla carta prende un colorito verde.

130. **Melosira Roeseana**. *var. spiralis*. Grun. — Liparogyra spiralis Ehr. — Van Heurck Syn. pag. 199, tab. LXXXIX, fig. 7-8. — Icon nostra tab. II, fig. 10-12.

Frustuli solitarii vel geminatim conjuncti, diametro duplo longiores v. subaequante, superficie binis spiris plicatis notata, diam. artic. 12-25 μ.

Frustuli isolati o riuniti per due, con superficie spirale, plicata ad angoli ottusi. Endocroma granuloso che riempie tutta la cellula. (Exicc. nostra n.° 74).

Non è infrequente tra i muschi umidi degli alberi (Capodimonte, Orto Botanico, Arenella) e sotto gli stillicidî dei canali.

Osservazione

Questa graziosa e rarissima varietà che ho incontrata più volte in località diverse e che ho determinato colla sola ispezione della figura data dal Van Heurck (l. c.), non è peranco notata, per la Flora Europea, dal Rabenhorst, nè sotto al nome dell'Ehrenberg e dal Van Heurck è tenuta come assai rara.

Però i caratteri di questa diatomea sono così spiccati, che sono certo della diagnosi, e tengo a notarla tra le specie del Comune di Napoli essendo nuova per l'Italia.

131. **M. arenaria**. Moore in Ralfs. Ann. of Nat. Hist. XII, tab. IX, fig. 4 — Ktz. Bacill. pag. 55, tab. 21, fig. XXVII. — Rabh. Süssw. Diat. tab. II, fig. 5 — Brun. Diat. p. 136, tav. I, fig. 2 — Van Heurck Syn. pag. 200, tab. XC, fig. 1-3, 1 — Rabh. Eur. I, p. 42. — Gaillonella varians Ehr. — G. undulata Ehr. Mikrogeolog. — Orthosira arenaria Sm.

Exicc. Rabh. Alg. Eur n.° 1567. Eulenst. Diat. typ. n.° 4. — Erb. critt. ital. Ser. I, n.° 1454, e Ser. II, n.° 715. — Exiccata nostra n.° 75.

M. maxima inter omnes, cellulis cylindraceis arcte conjunctis, diametro aequalibus v. 3-4 plo brevioribus, ad margines punctatis, v. punctato-radiatis, fronte radiatim striatis, centro punctulato. Endochroma subhomogeneum, deinde paullum granulosum.

Filamenti grandi e visibili ad occhio nudo, esattamente cilindrici, articoli più alti che larghi, esattamente e strettamente congiunti; faccia suturale larga e perfettamente piana, bordi con piccole prominenze. Faccia valvare con strie radianti e col centro punteggiato. Superficie ondulata a sottili strie incrociantisi in senso diagonale e trasversale (luce obliqua-prep. a secco).

Diametro dei filamenti 80-120 μ; larghezza dei filamenti (articoli) 20,25 μ; Queste misure sogliono variare secondo l'età e la robustezza dei filamenti, e secondo la dilatazione della faccia commessurale.

132. **M. orichalcea** (Mert.) Ktz. Consp. pag. 183. — Bacill. tav. 2, fig. XIV. — Rabh. Diat. pag. 13, tab. II, fig. 2. — Eur. l. c. pag. 41. — Brun Diat. pag. 137, tab. I, fig. 9, e tab. IX, fig. 24 — Schuman. Diat. Tatr. pag. 81. — Conferva orichalcea Mert. — Ag. Syst. pag. 86. — Gaillonella aurichalcea Ehr. Infus. pag. 68, tav. X, fig. 6.

Èxicc. Rabh. Alg. Eur. n.° 2225. — Exicc. nostra n.° 76.

Frustula elongato-cylindracea diametro. 2 plo 3 plo longiore subcommissura laviter constricta, arctissime connata, polis truncata valvis depresso-subquadrangulis, vix punctatis, diam. $^1/_{200}$ $^1/_{90}$''' Rabh. — 5-20 μ Brun.

Rigagnoli del Sebeto. — * Valle dei Mulini-Gragnano etc.

Le Diatomee che ho qui descritte non rappresentano che una piccola parte delle forme che ho potuto osservare nelle acque del Comune di Napoli. Avendone l'opportunità in prosieguo di tempo; mi occuperò a determinare quelle che tuttora sono dubbie e quelle, che, mancandomi gli esemplari tipici, non ho potuto ancora identificare. È chiaro che un censimento sistematico di esseri così minuti e così svariati non potrà mai dirsi compiuto; ma sarà tanto più importante per quanto maggiori saranno le osservazioni e più minuziose le ricerche.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tutte le specie descritte nel presente lavoro sono state disegnate alla camera lucida, con ingrandimenti lineari di 80 a 1000, adoperando, tra gli altri, i nuovi sistemi obiettivi Prazm. a 4 lenti n.° 7 e 9 (a secco) ed il n.° 10 (immersione ad acqua) dello stesso autore. Per la determinazione delle Diatomee ho adoperato un condensatore a grande angolo ed ordinariamente la luce del petrolio, modificata da un vetro azzurro ed illuminazione moderatamente obliqua.

L' unità di misura adottata e il micromillimetro (μ) $= 0^{mm},001$; ed a questa sono state riferite le dimensioni reali di tutte le specie studiate, non escluse le diatomee. Le dimensioni sono state calcolate per mezzo del micrometro oculare, di cui una divisione è $= 0^{mm},1$; sapendosi che la grandezza reale di un oggetto veduto nel campo del microscopio è uguale al numero delle divisioni micrometriche oculari abbracciate dall' oggetto (cioè alla sua grandezza apparente) diviso per lo ingrandimento.

Allorchè non è indicato diversamente, le figure s' intendono ingrandite a 310 diam.

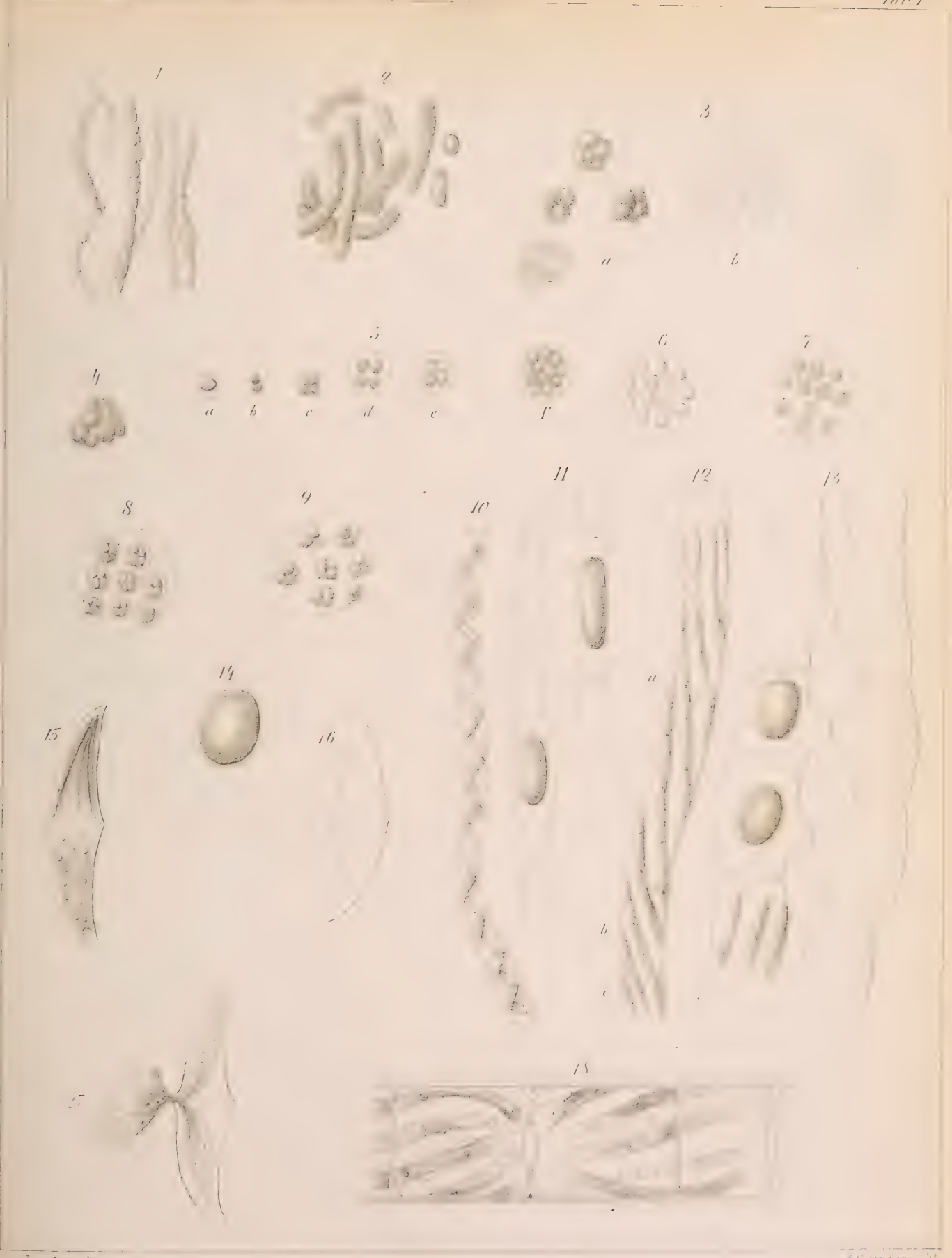
Tavola I.

Fig. *1.* *Anabaena Azollae.* Porzione di un filamento isolato — *a*, *b*, spore.
» *2.* *Scytonema truncicola.* Filamenti isolati $\times$ 400; 2 *a*, $\times$ 600.
» *3.* *Gomphosphaeria aurantiaca* : *a* $\times$ 310 — *b*, *c*, mostrando le cellule cuneate $\times$ 1000.
» *4.* Individui che mostrano una membranella distinta.
» *5.* *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, diversi gradi di sviluppo della *Gomphosphaeria.*
» *6.* Primo stadio della massa segmentata racchiusa in una membrana jalina.
» *7.* Stadio più avanzato della stessa. Le singole massoline mostrano un principio di segmentazione.
» *8.* Stadio ulteriore; masse segmentate con membrana propria.
» *9.* *Gomfosferie* ancora racchiuse e che poi si rendono libere.
» *10.* *Spirogyra Weberi* : Filamento vegetativo.
» *11.* Articoli dello stesso in fruttificazione.
» *12.* *Spirogyra orthospira.* — *a* Filamento vegetativo con cellule in via di segmentazione *b c*.
» *13.* Due filamenti in conjugamento.
» *14.* Zigospora isolata.
» *15.* Cellula vegetativa con nucleo in via di sdoppiamento.
» *16.* *Closterium Leibleinii var.? angulatum.*
» *17.* Lo stesso senza contenuto.
» *18.* Cellula che mostra la fuoriuscita del sacco protoplasmatico.

Tavola II.

Fig. 1. *Cosmarium neapolitanum n. sp.* Individuo vegeto a sviluppo completo.
» 2. Lo stesso veduto di lato.
» 3. Altro in principio di sviluppo.
» 4. Individuo vuoto che mostra la punteggiatura della membrana.
» 5. *Scenedesmus obtusus* a diversi gradi di sviluppo: × 600 — *a*, zoospore isolate — *b*, *c*, *d*, diversi gradi di segmentazione della massa con persistenza dei nuclei brillanti. — *e*, colonia a sviluppo completo.
» 6. *Palmella heterospora* × 600.
» 7. *Vaucheria geminata.* Studii di sviluppo.
» 8. *Pleurosigma Spencerii* — *a*, strie dello stesso × 1000.
» 9. *Surirella spiralis.*
» 10. *Melosira Roeseana* var. *spiralis.*
» 11. La stessa con l' endocroma.
» 12. Valva isolata ed ingrandita × 1000.

finita di stampare il dì 24 luglio 1885.


1
2
3
a
b
4
5
a
b
c
d
e
f
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
a
b
c
17
18

L'autore dis. A. Serrano inc. e lit.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA NATURA E COSTITUZIONE CHIMICA DEI GRASSI DELLE CASTAGNE COMUNI E SU DI UNA SOSTANZA NUOVA IN ESSI SCOPERTA

MEMORIA

pel Dott. P. MALERBA

(Adunanza del dì 13 gennaio 1883)

Nella mia Nota sul grasso delle castagne comuni, presentata il 14 Ottobre, promisi a questa illustre Accademia di continuare e completare, per quanto mi fosse possibile, le mie ricerche su questa sostanza, nello intento di determinarne la natura, e la costituzione chimica. Eccomi ora a sciogliere la promessa fatta. Se non che, come spesso avviene allo sperimentatore, che cercando una cosa ne trova un'altra inaspettata, questi studii mi hanno condotto alla scoperta di una singolare sostanza, la quale a quanto pare, non ha riscontro fra quelle conosciute.

Ma innanzi tutto intendo dare qui una dettagliata descrizione del processo chimico impiegato per lo studio di queste sostanze grasse. Col trattamento all'etere di circa sei a sette chilogrammi di farine di castagne [1]), ottenni duecento e più grammi di sostanza grassa, la quale privata interamente dell'etere mercè distillazione e coll'ajuto di una corrente di anidride carbonica, si presentava limpida e di un color giallo-rossastro cupo, che col raffreddamento e col riposo lasciava depositare al fondo del recipiente una sostanza bianca giallastra. Fu versata tutta su di un filtro asciutto di carta Berzelius: quasi la totalità filtrò limpida, mentre sul filtro restò un piccolissimo residuo bianco leggermente colorato in giallo. Questo residuo fu ripetutamente lavato con etere caldo finchè non divenne perfettamente bianco, e dopo di averlo prosciugato ben bene in carta suga, se ne introdusse un pochino in un piccolo tubo di vetro per prelevarne il punto di fusione. Coll'idea che questa sostanza fosse probabilmente della palmitina o della stearina, mi aspettavo di vederla fondere verso i 40°-50°. Ma fu grande la mia meraviglia quando il termometro oltrepassava i 200° senza che modificazione alcuna si notasse nella sostanza; e non fu che tra 265° a 270° che si cominciò a vedere un

[1]) Questa farina ci venne gentilmente donata dal Prof. Albini.

principio di fusione e insieme di decomposizione. Dopo i 200° però la sostanza si imbruniva parzialmente e questa circostanza mi fece sospettare che il corpo non fosse abbastanza puro. Per purificarlo quindi lo sciolsi nell'alcool birettificato bollente (giacchè nel freddo si scioglieva poco) e filtrai in imbuto a caldo: il filtrato depose immediatamente una sostanza bianchissima e di aspetto semicristallino, la quale, perfettamente asciutta, fu riscaldata senza alterarsi fino a 265°-268° e a 270° fondeva con parziale decomposizione.

Allora, nella speranza di ottenerne una buona quantità, passai al trattamento dell'altra porzione, della parte cioè filtrata e limpida che costituiva la quasi totalità, e nella quale aveva ragione di sospettare si trovasse in soluzione o combinata.

I.

In circa centoventi grammi di questa sostanza grassa filtrata si versò tanta quantità di una soluzione di potassa caustica al 15 per 100 quanta bastò per saponificarla completamente, e il tutto si portò sino all'ebollizione agitando di continuo. La soluzione di sapone alcalino, molto densa e di color rossogiallo scuro, non era perfettamente limpida, ma sembrava tenere in sospensione una gran quantità di una sostanza bianca e polverulenta, che andò aumentando col tempo e col raffreddamento del liquido. Dopo 24 ore fu precipitato con acido idroclorico allungato in leggero eccesso e fu fatta bollire, e dopo raffreddamento, si gettò su filtro di carta. Ne passò un liquido acido, limpido e di un color giallognolo, e sul filtro restò un'abbondante massa pastosa e molle, di color giallo-rossiccio, della consistenza del grasso di majale, e in fondo al filtro una piccola parte liquida, oleosa e del color del vino di marsala. Questo precipitato venne reiterate volte lavato con acqua distillata e poscia fu trattato con etere caldo ripetutamente: si sciolse in grandissima parte e circa la decima parte di tutta la massa rimase sul filtro non disciolta dall'etere. La soluzione eterea era limpida, acida e di color giallo-rossiccio; il residuo sul filtro era bianco e polverulento. Questa sostanza, poco solubile nell'alcool freddo, si scioglieva in molt'alcool bollente. Perciò venne sciolto in piccole porzioni nell'alcool bollente e le soluzioni si filtrarono successivamente a caldo, e nel cadere in un sottoposto cristallizzatore lasciavano immediatamente precipitare una sostanza bianchissima e di aspetto semicristallino. Il filtrato col suo precipitato fu lasciato a riposo in luogo fresco per ventiquattr'ore, e poscia venne filtrato per separarne la parte liquida dalla solida e bianca. Questa prosciugata per più giorni in carta bibula aveva il punto di fusione a 270°. L'alcool fu lasciato per molti giorni alla temperatura ordinaria ad evaporare lentamente ed altra sostanza si depositò sulle pareti del recipiente. Poscia distillato circa la metà dell'alcool, si ottenne un'altra quantità di sostanza bianca che aveva lo stesso punto di fusione.

A) Questa sostanza che, come abbiamo detto, fonde a 270° circa osservata al microscopio (diametri 300), specialmente deponendo una goccia della sua soluzione alcoolica bollente, si presenta sotto forma di piccolissime ellissi, la sesta parte circa della grandezza di un globulo rosso del sangue, ellissi che sembrano accennare a delle tavolette rombiche esilissime con angoli arrotondati che hanno la tendenza a disporsi a raggi, come in una rasetta.

Questa sostanza, quando è perfettamente pura, è candidissima, di aspetto semicristallino allorchè è di recente precipitata, ma quando è ammassata somiglia all' amido puro. Riscaldata sulla lamina di platino si fonde, e allontanando la lamina dalla fiamma si solidifica immediatamente in una sostanza bianco-gialletta ; continuando a riscaldare brucia con piccola fiamma luminosa senza lasciar residuo di sorta. Essa è completamente insolubile nell' acqua, sulla quale galleggia, nella potassa caustica anche concentrata e nell' acido acetico allungato ; pochissimo solubile nell' etere, nella benzina, nel cloroformio, negli olii grassi neutri e nella trementina ; quasi insolubile nel solfuro di carbonio, nella glicerina e nelle soluzioni calde dei saponi alcalini ; discretamente solubile nell' alcool etilico, nell' alcool amilico, nell' acido acetico glaciale e nelle soluzioni eteree degli acidi grassi, specialmente alla temperatura dell' ebollizione di questi solventi, ma se ne precipita immediatamente col raffreddamento. La soluzione alcoolica è neutra alle carte reattive. Questa sostanza è priva di azoto, di fosforo e di solfo, e risulta composta di carbonio, d' idrogeno e di ossigeno.

Trattata coll'acido nitrico fumante, la sostanza si calora in arancio, mentre il liquido acido assume un color gialletto, e coll' aggiunta dell' ammoniaca quella diviene gialla. Bollita lungamente coll' acido nitrico-nitroso non giunge ad ossidarsi completamente, e si trasforma in una sostanza del colore e dell' aspetto della cera lacca, solubile nell' ammoniaca.

Col reattivo d' Erdmann (acido solforico concentrato con tracce di acido nitrico) prende un bel color rosa.

Coll'acido solforico concentrato e puro si colora in giallo che passa immediatamente all' arancio e aggiungendo acqua passa al violetto, al bleu e infine al verde.

Trattata, come fa il Moleschott per la calesterina, con cinque volumi di acido solforico concentrato e puro e un volume di acqua, non si colora a freddo; ma riscaldando dolcemente si hanno quasi le stesse colorazioni della calesterina, cioè rosso, violetto, lilà.

Se all'acido solforico concentrato contenente la sostanza, si aggiunge del cloroformio, questo si colora immediatamente in celeste, mentre la soluzione solforica al fondo apparisce rosso-violetta; e se dopo l' evaporazione del cloroformio se ne aggiunge un'altra porzione, allora si colora in verde pistacchio. Ciò avviene se la reazione si fa in una capsula. Ma se, invece, l' acido solforico e la sostanza si mettono in un tubo da saggio lungo e stretto e rapidamente ci si versa sopra del cloroformio agitando dolcemente, allora si ha una colorazione fugacissima gialla e poi arancio, che subito passa al rosso e al violetto ametista, il qual colore resiste lungamente; ma se il cloroformio si versa in una capsula un po' larga, rapidissimamente il liquido cloroformico diviene bleu-celeste e poi verde e infine si scolora. La soluzione solforica nel fondo del tubo è dicroitica, cioè rosso-vinosa per trasparenza e verde-scuro per riflessione.

Come si scorge, le colorazioni che si manifestano pel trattamento all' acido solforico e al cloroformio di questa sostanza, e ciò è veramente singolare, sono simile a quelle che si producono nel trattamento all'acido nitrico nitroso nei pigmenti biliari, colla sola differenza che i colori si succedono con un ordine precisamente inverso: giallo, arancio, rosso, violetto, bleu, verde. Queste reazioni variano leggermente a secondo le condizioni in cui si opera e principalmente colla quantità della sostanza impiegata, la quale, quanto è maggiore, tanto più belle e più spiccate dà le colorazioni.

*

Pare che tutti questi colori siano dovuti alla formazione di carburi d'idrogeno, come avviene per lo stesso trattamento della colesterina, secondo ha dimostrato lo Zwenger, il quale ha studiato questi idrocarburi.

Come si rileva anche di leggieri, questa sostanza ha delle reazioni molto simili a quella della colesterina, tanto che se ne avesse il punto di fusione ed altri caratteri chimici, molto importanti, benissimo la si sarebbe potuto confondere, tanto più perchè, come la colesterina, trovasi insieme a sostanze grasse.

Assicuratomi che questa singolare sostanza non poteva essere confusa con nessun'altra già nota, mi restava di farne l'analisi elementare. Epperò si sono fatte due accurate combustioni, la prima con una porzione della sostanza precipitata dall'alcool bollente filtrato, l'altra colla porzione ricavata dopo la distillazione dell'alcool e della soluzione eterea degli acidi grassi, come si vedrà in seguito. Le due porzioni di sostanza impiegate, prima di essere bruciate, furono ben disseccate sotto il vuoto della macchina pneumatica. Di esse si era determinato il punto di fusione, ch'era identico in entrambe.

Eccone i risultati che si possono ritenere come identici, se non si voglia tener conto delle piccolissime perdite.

1.ª Combustione.

Sostanza impiegata	gr.	0,3065
Acqua ottenuta	»	0,3070
Anidride carbonico	»	0,8085

Quindi:

Idrogeno	gr. 0,0341	per %	11,12
Carbonio	» 0,2205	» »	71,94
Ossigeno per differenza			16,94
			100,00

2. Combustione.

Sostanza impiegata	gr.	0,2070
Acqua ottenuta	»	0,2035
Anidride carbonica	»	0,5420

Quindi:

Idrogeno	gr. 0,0226	per %	10,91
Carbonio	» 0,1478	per %	71,41
Ossigeno per differenza			17,68
			100,00

Dalle cifre ottenute colla combustione si può ricavare la formola bruta seguente

$n\,(C^6H^{12}O)$, che può essere benissimo quella di un alcool non saturo. Naturalmente pel punto di fusione tanto elevato, come pei risultati della combustione e per la resistenza grandissima che oppone la sostanza agli agenti ossidanti, bisogna ritenerla una sostanza molto ricca di carbonio, più ricca ancora della colesterina che ha per formula $C^{26}H^{44}O$. Del resto appena avrò pronta una quantità di sostanza sufficiente mi propongo di studiarne la costituzione chimica per stabilire possibilmente la grandezza della molecola, che dev'essere considerevole, e ricavarne in conseguenza la formula razionale.

B) Esame del liquido acido filtrato dopo la precipitazione del sapone potassico mercè l'acido idroclorico.

Questo liquido acido, limpido e di color giallognolo, fu diviso in due parti uguali, nello scopo di ricercare nell'una la glicerina, nell'altra l'acido fosforico, avendo ragioni per ammettere la presenza di quest'ultimo per qualche osservazione preliminare.

1.ª La prima parte dunque venne neutralizzata esattamente con ammoniaca, e si fece evaporare lentamente a bagno maria fino a piccolo volume, e da gialletto, come si mostrava diluito, divenne bruno gialliccio; si è trattato allora coll'alcool assoluto per estrarre la glicerina e si è filtrato. Il cloruro di potassio e quello di ammonio che si erano depositati allo stato cristallino per la concentrazione del liquido restarono incolori, mentre l'alcool sciolse quella specie di pigmento giallo-bruno. Evaporato l'alcool a bagno maria non rimase nella capsula nessun residuo liquido che accennasse alla presenza della glicerina. Si sciolse il residuo in pochissim'acqua e si fecero le ricerche per la glicerina, ma senza risultato positivo: fu impossibile sentire l'odore graveolente dell'aeroleina, caratteristico della glicerina, malgrado si fossero impiegati tutti i soliti reattivi. Soltanto si è potuto constatare la presenza di una piccola quantità di sostanza che aveva la proprietà di ridurre l'ossido di rame in soluzione alcalina, e il nitrato d'argento formando lo specchio metallico.

2.ª La seconda porzione si è svaporata a bagno maria fino a secchezza e poi si è trattata con acido nitrico-nitroso a caldo fino a che non si svolsero più vapori nitrosi; distrutta così la poca sostanza organica, si è portato a secchezza e al residuo si aggiunse un po' di acqua acidulata con acido nitrico. Filtrato il liquido si lasciò in riposo fino a che quasi tutto il nitrato potassico formatasi non si depositò cristallizzato; allora si decantò la parte liquida e limpida e, riscaldatala a 40°, si trattò con un eccesso di soluzione nitrica di molibdato ammonico, che immediatamente produsse un copioso precipitato giallo cristallino e pesante, il quale dopo ventiquattr'ore divenne abbondantissimo. Raccolto in filtro e lavato con piccole porzioni di acqua, fu sciolto in ammoniaca allungata, e la soluzione fu trattata con una miscela di solfato di magnesio, cloruro ammonico ed ammoniaca in eccesso: si produsse un copiosissimo precipitato bianco e cristallino caratteristico. Queste due reazioni mettono fuori dubbio la presenza di una forte proporzione di fosforo.

Il solfocianato e il ferrocianuro di potassio hanno svelato la presenza di piccole quantità di ferro.

C) Esame della parte solida rimasta sul filtro, dopo la precipitazione del sapone potassico coll' acido idroclorico, e sciolta dall' etere.

La soluzione eterea era molto acida, di un color giallo-rossiccio e limpida. Si distillò l' etere e quando il solvente era quasi tutto eliminato, la sostanza contenuta, che a caldo si presentava liquida e limpida, a misura che si raffreddava si rapprendeva in una massa semisolida bianco-giallognola, di aspetto semicristallino, molto simile alle cristallizzazioni delle sostanze grasse, e dopo ventiquattr' ore la parte solidificata aumentò tanto da non lasciare che una piccolissima parte allo stato liquido. Si è sciolta nella minor quantità possibile di etere e si è gettato su filtro Berzelius asciutto, e passò limpido lasciando sul filtro una piccola parte biancastra e polverulenta, la quale lavata ripetutamente coll' etere, venne sciolta nell' alcool bollente e filtrata a caldo. Nella soluzione alcoolica filtrata precipitò immediatamente una sostanza bianca che aveva il punto di fusione a 270°. Avendo ragione il supporre che altre porzioni di questa stessa sostanza esistessero ancora nella soluzione eterea acida, questa fu assoggettata ripetutamente allo stesso trattamento finchè si manifestò priva perfettamente della sostanza nuova. Allora la soluzione eterea, che ragionevolmente si riteneva contenere gli acidi grassi, venne trattata con una soluzione di soda caustica al 10 per 100 nello scopo di saponificare gli acidi grassi medesimi; poscia si è versata la miscela in un imbuto a rubinetto e dopo la divisione completa dei liquidi si fece la separazione della parte acquosa dall' eterea. Nella soluzione acquosa di sapone di soda si fece passare sino a rifiutare una corrente di anidride carbonica per neutralizzare l' eccesso di soda, e si evaporò lentamente a bagno maria fino a completa secchezza. Il sapone sodico polverizzato ben bene, e prosciugato in stufa, fu sciolto nell' alcool bollente e filtrata a caldo e, ancora in ebollizione, venne precipitato con una soluzione concentrata di acetato di piombo: si formò un abbondante precipitato giallognolo di sapone di piombo. Questo fu raccolto su filtro e lavato con acqua, poscia disseccato con molta precauzione e lentamente a bagno-maria e sospettando ragionevolmente la presenza dell' acido oleico, venne in seguito triturato ed agitato coll' etere nello scopo di sciogliere il solo oleato di piombo. Il miscuglio fu gettato su filtro asciutto e ne passò una soluzione eterea giallognola di oleato di piombo, e sul filtro rimase una parte quasi bianca, che venne ripetutamente lavata coll' etere.

1.° *Trattamento della soluzione eterea.* — Questa fu trattata ed agitata con acido cloridrico allungato per scomporre il sapone di piombo e mettere in libertà l' acido oleico, il quale restò sciolto nell' etere, mentre ne precipitò il cloruro di piombo. Versato tutto su filtro e fatta la separazione mercè imbuto a rubinetto, la parte eterea, rifiltrata e resa limpida, venne posta a bagno-maria per eliminare il solvente e durante la distillazione si fece passare nell' apparecchio a distillare una corrente continua di anidride carbonica per impedire il più possibilmente l' alterazione dell' acido oleico. A completa distillazione rimase nel pallone un residuo liquido oleoso di color giallognolo e acido, che col raffreddamento non divenne solido. Esso aveva l' odore dell' acido oleico alterato; restava liquido anche portato alla temperatura del ghiaccio fondente; trattato con una soluzione di zucchero e acido solforico concentrato dava una colorazione rosso-ciriegio (reazione del Pettenkofer) e infine sotto l' azione dei vapori nitrosi dopo poco tempo diveniva solido trasformandosi in acido elaidico.

Per tutti questi caratteri, esso si può ritenere, senza dubbio, come acido oleico,

sebbene alterato per i tanti diversi trattamenti, subíti all'aria libera, della sostanza che lo conteneva.

2.° *Trattamento del residuo non sciolto dall'etere e rimasto sul filtro.*—Questo residuo venne ben triturato in un mortajo di porcellana con acido solforico allungato per mettere in libertà gli altri acidi grassi combinati al piombo; poscia il tutto si è versato in un pallone e portato all'ebollizione, agitando la miscela continuamente. Quando tutto il sapone è stato scomposto e il miscuglio raffreddato, si versò tutto su filtro bagnato, e il residuo ben prosciugato venne sciolto nell'etere e filtrato per separare il solfato di piombo dalla soluzione eterea degli acidi grassi. Distillato completamente l'etere, il residuo liquido leggermente giallognolo, si solidificò immediatamente, allontanando il pallone del bagno-maria, in una massa quasi bianca.

Liquefatto di nuovo a dolce calore, se n'è versata una porzione in un piccolo crogiuolo di vetro, in cui s'immerse il bulbo di un termometro, e il tutto fu posto in un bicchiere con acqua riscaldata alla lampada per prenderne il punto di fusione. La massa fondeva verso i 50°. — Evidentemente la bassa temperatura a cui fondeva indicava che gli acidi grassi erano inquinati da impurezze. — Laonde per purificarli e determinarli, la massa si divise in due porzioni: — La minor parte fu sciolta nell'alcool allungato con un po' di acqua distillata e a caldo. — Col raffreddamento si è separata una parte molto bianca, la quale raccolta e prosciugata, venne ridisciolta in poco alcool a caldo e filtrata; dopo il raffreddamento si raccolsero le prime porzioni cristallizzate, che furono prosciugate in carta bibula per ventiquattr'ore. Dopo questo tempo la sostanza si presentava bianchissima e cristallina, e introdottane una porzioncella in un tubicino di vetro, se n'è preso il punto di fusione: fondeva a 62° e qualche frazione. — Quindi poteva essere o acido palmitico puro ovvero un miscuglio di acido stearico al 70 % e di acido palmitico al 30 %, giusta la tabella dell'Heintz. Allora non restava che assicurarsi della presenza dell'acido stearico. A tale scopo si fece ricorso al metodo della precipitazione frazionata secondo Heintz. — Si sciolse però nell'etere l'altra porzione della massa solida degli acidi grassi e si eseguì la saponificazione con una soluzione di soda al 10 per 100. Fatta quindi la separazione della soluzione acquosa di sapone alcalino dall'etere, e assoggettata quella ad una corrente di anidride carbonica per neutralizzare l'eccesso di soda, si disseccò completamente a bagno-maria il sapone e poi si fece stare parecchie ore in istufa a olio riscaldata a 130°. Polverizzato ben bene, il sapone si sciolse nell'alcool bollente e si è filtrato a caldo. La soluzione alcoolica, sempre bollente, si è trattata con cinque a sei gocce di una soluzione satura di cloruro di bario, e si filtrò per raccogliere i precipitati. — Poscia si è passato alla seconda e alla terza precipitazione operando nello stesso modo. I due primi precipitati, ben lavati coll'alcool bollente, si sono sciolti separatamente in un poco di acido cloridrico allungato e vi si aggiunse dell'etere.

Separata la soluzione eterea, si evaporò a bagno-maria. I residui si sciolsero in poco alcool caldo e si filtrarono le due soluzioni; si raccolsero le parti depositatesi per le prime e furono prosciugate in carta bibula, queste due prime porzioni, appartenenti alla prima e alla seconda precipitazione, avevano il punto di fusione tra 69°-70°: quindi erano fatte di acido stearico. La terza precipitazione ha dato un miscuglio di acido palmitico e stearico che fondeva a 65° [1]).

[1]) La presenza degli acidi palmitico e stearico fu anche dimostrata per la determinazione della quantità proporzionale di bario nei sali baritici dei suddetti acidi.

Rimase così evidentemente dimostrato, nel grasso delle castagne, la presenza degli acidi grassi oleico, palmitico e stearico.

II.

Volendo provare se il grasso delle castagne poteva essere saponificato anche per la semplice azione dell'acqua, se n'è presa una porzione, circa una quarantina di gr., e si è introdotta, insieme al doppio circa del suo peso di acqua distillata, in un piccolo palloncino di vetro a lungo collo, che si è chiuso alla lampada. Questo tubo fu mantenuto per circa tre ore in un bagno-maria fatto con acqua salata e riscaldato all'ebollizione. Dopo il raffreddamento il contenuto si era diviso in due strati, l'uno inferiore di color giallognolo ed acquoso, l'altro di color giallo rossiccio e semisolido. Rotta la punta del tubo si è versato il contenuto su filtro inzuppato di acqua per far passare soltanto la parte acquea e raccogliere sul filtro la parte solida. Da questa, col descritto e noto trattamento, si è estratta tutta la sostanza nuova dal punto di fusione a 270° e cogli stessi caratteri, non chè gli acidi grassi stearico, palmitico e oleico già citati. Ma ciò che in questo sperimento è molto interessante, malgrado sia stato eseguito sulla sostanza senza l'intervento di nessun reagente, è l'assenza della glicerina nella parte acquosa. Anche qui si è rinvenuta una copiosa quantità di acido fosforico e tracce di ferro. La parte acquosa aveva reazione acida e odore di acido acetico, la cui presenza però non ha potuto essere dimostrata con mezzi chimici. Questo liquido conteneva ancora piccole quantità di sostanza riducente.

III.

Un'altra piccola porzione di grasso, ben filtrata, si è posta in un crogiuoletto di porcellana e, su di una lampada a gas, si è ossidata con l'acido nitrico fino a che non dava più vapori nitrosi. Il residuo venne sciolto in acqua acidulata con acido nitrico e la soluzione assunse un color giallo-rossigno per la presenza della sostanza che fonde a 270°, la quale per quanto si tratti con acido nitrico non si giunge ad ossidarla completamente.

Questo liquido, trattato con molibdato ammonico in soluzione nitrica, ha dato precipitato abbondante di fosfo-molibdato ammonico, il quale sciolto dall'ammoniaca allungato e trattato con una miscela di solfato di magnesio, cloruro ammonico e ammoniaca, precipitò sotto forma di fosfato ammonio-magnesiaco, bianco e cristallino. — Si constatarono pure qui tracce di ferro.

IV.

CONCLUSIONI

Ritornando alla sostanza nuova, io dicevo che la si può bene considerare come un alcool della formula $(C^6H^{12}O)^x$, poichè si trova insieme ad acidi grassi in luogo della glicerina, e perchè si mette in libertà saponificando il grasso con un alcali caustico.

Questa opinione è avvalorata dalla sua grande simiglianza, quanto alle reazioni, colla colesterina, la quale anch'essa si trova sempre associata ai grassi dell'organismo. Ammettendo che sia un alcool, esso dev'essere necessariamente poliatomico, giacchè la sua formula vera, rappresentante la grandezza della molecola, dev'essere per necessaria conseguenza un multiplo di quella fornita dall'analisi elementare. Allora si è autorizzati a pensare che l'idrogeno dei suoi ossidrili sia sostituito dai radicali acidi degli acidi stearico, palmitico, oleico e fosforico, costituendo così un etere composto e complesso. Questo concetto è appoggiato anche dalla analogia. Conosciamo, difatti, una sostanza, esistente nel cervello, nel tuorlo dell'uovo ecc. la quale porta il nome di *lecitina,* e si può considerare come un etere composto unito alla neurina e che ha per formola:

$$C^3H^5 \begin{cases} OR' \\ OR' \\ OPO \begin{cases} ON(CH^3)^3 \\ O(C^2H^4) \end{cases} \end{cases}$$

in cui R può rappresentare il radicale dell'acido stearico « $C^{18}H^{35}O$ », del palmitico « $C^{16}H^{31}O$ », o dell'oleico « $C^{18}H^{33}O$ ». E questa sostanza, la *lecitina*, trattato colla barite o colla potassa si saponifica egualmente, come il grasso delle castagne, fornendo, come prodotti di sdoppiamento, glicerina, acido fosforico, saponi baritici o potassici degli acidi grassi, più la neurina. Anche la sola acqua sdoppia queste due sostanze nei loro componenti. La reazione dunque è la stessa nell'un caso e nell'altro, soltanto nella lecitina vi ha di più la neurina. Ora se noi al glicerile della formula della lecitina (meno la neurina) sostituiamo il radicale di quest'alcool poliatomico avremo una costituzione analoga. Dicevo meno la neurina, poichè nel grasso delle castagne questo corpo a funzione di base non esiste o almeno col metodo di estrazione impiegato non si ottiene. Io ritengo però che questo etere acido si trovi allo stato libero nella castagna. Infatti non solo nelle castagne secche sfarinate ed invecchiate la reazione del grasso è da bel principio acida ma ancora quando si estrae dal frutto fresco dell'ippocastagno.

È dubio se esistano tanti eteri quanti sono gli acidi grassi, cioè etere fosfostearico, fosfopalmitico e fosfoleico, come esistono le lecitine dioleica, dipalmitica e distearica; ovvero sia un etere unico, nella cui molecola, insieme al radicale dell'acido fosforico, entrino pure i radicali di tutti e tre gli acidi grassi. Io però, fondandomi sulle proporzioni dei corpi ch'entrano nella composizione di quest'etere, inclino per la seconda opinione.

In ultimo, si può domandare com'è che si trovi nel grasso delle castagne quella piccola quantità di ferro, e in quale stato vi esista. Se l'opinione non è molto arrischiata, non mi sembra improbabile che si trovi combinato, in un modo ignoto, a quel pigmento giallo che si trova nella parte acquosa dopo la saponificazione, e già si sa che molti grassi vegetali ed animali contengono dei pigmenti, talvolta anche combinati al ferro.

Ora dovendo dare un nome alla sostanza nuova scoperta, che nel grasso delle castagne funzionerebbe da alcool, io proporrei quello di *Castanosterina*. Siccome noi

per ora non conosciamo la struttura chimica e la formola razionale del corpo in parola, mi sembra giustificato il nome proposto; perocchè esso da una parte ci ricorda l'origine, dall'altra richiama alla mente ben anco la funzione chimica di alcool e il trovarsi associata ai grassi, come la colesterina, della quale ha pure moltissime reazioni.

Non posso chiudere questo scritto senza compiere il dovere di protestare la mia gratitudine al Professore Albini che mi ha spinto a queste ricerche che avevo già iniziato nel laboratorio di Fisiologia, e al Professore Oglialoro, che mi ha permesso di continuarli nel laboratorio da lui diretto fornendomi tutt'i mezzi necessari.

Istituto chimico della R. Università di Napoli.

finita stampare il dì 3 febbrajo 1883

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

STUDI SULLA STRUTTURA DELL'AMNIOS DEL GATTO

MEMORIA

di ANGELO MAROTTA

Letta nell'Adunanza del dì 12 Maggio 1883

Le osservazioni contenute in questa memoria furono fatte sopra embrioni, la cui lunghezza variava da 8 a 13 centm.

Epitelio interno.

L'amnios del gatto, trattato con una soluzione di nitrato d'argento — 4 per 1000—, presenta, sulla superficie che guarda la cavità amniotica, un bellissimo epitelio, formato di cellule poliedriche, riunite da un cemento che si colora in nero (Tav. I, *fig. 1*). Esse sono disposte in un solo strato, e il loro diametro parallelo alla superficie dell'amnios, è maggiore del perpendicolare. Il primo ha una lunghezza di $0^{mm},015$ a $0^{mm},021$; il secondo di $0^{mm},007$ a $0^{mm},009$ (Tav. II, *fig. 3, d'*). Esse formano adunque un epitelio pavimentoso semplice, al contrario di quello che ha osservato la signora A. Hotz [1]) nell'amnios di un feto umano a termine, nel quale l' epitelio sarebbe cilindrico.

Il Kölliker [2]) è contrario a questa affermazione della Hotz, e sostiene che la faccia interna dell'amnios umano è tappezzata di epitelio pavimentoso.

I margini di queste cellule sono rettilinei, e non mostrano le scanalature descritte da A. Hotz nelle cellule dell'amnios umano [3]).

In queste cellule, osservate a fresco, si vede chiaramente la rete protoplasmatica (Tav. I, *fig. 1, e*), descritta, pochi anni sono, da Heitzmann [4]), Fromman [5]) e Trinchese [6]) nelle cellule epiteliali di altri organi. Il nucleo di queste cellule è ovoidale (*b*), ed ha il diametro massimo di $0^{mm},004$. Quando si tratta l' amnios col carminio ammoniacale, il corpo di questi elementi si colora in roseo-pallido ed il nucleo in rosso vivo. In mezzo ad esse però si riscontrano di tratto in tratto delle cellule il cui cor-

[1]) *Ueber das Epithel des Amnion.* Dresden 1878.
[2]) *Embriologie des animaux supérieurs. Trad. par Aimé Schneider.* Paris 1879, 4ª Livraison.
[3]) Op. cit.
[4]) *Unters. über das Protoplasma* (Sitzungsber. der K. Akad. d. Wiss. zu Wien, 1873).
[5]) *Zur Lehre von der Structur der Zellen* (Jenaische Zeitschrift für Naturwiss., tom. IX, 1875).
[6]) *Anatomia e fisiologia della Spurilla Neapolitana.* Bologna 1878.

po è rimasto del tutto incoloro. Probabilmente gli stomi descritti dal Winkler [1]) nell'amnios umano non sono altro che cellule di simil fatta. Nell'amnios del gatto io non ho potuto osservare mai de'veri stomi.

Oltre le cellule che ho descritte, se ne veggono spesso delle altre aventi una lunghezza che giunge sino a $0^{mm},16$, ed una larghezza, che varia da $0^{mm},011$ a $0^{mm},015$ (*fig. 2, a*). Esse sono circondate dalle cellule ordinarie fra le quali il loro protoplasma s'insinua. Trattate col nitrato d'argento, esse si colorano in bruno meno dell'altre, salvo alcuni granuli sparsi nel loro corpo, che diventano neri. Son fornite di un grosso nucleo (*b*), che occupa quasi l'intera spessezza della cellula e contiene delle granulazioni grossolane.

Alle tre specie di cellule descritte se ne aggiunge una quarta, di cellule regolarmente poligonali, molto più grandi dell'altre, aventi un diametro che varia da $0^{mm},027$ a $0^{mm},048$ (*a'*). Sono senza nucleo, più chiare delle cellule circostanti, ed hanno un protoplasma sparso di granuli, che s'anneriscono col nitrato d'argento.

Lamina media, o connettivale.

Procedendo verso l'esterno, trovasi la lamina media dell'amnios, formata in gran parte di tessuto congiuntivo. Essa può essere divisa in tre strati, distinti per diversa struttura (Tav. II, *fig. 3, a, b', c'*). Essi costituiscono poco più de'tre quinti della spessezza totale dell'amnios. Di questi tre strati, quello più vicino all'epitelio interno è fatto di tessuto connettivo molto denso, a fibrille parallele tra loro (*c'*); il secondo o medio (*a*) è formato di tessuto lasso, e contiene dei vasi, che mandano de'sottili rami agli altri strati della stessa lamina; il terzo strato (*b'*) che si trova in contatto dell'epitelio esterno, è fatto di fasci connettivali, formanti una rete a larghe maglie.

Primo strato. Lo strato interno di tessuto congiuntivo serba tracce evidentissime della sua origine epiteliale. In esso si scorgono infatti de'nuclei, disposti a distanze regolari (Tav. I, *fig. 3, b*) e circondati di protoplasma intorno al quale giacciono le fibrille congiuntive (*d*). Evidentemente questo strato è formato di cellule mesoblastiche, il cui protoplasma periferico si è trasformato in fibrille.

Secondo strato. Se si esamina l'amnios a fresco, si veggono de'cordoni fibrosi, che si dirigono in tutti i sensi e s'anastomizzano tra loro, formando delle reti in mezzo ad un tessuto connettivo lasso. Se si tratta l'amnios con una soluzione d'acido osmico — 4 per 1000 — si veggono de'corpuscoli sanguigni nell'interno de'cordoni, e s'acquista così la certezza che questi sono vasi sanguigni, circondati da una tunica connettivale molto spessa.

Uccidendo una gatta per strangolamento, molti di questi vasi rimangono pieni di sangue, e si può allora facilmente seguire ad occhio nudo la loro origine. Infatti dalle arterie e vene ombelicali, alla distanza di circa un centimetro dall'ombelico, si staccano cinque o sei piccoli tronchi per ciascuna metà dell'amnios, alternandosi tra loro i tronchi arteriosi co'venosi (Tav. II, *fig. 6*, D, C). Essi si distribuiscono quindi nelle porzioni dell'amnios, che corrispondono alla testa, al dorso, agli arti superiori ed inferiori del feto. Per il tratto di tre a quattro centimetri essi serbano lo stesso diametro e non mandano diramazioni visibili ad occhio nudo; poi si ramificano un gran numero di volte, e si assottigliano in guisa da non potersi osservare che col microscopio.

[1]) Textur, Structur und Zellleben in den Adnexen des menschlichen Eies. Leipzig 1870.

Ciascun vaso risulta di un endotelio e di una tunica fibrosa, la quale è molto spessa relativamente al diametro del vaso, ed è formata di corpuscoli allungati dai cui poli partono delle fibrille parallele alla lunghezza del capillare. I vasi corrono per tutto l'amnios, e spesso, anastomizzandosi tra loro, formano delle reti bellissime. Accade talvolta che le tuniche connettivali de' diversi capillari di una rete si uniscano, formandone una sola, che circonda la rete stessa (Tav. II, *fig. 1*). Si veggono spesso due o tre capillari, paralleli tra loro, formati di solo endotelio e rivestiti da una tunica connettivale comune. Ciascuno di essi, dopo un certo tratto, si riveste di una tunica connettivale propria, prendendo una direzione diversa.

Dalla tunica connettivale di questi capillari partono delle fibrille, ora isolate, ora riunite in fasci (*fig. 2, m*), le quali si mettono in rapporto con certe agglomerazioni di cellule, la cui natura non ho potuto determinare (*e*). Queste cellule si trovano, ora disseminate in gran numero in vicinanza dei vasi, ora disposte in serie parallele, ora in gruppi ovoidali.

Terzo strato. Ho detto che la lamina media, nello strato sottoposto all'epitelio esterno, è formata in gran parte di un connettivo a rete (Tav. III, *fig. 2*), le cui maglie hanno un diametro di 0^{mm}, 045 a 0^{mm}, 082 (*d*). Questo connettivo risulta di elementi cellulari e di fibrille (*a, c*).

I primi hanno un protoplasma (*b*), che ad un forte ingrandimento si presenta sotto forma di rete. Esso circonda un grosso nucleo ovoidale (*a*), del diametro di 0^{mm}, 008, avente un nucleo che rifrange fortemente la luce.

Nell'amnios in via di sviluppo ho potuto osservare queste cellule prima che avessero formato una rete. In tale stato esse sono degli elementi cellulari perfettamente isolati l'uno dall'altro (*fig. 1*). Il loro protoplasma, configurato pure a rete (*b*), manda de' prolungamenti, le cui estremità libere si trasformano in fasci di fibrille (*c*).

Questo fatto sarebbe contrario all'opinione del Ranvier [1]), secondo la quale le fibrille del tessuto congiuntivo nascerebbero dalla sostanza intercellulare.

Nervi? In questa medesima lamina connettivale osservando l'amnios a fresco, si veggono de' corpuscoli ovoidi, (Tav. II, *fig. 4* — Tav. III, *fig. 3*), il cui maggior diametro varia da 0^{mm}, 041 a 0^{mm}, 089, ed il minore da 0^{mm}, 029 a 0^{mm}, 062. Da essi partono de' prolungamenti fibrillari (*l, h*), i quali poi si diramano, e le diramazioni s'anastomizzano tra loro, o vanno in corpuscoli simili a quelli da cui sono usciti i prolungamenti. In altri termini si vede proprio la disposizione di piccoli plessi nervosi formati di fibre pallide.

Quando si osservano de' pezzetti d'amnios trattati col carminio neutro, dentro i corpuscoli si vedono delle cellule, il cui nucleo è colorato in rosso vivo, mentre il corpo è rimasto incoloro. Sotto l'azione del picro-carminato, anche il corpo delle cellule si colora (Tav. III, *fig. 3, f*), sebbene molto meno intensamente del nucleo. Questi organi sono circondati di una capsula connettivale (Tav. II, *fig. 4, h* — Tav. III, *fig. 3, g*).

Da questi elementi che hanno tutta l'apparenza di cellule nervose, partono de' prolungamenti, fatti di sottilissime fibrille.

Si veggono pure di tratto in tratto in questa medesima lamina certi organi di forma ora ovoide, ora sferica, rivestiti di una spessa tunica, nella quale si veggono de' nuclei disposti a regolari distanze (Tav. II, *fig. 5*). Essi hanno un diametro che varia da 0^{mm}, 014

[1]) *Traité technique d' istologie.* Paris 1875

a 0^{mm}, 34, e sono con una delle loro estremità in relazione con un vaso sanguigno. Circa la loro natura nulla posso affermare con sicurezza, e mi limito soltanto a dire che ricordano, specialmente quando si esaminano a fresco, i glomeruli malpichiani. Il loro numero diminuisce col progredire dello sviluppo del feto.

Lamina esterna, o epiteliale.

La lamina esterna dell'amnios, non descritta finora da alcun autore, è costituita di un epitelio, i cui elementi sono ben diversi da quelli dell'epitelio interno (Tav. I, *fig. 4*). Sono delle enormi cellule, formanti un solo strato, le quali hanno una larghezza che varia da 0^{mm},043 a 0^{mm},076, ed una spessezza di 0^{mm},017, sì che costituiscono un epitelio pavimentoso semplice. Non è soltanto la grandezza enorme di queste cellule, che richiama l'attenzione dell'osservatore, ma particolarmente alcuni singolari prolungamenti, impiantati sulla faccia esterna di esse. Questi prolungamenti non hanno sempre la stessa lunghezza e la stessa forma: alcuni di essi sono semplici e molto lunghi, e somigliano a flagelli (*fig. 6*); altri sono pure semplici, ma clavati (*fig. 7*); altri finalmente si ramificano un gran numero di volte (*fig. 5*).

Queste stesse cellule, trattate con una soluzione di nitrato d'argento — 1 per 100 — mostrano dei finissimi granuli neri, sparsi per tutta la cellula e addensati in ispecie verso la periferia (*fig. 4*, *a*, *c*). Hanno ora un solo nucleo (*b*), ora due e talvolta anche tre, sprovvisti di nucleolo, e del diametro di 0^{mm},009.

Nelle cellule di questo epitelio, e non già, come afferma Anna Hotz [1]) e H. Mueller [2]) in quelle dell'epitelio interno, si vede, qualche volta, al posto del nucleo, una vescicola ripiena di un grasso liquido che si colora in nero sotto l'azione dell'acido osmico.

Le cellule sono unite tra loro da cemento, e presentano alla loro periferia de'dentelli molto marcati, come le cellule endoteliali.

Tra queste grosse cellule si riscontrano di tratto in tratto delle molto piccole, il cui nucleo non m'è riuscito di vedere, sebbene io l'abbia trattate con l'ordinarie sostanze coloranti.

CONCLUSIONI

Esistono dunque nell'amnios due epitelî ed una lamina connettivale.

Dei due epitelî, uno è interno, l'altro esterno. Il primo è formato di cellule d'ordinaria grandezza, provviste di una bellissima rete protoplasmatica; il secondo invece, di grandi cellule endoteliali, fornite sulla loro superficie libera di prolungamenti protoplasmatici, che prendono svariate forme.

Nella lamina media, o connettivale, bisogna distinguere tre strati: il primo, quello che sostiene l'epitelio interno, è piuttosto denso e ricorda la sua origine epiteliale; il secondo, o medio, è lasso e contiene dei vasi; il terzo, ch'è in contatto dell'epitelio ester-

[1]) Op. cit.
[2]) Kölliker, Op. cit.

no, è fatto di connettivo a rete. In quest' ultimo strato ho osservato delle cellule in via di sviluppo, che co'loro prolungamenti formavano le fibrille della rete.

Nella medesima lamina connettivale si trovano ancora degli elementi cellulari, somiglianti a leucociti, che abbondano specialmente in vicinanza de' vasi. Vi si trova pure una rete probabilmente nervosa, e de' corpuscoli che hanno tutta l'apparenza di glomeruli malpighiani.

È molto probabile che i vasi non solamente servano alla nutrizione dell'amnios; ma forniscano eziandio in gran parte, se non in tutto, il liquido amniotico.

Napoli, Maggio 1883.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tutte le figure istologiche delle tre tavole rappresentano preparazioni osservate col sistema Zeiss $\frac{2}{E}$, salvo la figura prima della tavola terza, che rappresenta una preparazione osservata col sistema $\frac{2}{F}$. Per fare i contorni de' disegni ho impiegato la camera chiara.

Le medesime lettere hanno l'istesso significato in ciascuna figura.

Tavola I.

a, *a'* — cellula,
b — nucleo delle cellule,
c — cellula binucleata,
d — fibrille connettivali,
e — rete protoplasmatica.

Fig. 1. — Epitelio interno, le cui cellule son fornite di una rete protoplasmatica. Si nota fra esse una cellula quasi incolora. Nitrato d'argento — 1 per 100 — e carminio ammoniacale.

Fig. 2. — Epitelio interno, di cui si vedono oltre le cellule con rete protoplasmatica, altre due specie di elementi: gli uni sono cellule serpiginose e con grosso nucleo; gli altri sono cellule più grosse delle ordinarie, senza nucleo e provviste di grossi e scarsi granuli.

Fig. 3. — Strato interno della lamina connettivale, nel quale si vedono le fibrille ed i nuclei, circondati di un protoplasma residuale. Picro-carminato.

Fig. 4. — Cinque cellule dell' epitelio esterno. Nitrato d'argento e carminio ammoniacale.

Fig. 5, 6, 7. — Cellule dello stesso epitelio esterno, sporgenti in fuori al margine del preparato. Si veggono i prolungamenti protoplasmatici in vario modo conformati. Carminio neutro.

Tavola II.

a — capillari,
b — tunica connettivale de' capillari,
c — corpuscoli sanguigni,
d — corpuscoli connettivali,
e — corpuscoli linfoidi,

f — nucleo delle cellule con nucleolo,
h — capsula connettivale,
l — prolungamenti fibrillari nervosi (?),
m — fibrille connettivali,
a' — epitelio esterno dell'amnios,
b' — strato connettivale a rete,
c' — strato connettivale fibrillare,
d' — epitelio interno,
A — amnios,
B — funicello ombelicale,
C — arterie,
D — vene.

Fig. 1. — Rete di capillari, compresi in una medesima tunica connettivale. Acido osmico—4 per 1000.

Fig. 2. — Due gruppi di elementi cellulari circondati da uno scarso numero di fibrille, che partono dalla tunica fibrosa de' capillari vicini.

Fig. 3. — (Figura schematica). Sezione trasversale dell'amnios.

Fig. 4. — Ganglietto nervoso (?), trattato col carminio neutro. Si vedono all'interno i nuclei delle cellule, colorati in rosso; all'esterno una capsula fibrosa, e dei prolungamenti fibrillari.

Fig. 5. — Glomerulo sanguigno (?)

Fig. 6. — Feto di gatto metà della sua grandezza, chiuso nell'amnios, sul quale si vede la disposizione dei vasi sanguigni.

Tavola III.

a — nucleo delle cellule,
b — rete protoplasmatica,
c — prolungamenti fibrillari protoplasmatici,
d — spazio compreso tra le maglie della rete,
e — cellula staccata da quelle che formano la rete,
f — protoplasma delle cellule nervose,
g — capsula connettivale,
h — cordoncini che escono dal ganglietto (?).

Fig. 1. — Cellula connettivale fornita di una rete protoplasmatica, dalla cui periferia partono de'prolungamenti fibrillari, destinati a formare le maglie del tessuto connettivo a rete.

Fig. 2. — Connettivo a rete.

Fig. 3. — Ganglietto nervoso (?) con fasci di fibre, che ne escono. Nell'interno si veggono delle cellule nervose, all'esterno una capsula fibrosa. Picro-carminato.

finita di stampare il dì 8 febbraio 1884.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
d
m

Fig. I

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

STUDII SULLO SVILUPPO DELLA *CHROMODORIS ELEGANS*

del Signor FILIPPO RHO

Letta nell'adunanza del 12 Maggio 1883

(Gabinetto di Anatomia ed embriologia comparate)

Le osservazioni che formano l'argomento di questa breve memoria furono fatte nell'ultima metà di Marzo e nella prima di Aprile, sulle uova di due nidamenti cilindrici deposti da una coppia di *Chromodoris elegans* [1]) in un piccolo acquario del museo di anatomia comparata dell'Università di Napoli.

Nel cilindro muccoso le uova erano disposte a spira, e i loro vitelli apparivano ad occhio nudo come punti giallognoli.

Avrei desiderato studiare lo sviluppo di questa specie per mezzo di sezioni; ma ho dovuto rinunziarvi perchè i primi tentativi non riuscirono; e la scarsezza del materiale non mi permise di ripetere le pruove con diversi metodi. Mi decisi quindi a studiare gli embrioni allo stato vivente.

Quando incominciai le mie osservazioni, le uova avevano già attraversato le primissime fasi dello sviluppo; cioè: era compiuta la formazione delle vessicole direttrici insieme alla seconda semmentazione. Il vitello più giovane da me osservato era composto di quattro blastomeri strettamente uniti tra loro e disposti in croce *(Tav. I, fig. 1)*, i quali si trovavano nello stadio di coniugazione che segue la seconda semmentazione. Siccome due di essi erano un poco più piccoli degli altri, così è necessario ammettere che per la prima semmentazione il vitello fosse diviso in due parti disuguali. I granuli di lecitina avevano un bel colore giallognolo ed erano uniformemente distribuiti in tutto il corpo dei blastomeri. Non vi si poteva quindi distinguere una parte formativa ed una nutritiva. Siffatta distinzione si rendeva però evidente quando i quattro blastomeri, terminato il periodo di riposo dopo la seconda semmentazione, si disponevano alla terza *(fig. 2)*. In questo periodo ogni blastomero si componeva di un piccolo semmento formato di protoplasma puro e situato al polo direzionale o superiore del vitello *(c, f)* e di

[1]) Nell'intestazione delle tavole, ove è scritto: *Chromodoris Villafranca*, leggi: *Chromodoris elegans*.

un grosso semmento formato di protoplasma e di granuli di lecitina. Il primo era trasparente, ed in alcuni individui aveva una leggiera tinta azzurrognola che si accentuava maggiormente quando era osservato alla luce diretta; il secondo era opaco e giallognolo. I due semmenti si staccarono e si ebbero così otto blastomeri: quattro piccoli destinati, come dirò di sotto, a formare l'ectoblasto, e quattro grossi destinati a formare l'endoblasto.

In questa specie adunque le parti del vitello dalle quali provengono i due foglietti germinativi primitivi, si rendono indipendenti nella terza semmentazione. I quattro piccoli blastomeri, semmentandosi rapidamente, formarono un cumulo di piccole cellule che ricoprì l'emisfero superiore dei grossi blastomeri *(Tav. I, fig. 3, 4, 5, 6)*. Durante la moltiplicazione dei piccoli blastomeri, i grossi, di cui si poteva vedere soltanto l'emisfero inferiore, mostravano dei vivaci movimenti ameboidi. Il loro numero sembrava ordinariamente immutato; solo in un individuo ne potei contare sei in vece dei quattro ordinarii *(fig. 5)*.

Le fasi descritte di sopra e rappresentate nelle figure 1-6 della tav. I, furono da me osservate in uova deposte da un giorno. Nel secondo giorno, il maggior numero degl'individui era formato di due strati ben distinti: uno esterno, che era l'ectoblasto, composto di piccole cellule a contorni ben netti e di un colore azzurrognolo pallidissimo, l'altro interno che era l'endoblasto, giallognolo, composto di grosse cellule i cui limiti non si potevano distinguere sul vivente, ma si distinguevano benissimo in individui trattati come dirò tra breve.

Le cellule dell'ectoblasto avevano circondato completamente l'endoblasto in quasi tutti gli individui. Però in una preparazione ne vidi uno in cui le cellule dell'ectoblasto limitavano, in corrispondenza del polo antidirezionale, un ristretto orifizio circolare, in fondo al quale si vedeva il giallo dell'endoblasto. Questo orifizio era il blastoporo. Disgraziatamente questo individuo girò sul proprio asse trasversale mentre mi disponevo a farne il disegno, nè mi fu più possibile rimetterlo nella prima posizione che mi permetteva di vedere il blastoporo.

In questa specie si ha dunque una tipica gastrula per epibolia. Negli individui alquanto più avanzati nello sviluppo, il blastoporo era scomparso e si aveva la forma rappresentata nella tav. I, fig. 7. Le cellule dell'ectoblasto che cuoprivano la faccia superiore dell'embrione *(e c)* erano allungate e poliedriche per pressione reciproca e si approfondavano nell'endoblasto per formare lo stomadeo. Le cellule che cuoprivano la faccia inferiore e le facce laterali dell'embrione erano rotonde e più piccole di quelle or ora descritte. Nel mezzo dell'embrione trovavasi un'ampia cavità in forma di anfora *(e n)* a largo collo, limitata dalle cellule giallognole dell'endoblasto. Era l'intestino primitivo formatosi nella spessezza dell'endoblasto in modo che non saprei dire. Posso soltanto affermare con sicurezza che questa cavità non comunicava con l'esterno per mezzo del blastoporo ormai chiuso, ma per una nuova apertura, formatasi al polo dell'embrione opposto a quello in cui trovavasi il blastoporo.

Negl'individui alquanto più sviluppati di quello rappresentato nella tav. I, fig. 7, si vedeva, all'estremità superiore del corpo, *(Tav. I, fig. 10, v)* un'eminenza la cui base era munita di cigli vibratili *(v e r)* i quali sembravano formare un cerchio continuo che passava sopra la bocca *(b)* ed erano impiantati sopra cellule molto più lunghe di quelle che ricuoprivano la faccia dorsale dell'embrione. Erano le cellule marginali del velo, i

cui cigli vibratili, in prima corti e sottili, s'ingrossarono e si allungarono poi mentre il velo si sviluppava. Nelle altre parti del corpo non esistevano cigli.

Sotto la bocca si vedeva un'altra eminenza *(fig. 10, p)* che era l'abbozzo del piede. Al polo inferiore dell'embrione vedevasi un leggiero infossamento dell'endoblasto nel quale si avanzavano alcune cellule allungate dell'ectoblasto *(i, c)* per formare il primo accenno dell'invaginazione conchiliare. Non mi fu possibile seguire le fasi successive dello sviluppo di quest'organo.

Alcuni individui che trovavansi nel grado di sviluppo or ora descritto, furono esposti ai vapori di acido osmico e poi immersi nell'alcool a 25. Furono poi colorati col picro-carminato e messi a chiarire nella glicerina. Osservata la preparazione ad un ingrandimento di circa 250 diametri, in qualche individuo abbastanza trasparente si vedeva la cavità dell'intestino limitata da cellule intensamente colorate in bruno, nelle quali s'intravedeva un nucleo bene sviluppato e colorato in rosso. A destra ed a sinistra dell'endoblasto notavasi una serie longitudinale di quattro cellule, colorate in bruno come quelle dell'endoblasto. Erano senza dubbio le prime cellule mesoblastiche. Non potrei affermare se esse formassero soltanto due strisce laterali o uno strato continuo intorno all'endoblasto, perchè non mi riuscì di vedere alcuno di quegli embrioni in sezione ottica trasversale. Siccome le cellule dell'endoblasto avevano la medesima colorazione di quelle del mesoblasto, così è quasi sicuro che queste provenivano da quelle. Io però mi affretto a dichiarare di non aver veduto le cellule dell'endoblasto sementarsi per produrre le serie di cellule mesoblastiche suddette.

Nelle mie osservazioni trovasi una vasta lacuna tra la fase di sviluppo rappresentata nella fig. 10 e quella rappresentata nella fig. 11 della Tav. I, nella quale il velo ed il piede sono già molto sviluppati e le otocisti già formate. L'apparecchio digerente però non ha progredito nello sviluppo quanto le altre parti. Esso si differenzia maggiormente quando il velo ed il piede hanno acquistato la forma definitiva o quasi. Allora in fatti la massa giallognola dell'endoblasto si divide in due parti che sono il primo accenno dei sacchi nutritori. *(Tav. 1, fig. 14, s n 1, s n 2)*. Queste due masse giallognole sono in prima circondate da uno spesso strato di cellule mesoblastiche ed ectoblastiche *(Tav. I, fig. 11, 12, 13)*; ma mentre i due sacchi ingrandiscono, il mesoblasto si stacca dall'ectoblasto che aderisce alla conchiglia *(fig. 14, c)*. Il mesoblasto che riveste i due sacchi nutritori si assottiglia poco a poco e si riduce ad una membrana sottilissima. Lo spazio compreso fra l'ectoblasto e l'endoblasto della porzione inferiore e posteriore dell'embrione, è traversato più tardi da elementi muscolari *(fig. 16, m c)*. Guardando da un lato un embrione in cui si siano già completamente sviluppati i due sacchi nutritori, si vede una massa di cellule incolore o lievemente azzurrognole, le quali formano lo stomaco e l'intestino definitivo *(fig. 17, i)*.

L'intestino primitivo sembra dividersi in tre parti, due delle quali formano i sacchi nutritori, mentre l'altra forma l'esofago e lo stomaco nel quale quelli sboccano. Le cellule che formano le pareti dell'esofago e dello stomaco perdono poco a poco la sostanza lecitica gialla; mentre quelle che formano i due sacchi nutritori la conservano. Nel momento della formazione dei due sacchi nutritori, le cellule di cui questi sono formati hanno lo stesso colore giallastro, ma poi quelle del sacco sinistro divengono poco a poco color mattone *(fig. 16, s n 1)*. Questi organi, nel principio della loro formazione, sono situati al dorso dell'embrione, uno a destra, l'altro a sinistra; ma poi, quando la

larva abbandona l'uovo, la loro posizione cambia secondo i movimenti dell'intestino che sono molto estesi. Allora il sacco nutritore color mattone può trovarsi a destra ed il giallo a sinistra.

Circa la formazione dell'intestino definitivo posso dire soltanto che esso apparisce come una massa cellulare bernoccoluta, situata nella regione dorsale inferiore dell'embrione *(Tav. II, fig. 17 i)*. Questa massa che si continua colle pareti dello stomaco, si allunga poco a poco verso la regione destra e superiore, mentre nel suo mezzo apparisce una stretta cavità nella quale sporgono i cigli vibranti dal basso all'alto. L'ano si apre sotto il lobo destro del velo.

Prima che i due sacchi nutritori si differenzino, apparisce nel mesoblasto, in corrispondenza delle cellule che formeranno il sacco nutritore destro, un gruppo di cinque o sei cellule piccolissime con parete propria e protoplasma chiaro sparso di granuli giallastri. Questi granuli, col progredire dello sviluppo, aumentano in numero e diventano d'un colore rosso mattone. Poco a poco le cellule si uniscono tra loro così intimamente che il loro limite scomparisce. Negli individui più sviluppati, i granuli formano una massa pavonazza *(fig. 11-25 r)*. Circa la natura chimica di questi granuli non posso dire nulla, poichè, disgraziatamente, il materiale mi mancò prima che io potessi sperimentare su di essi l'azione dei reagenti. È pertanto molto probabile che siano formati di sostanze escretorie, poichè tutto concorre a farmi credere che le cellule nelle quali essi si formano costituiscano il rene primitivo di questa specie. La loro struttura vessicolare nelle prime fasi dello sviluppo; la loro posizione corrispondente a quella occupata dal rene primitivo destro nelle larve di Gasteropodi meglio studiate; la mancanza di un altro organo che possa interpetrarsi come rene, sono i fatti sui quali è fondata questa mia opinione. Dalla quale non basterebbe a rimuovermi il fatto, che mi si potrebbe opporre, dell'esistenza di un rene doppio nelle larve di Gasteropodi meglio conosciute; poichè potrebbe darsi benissimo che nelle larve di *Chromodoris elegans* il rene primitivo sinistro sia scomparso per adattamento alla vita embrionale, come è scomparso in altri Gasteropodi uno dei reni definitivi per adattamento alla vita dello stato adulto. Ad ogni modo, io non intendo emettere un giudizio definitivo su questo argomento, riconoscendo come le mie osservazioni in proposito siano insufficienti a stabilire, in modo inoppugnabile, l'omologia e la funzione dell'organo di cui si tratta.

Accanto alla massa di granuli pavonazzi descritta di sopra, si forma (non saprei dire da quale foglietto) una specie di capsula con pareti molto spesse. Essa, nel suo primo apparire, ha la forma d'una mezzaluna *(Tav. II, fig. 17 c a)*; ma poi diventa piriforme *(fig. 19, 21 c a)* e si termina colla sua estremità sottile alla base del lobo destro del velo, accanto all'ano. Negl'individui nuotanti liberamente alla superficie dell'acqua, la massa pavonazza è contenuta entro questa capsula; mentre, negli embrioni rinchiusi ancora nell'uovo, quella giace accanto a questa. La capsula deve certamente comunicare per un orifizio interno colla cavità contenente quella massa; la qual cosa è dimostrata dal passaggio di questa nella capsula stessa. La cavità capsulare si apre poi all'esterno per uno stretto orifizio situato accanto all'ano. Evidentemente l'ufficio di quest'organo è quello di espellere dall'organismo le sostanze escretorie.

Circa lo sviluppo del sistema nervoso e degli organi dei sensi, posso dire ben poca cosa. Sono soltanto in grado di confermare, per mie proprie osservazioni, l'opinione generale degli embriologi circa l'apparizione precoce delle otocisti, le quali si vedono già

quando non v'è ancora alcuna traccia nè di occhi, nè di sistema nervoso. Gli occhi appariscono dopo le otocisti; e dopo gli occhi si forma il sistema nervoso centrale. Questo sistema è trasparentissimo, e può essere veduto soltanto quando l'embrione è rivolto o col dorso o colla faccia superiore del velo verso l'occhio dell'osservatore. In qualunque altra posizione non mi è mai riescito di vederlo. Vidi per la prima volta questo sistema in una larva nuotante liberamente nell'acqua *(Tav. II, fig. 20, gn)*. Esso aveva la forma di un ferro di cavallo, le cui due branche avevano il margine esterno diritto e l'interno leggermente concavo. Le sue estremità erano rigonfie: nella destra si vedeva una grossa cellula che mancava nella sinistra. I limiti delle cellule che formavano le altre sue parti non erano visibili sul vivente. Dopo la morte della larva, quei limiti divennero evidentissimi, ed il sistema appariva come una continuazione dell'epitelio della porzione centrale del velo; la qual cosa conferma l'opinione del maggior numero degli embriologi, secondo la quale questo sistema si forma per ispessimento dell'ectoblasto. In una larva più sviluppata di quella rappresentata nella figura 20, il sistema nervoso centrale si era già differenziato in cinque parti ben distinte: due per ogni lato ed una mediana *(fig. 23)*. Le due parti laterali ed anteriori erano, senza alcun dubbio, i gangli cerebro-viscerali *(g n s)*; le due posteriori *(g s e)*, i gangli pedali; e la parte mediana *(c)* la commissura cerebrale.

Non mi è mai accaduto di vedere nel mesoblasto formazioni indipendenti da gangli, le quali avessero qualche apparenza di nervi. Invece ho potuto vedere, nella regione anteriore di ciascun ganglio cerebro-viscerale, un sottile prolungamento diretto verso quella regione del velo nella quale i due lobi di quest'organo si uniscono: questo prolungamento era molto probabilmente il nervo olfattivo. Siccome negl'individui più sviluppati esso era più lungo che nei meno sviluppati, così io credo che si appongano quegli osservatori i quali sostengono che i nervi emanano dai centri nervosi come i rami dal tronco d'un albero. In concordanza di questo, credo che siano prodotte da nervi prossimi a spuntare, le prominenze angolose che si osservano nei gangli ancora privi di nervi *(fig. 23 g s e)*.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Significato delle lettere

a, ano,
b, bocca. Soltanto nella fig. 23 indica l'esofago veduto in sezione ottica trasversale,
c, conchiglia,
ca, capsula del rene?
cr, cirri del piede,
car, cardia,
co, commissura,
cf, blastomeri che formeranno l'ectoblasto,
cn, blastomeri che formeranno l'endoblasto,
e, esofago,
ec, ectoblasto,
en, endoblasto
gg, glandula?
gse, ganglio pedale,
gns, ganglio cerebro-viscerale,
gn, sistema nervoso centrale,
i, intestino,
ic, invaginazione preconchiliare. Nella fig. 12 indica l'inizio del solco che divide i due sacchi nutritori,
lb, labbro o cercine che circonda la bocca,
mm, fibre muscolari,
mv, muscolo del velo,
mc, muscolo cocleare,
oc, occhi,
ot, otocisti,
pi, piloro,
pr, piccoli cigli vibratili del velo,
r, rene?
s, stomaco,
sn1, sacco nutritore sinistro,
sn2, sacco nutritore destro,
v, velo,
vd, vessicole direttrici.

Tavola I.

Fig. 1. Uovo il cui vitello si è diviso in 4 blastomeri, i quali si trovano in coniugazione. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 2. Uovo il cui vitello trovasi prossimo alla terza semmentazione. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 3, 4, 5, 6. Morula *(Amphimorula)*. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 7. Gastrula *(Amphigastrula)*. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 8. Embrione veduto dalla faccia ventrale. Si è già sviluppata la corona ciliare, della quale si vedono soltanto i cigli che sporgono ai due lati del corpo. Zeiss $\frac{3}{E}$.

Fig. 9. Embrione veduto dalla faccia dorsale, un poco in iscorcio. Si vede la metà della corona ciliare rivolta verso l'occhio dell'osservatore. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 10. Embrione veduto da un lato. Zeiss $\frac{3}{E}$.

Fig. 11. Embrione veduto dalla faccia dorsale. Il velo, il piede, le otocisti sono completamente sviluppati. Il rene? (*r*) è già apparso. I sacchi nutritori cominciano a differenziarsi. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 12. Embrione sviluppato quanto quello della figura precedente, veduto dalla faccia ventrale. Il rene (*r*) si vedeva un poco per trasparenza. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 13. Embrione veduto da un lato.

Fig. 14, 15. Embrioni veduti uno dalla faccia dorsale, l'altro dalla ventrale. I sacchi nutritori sono molto bene distinti. Sono apparsi gli occhi. Zeiss. $\frac{3}{DD}$.

Fig. 16. Embrione più sviluppato di quelli rappresentati nelle due figure precedenti 14, 15. È veduto dalla faccia dorsale. Il sacco nutritore sinistro comincia a diventare di color rossastro. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Tavola II.

Fig. 17, 18, 19. Embrioni più sviluppati di quello rappresentato nella figura 16. I primi due veduti dal lato destro; l'ultimo, dalla faccia dorsale. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 20. Embrione veduto dalla faccia superiore. Sono rappresentati esattamente i cigli marginali del velo in movimento. Grado di sviluppo come negli embrioni delle tre ultime figure precedenti. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 21. Embrione veduto dal lato destro ed un poco dalla faccia ventrale. Zeiss $\frac{3}{DD}$.

Fig. 22. Porzione superiore di una larva libera leggermente compressa. Zeiss $\frac{3}{E}$.

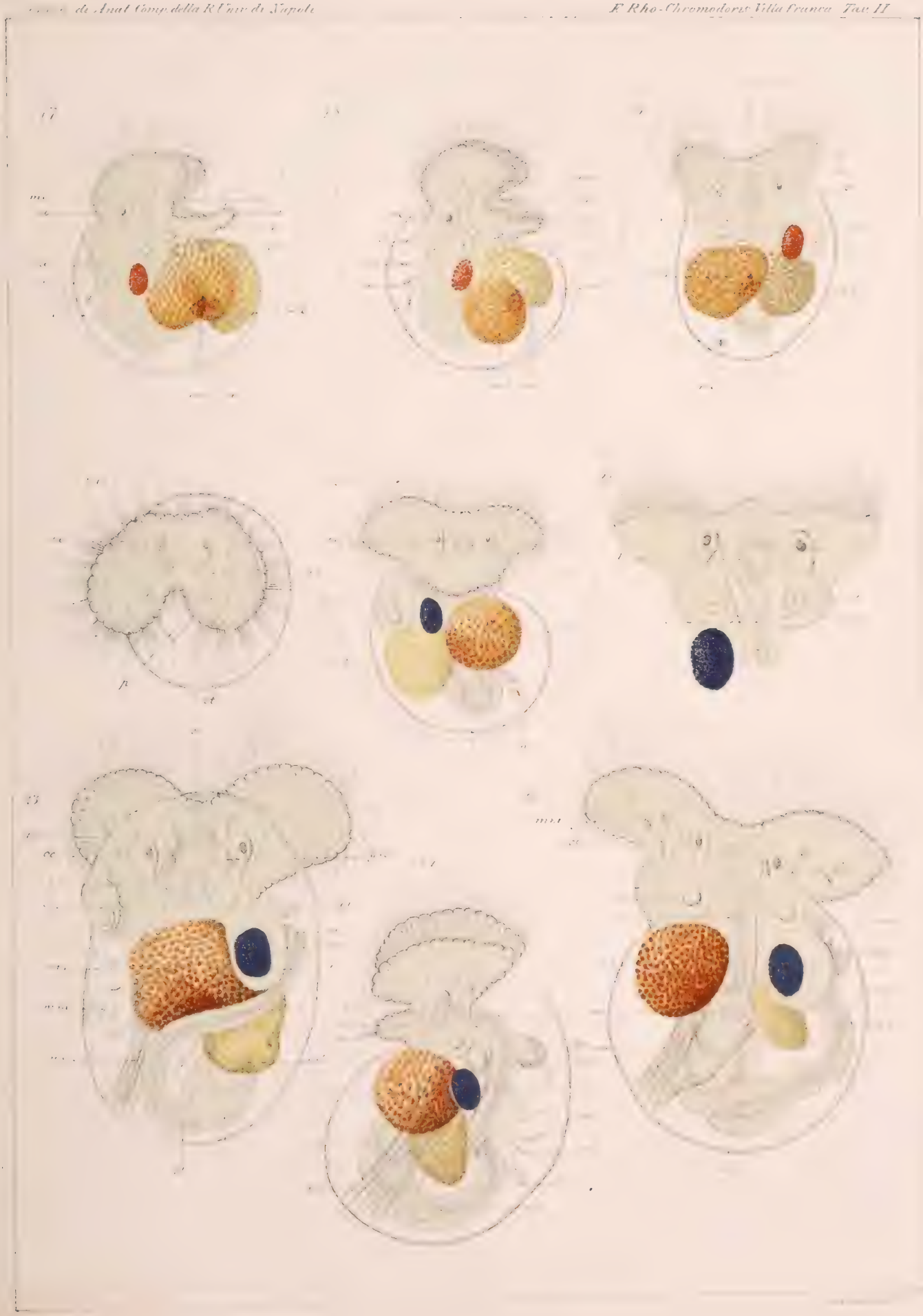
Fig. 23. Larva libera veduta dalla faccia dorsale. Zeiss $\frac{3}{E}$.

Fig. 24. Larva libera veduta da un lato. Zeiss $\frac{3}{E}$.

Fig. 25. Larva libera veduta dalla faccia dorsale. Zeiss $\frac{3}{E}$.

Finita di stampare il dì 30 agosto 1884.

2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16



lla Reale Accademia
Scienze... (NAPOLI)
1 1882

er's Name	Date Returned
R	FEB 20 1987
326	

Q54
.A38A8
*
AMNH LIBRARY
100217170